Динамические системы, том 3(31), No. 3-4, 249–253

УДК 534.231

Метод нормальных мод для трехмерной модели гидроакустического волновода

Ю. И. Папкова

Севастопольский национальный технический университет,
E-mail: yulia.papkova@gmail.com

Аннотация. Построено трехмерное аналитическое решение для неоднородного гидроакустического волновода в случае медленно меняющегося профиля скорости звука по радиальной и азимутальной координатам. Решение строится на основе метода нормальных мод. Представленный подход позволяет учесть влияние затухания в донном слое на характеристики звукового поля.

Ключевые слова: метод нормальных мод, неоднородный гидроакустический волновод, жидкое дно, трехмерное решение

1. Введение

В настоящее время существует большое число моделей гидроакустического волновода, в рамках которых рассматривается детерминированная среда с зависящими от пространственных координат параметрами, учитывающая влияние рельефа дна и его геологические свойства, большинство из которых основано на применении численных методов. Аналитические методы получили широкое распространение для анализа звуковых полей в гидроакустических волноводах, обладающих радиальной симметрией (2D модели) [1]. Использование таких моделей волноводов обеспечивает удовлетворительное решение для большинства прикладных задач, в которых зависимость от угловой координаты незначительна, тем не менее, остается потребность в дальнейшем развитии аналитических методов расчета звукового поля в диапазоне глубина, расстояние и азимут (3D модели). В статье [2] дан обзор теоретических подходов, применяемых для расчета звуковых полей в трехмерных моделях гидроакустических волноводах, но в данных моделях не учитываются геологические свойства донных осадков. В реальных природных волноводах звуковое поле определяется, главным образом, структурой и свойствами донного слоя, поэтому актуальным является построение аналитического решения для трехмерной модели гидроакустического волновода с учетом влияния состава донного слоя.

2. Постановка задачи

В акустике шельфа для нахождения звукового поля в морской среде широко используется метод нормальных мод (волновой метод). В случае цилиндрической симметрии звуковое поле точечного гармонического источника, излучающего волну круговой частоты ω, описывается скалярной функцией $\Phi(r,z,\varphi,t) = \Phi(r,z,\varphi)\exp(-i\omega t)$, удовлетворяющей уравнению Гельмгольца

$$\Delta\Phi + \frac{\omega^2}{c^2(r,z,\varphi)}\Phi = -\frac{\delta(r-r_0)\delta(z-z_0)\delta(\varphi-\varphi_0)}{r}, \tag{2.1}$$

где

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

— оператор Лапласа; $\Phi(r, z, \varphi)$ — амплитуда потенциала скорости; δ — дельта функция Дирака; $c(r, z, \varphi)$ — распределение скорости звука в волноводе; (r_0, z_0, φ_0) — координаты источника.

Поверхность волновода моделируется как акустически свободная, что соответствует краевому условию

$$\Phi|_{z=0} = 0. \tag{2.2}$$

Модель двухслойного плоскослоистого гидроакустического волновода полезна как первое приближение к реальным гидроакустическим волноводам. Для исследования основных волноводных эффектов в гидроакустическом волноводе, таких как дальнее распространение звука, влияние структуры осадков на акустическое поле, рассмотрим двухслойную модель волновода, где донный слой расположен на абсолютно-жестком основании, данный волновод ограничен свободной поверхностью и жидким дном на абсолютно-жестком основании:

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=h_1} = 0. \tag{2.3}$$

Скорость звука в водном слое может быть записана как

$$C_1 = c_1(z) + c_1^*(r, \varphi). \tag{2.4}$$

где $c_1(z)$ — рефракционный член; $c_1^*(r, \varphi)$ — поправка к скорости звука; аналогично в жидком донном слое скорость звука представим как $C_2 = c_2(z) + c_2^*(r, \varphi)$. Представим $\frac{1}{C^2(r,z,\varphi)}$ в виде:

$$\frac{1}{C^2(r, z, \varphi)} = \frac{1}{c^2(z)} + \frac{1}{r^2(c_0 + \varepsilon(\varphi))^2} - \frac{1}{r^2(c_0 + \Delta(r))^2}, \tag{2.5}$$

где $\varepsilon(\varphi) \to 0$, $\Delta(r) \to 0$, $c_0 = const$.

