Динамические системы, том 1(29), №2 (2011), 255–267

УДК 539.3

Обобщение закона асимптотических выражений Кояловича на случай неотрицательной бесконечной матрицы

С. О. Папков

Севастопольский национальный технический университет,
Севастополь, 99053. *E-mail: stanislav.papkov@gmail.com*

Аннотация. Достаточные условия существования ненулевого предела для решения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений обобщаются на случай неотрицательной матрицы системы. Приводится доказательство теоремы на основе свойств лимитант. Рассматривается пример приложения данного результата к исследованию собственных колебаний ортотропной пластины. Заменой неизвестных однородная квазирегулярная бесконечная система сводится к регулярным системам. Показано что регулярные системы удовлетворяют условиям предложенной теоремы.

Ключевые слова: бесконечная система, предел решения, лимитанты, ортотропная пластина

1. Введение

Закон асимптотических выражений был сформулирован и доказан Б. М. Кояловичем [3] в 1930 г. как итог его работы с И. Г. Бубновым над парной бесконечной системой, возникающей в задаче изгиба прямоугольной пластины под действием гидростатического давления. В [2] рассматривается приложение закона асимптотических выражений к задачам статики и динамики для прямоугольной призмы и конечного цилиндра. В [4] для парной бесконечной системы предлагается ослабленная формулировка, дающая возможность использовать признак для отыскания степенных асимптотик в системах, возникающих в ряде задач теории упругости [6]. В настоящей статье предлагается обобщение на случай бесконечной матрицы, задаваемой неотрицательным блоком произвольного порядка.

2. Регулярность и лимитанты

Рассмотрим бесконечную систему уравнений с неотрицательными коэффициентами и свободными членами, записанную в форме

$$x_m^i = \sum_{j=1}^{s} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^{ij} x_n^j + b_m^i \quad (m = 1, 2, \ldots; i = 1, 2, \ldots, s) \tag{2.1}$$

Блок бесконечной матрицы $A_{mn} = \{a_{mn}^{ij}\}_1^s$ — символическая матрица порядка s. Если $A_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & a_{mn}^{12} \\ a_{mn}^{21} & 0 \end{pmatrix}$, где $a_{mn}^{ij} > 0$ то для исследования асимптотических свойств решения бесконечной системы (2.1) можно применить признак в известной формулировке для парной системы, для других случаев результаты отсутствуют. Условия регулярности для системы (2.1) записываются следующим образом

$$\sum_{j=1}^{s}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^{ij} = 1 - \varphi_m^i < 1, \quad (m = 1, 2, \ldots; i = 1, 2, \ldots, s) \tag{2.2}$$

Далее предполагается, что у рассматриваемой бесконечной системы существует единственное ограниченное решение.

Оговорим расположение нулевых элементов в матрице A_{mn}, исключая случай расщепления системы на несколько. Для этого потребуем, чтобы направленный граф матрицы A_{mn} был сильно связан. Действительно, в этом случае для любого множества строк $I_k = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ $(1 \le k \le s-1)$ матрицы A_{mn} существует $a_{mn}^{ij} \ne 0$ при $i \in I_k$, $j \notin I_k$. Перед формулировкой и доказательством теоремы введем в рассмотрение лимитанты:

$$V_{s(m-1)+i}