На границе раздела слоев $z = h$ выполняются условия непрерывности звукового поля:

$$\lim_{z\to h-} \rho_1\Phi = \lim_{z\to h+} \rho_2\Phi \quad \lim_{z\to h-} \frac{\partial\Phi}{\partial z} = \lim_{z\to h+} \frac{\partial\Phi}{\partial z} \tag{2.6}$$

где ρ_1 — плотность слоя воды; ρ_2 — плотность донных осадков.

3. Метод нормальных мод

Общее решение $\Phi(r, z, \varphi)$ краевой задачи, удовлетворяющее как граничным условиям, так и условию излучения, строится в виде суммы нормальных мод:

$$\Phi\left(r, z, \varphi\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} R_{mn}(r)\psi_n(z)\phi_m(\varphi), \tag{3.1}$$

где $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\psi_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ — вертикальные собственные числа и собственные функции следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned}
&\psi'' + \left(\tfrac{\omega}{c^2(z)} - \xi^2\right)\psi = 0,\\
&\psi(0) = 0, \quad \lim_{z\to h-} \rho_1\psi(z) = \lim_{z\to h+} \rho_2\psi(z),\\
&\lim_{z\to h-} \psi'(z) = \lim_{z\to h+} \psi'(z),\\
&\psi'(h_1) = 0,
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Аналогично, азимутальные собственные числа и собственные функции $\{\eta_m\}_{m=0}^{\infty}$ и $\{\phi_m(\varphi)\}_{m=0}^{\infty}$ удовлетворяют следующему уравнению

$$\phi'' + \left(\left(\frac{\omega}{c_0 + \varepsilon(\varphi)}\right)^2 + \eta^2\right)\phi = 0, \tag{3.3}$$

и условию ортогональности

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi_m(\varphi)\phi_n(\varphi)d\varphi = \delta_{mn}, \quad m, n = 0, 1, \ldots, \tag{3.4}$$

где δ_{mn} — символ Кронекера.

Используя асимптотическую формулу [3], запишем собственные функции и собственные числа в виде:

$$\begin{aligned}
\phi_m(\varphi) &= e_m \cos m\varphi, \quad m = 0, 1, \ldots,\\
\eta_m^2 &= \sqrt{m^2 - \left(\frac{\omega}{c_\varphi}\right)^2},
\end{aligned} \tag{3.5}$$

где

$$\begin{aligned}
c_\varphi &= c_0 + (\max \varepsilon(\varphi) + \min \varepsilon(\varphi))/2;\\
e_m &= \begin{cases} 1/\sqrt{2\pi}, & m = 0,\\ 1/\sqrt{\pi}, & m \neq 0. \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Краевая задача (3.2) не является классической задачей типа Штурма–Лиувилля, так как, кроме условий Штурма на границах волновода, при $z = h$ должны выполняться условия непрерывности звукового поля. Следовательно, эти условия выполняются и для комплексно-сопряженной функции $\bar{\psi}_n(z)$. Домножим дифференциальное уравнение (3.2) на $\rho(z)\bar{\psi}_n(z)$ и проинтегрируем от 0 до h_1:

$$\int_0^{h_1} \left[\psi_n''(z) + \frac{\omega^2}{c^2(z)}\psi_n(z)\right]\bar{\psi}_n(z)\rho(z)dz = \xi_n^2 \int_0^{h_1} \psi_n(z)\bar{\psi}_n(z)\rho(z)dz. \tag{3.7}$$

Преобразуя интегралы в левой части полученного равенства интегрированием по частям с учетом условий непрерывности, получим соотношение ортогональности для собственных функций с весом $\rho(z)$ в пространстве интегрируемых с квадратом функций $L_2[0, h_1]$:

$$\int_0^{h_1} \psi_n(z)\psi_m(z)\rho(z)dz = \delta_{nm} \int_0^{h_1} \rho(z)\psi_n^2(z)dz. \tag{3.8}$$

Алгоритм построения собственных функций и чисел краевой задачи (3.2) на основе линейной аппроксимации квадрата волнового числа $k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2(z)}$ для системы опорных точек $c(z_i) = c_i$ подробно описывается в статье [4]. Данные формулы остаются справедливыми и в случае введения коэффициента затухания γ для донного слоя $k_2 = \dfrac{\omega}{c_2}(1-i\gamma)$.

После подстановки выражения (3.1) в неоднородное уравнение Гельмгольца (2.5), с учетом ортогональности (3.8) собственных функций $\{\psi_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ и ортогональности (3.4) собственных функций $\{\phi_m(\varphi)\}_{m=0}^{\infty}$ получим уравнение для $R_{mn}(r)$:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR_{mn}(r)}{dr}\right) + \left(\xi_n^2 - \frac{\eta_m^2}{r^2} - \frac{\omega^2}{(c_0+\Delta(r))^2 r^2}\right) R_{mn}(r) = $$
$$= -\frac{\delta(r-r_0)}{r}\frac{\rho(z_0)\psi_n(z_0)}{\int_0^{h_1}\rho(z)\psi_n^2(z)dz}\phi_m(\varphi_0), \quad (3.9)$$

При малой вариации скорости звука по радиальной координате, его величина достаточно точно описывается постоянной $c_r = c_0 + (\max\Delta(r) + \min\Delta(r))/2$ и решение, описывающее уходящую от излучателя волну, имеет вид

$$R_{mn}(r) = A_{mn}H^{(1)}_{\lambda_m}(\xi_n r),$$

где A_{mn} — произвольные постоянные; $\lambda_m = \sqrt{\eta_m^2 + \omega^2/c_r^2}$.

Для нахождения коэффициентов A_{mn} проинтегрируем [2] уравнение (3.9) в пределах от $r_0 - \varepsilon$ до $r_0 + \varepsilon$ при стремлении ε к нулю:

$$\left.\frac{dR_{mn}(r)}{dr}\right|_{r_0-\varepsilon}^{r_0+\varepsilon} = -\frac{1}{r_0}\frac{\rho(z_0)\psi_n(z_0)}{\int_0^{h_1}\rho(z)\psi_n^2(z)dz}\phi_m(\varphi_0),$$

тогда определим A_{mn} следующим образом:

$$A_{mn} = -\frac{1}{r_0\left(H^{(1)}_{\lambda_m}(\xi_n r_0)\right)'}\frac{\rho(z_0)\psi_n(z_0)\phi_m(\varphi_0)}{\int_0^{h_1}\rho(z)\psi_n^2(z)dz},$$

В результате выражение для амплитуды потенциала скорости $\Phi(r,z,\varphi)$ имеет вид:

$$\Phi(r,z,\varphi) = -\frac{\rho(z_0)}{r_0}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n(z_0)\psi_n(z)\phi_m(\varphi_0)\phi_m(\varphi)}{\int_0^{h_1}\rho(z)\psi_n^2(z)dz}\frac{H^{(1)}_{\lambda_m}(\xi_n r)}{\left(H^{(1)}_{\lambda_m}(\xi_n r_0)\right)'}. \quad (3.10)$$

4. Заключение

Таким образом, при сделанных выше предположениях о зависимости профиля скорости звука от пространственных координат получено аналитическое представление для потенциала скорости звука в виде суммы нормальных мод (3.10). Предположение о слабой вариации профиля скорости звука по радиальной и азимутальной координате оказываются справедливыми для большинства реальных геофизических волноводов, следовательно, формула (3.10) является обобщением известного решения для двумерных плоскослоистых волноводов.

Список цитируемых источников

1. *Толстой И., Клей К. С.* Акустика океана —М.: Мир, 1969. — 301 с.
2. *Luo W., Schmidt H.* Three dimensional propagation and scattering around a conical seamount // J. Acoust. Soc. Am. — 2009. — 1. — pp. 52 - 65.
3. *Папкова Ю. И.* Волновод Пекериса в случае неоднородного профиля скорости звука и поглощающего основания // Акустичний вiсник. — 2010. №3. — С. 42 - 50.
4. *Papkova J. I., Papkov S. O., Yaroshenko A. A.* . Energy characteristics of the hydroacoustic field in a nonuniform marine medium with a cylindrical body floating on the surface // Physical Oceanography — Springer Science + Business Media, 2006. — Vol. 16, no.3. — pp. 168 -176.

Получена 01.11.2013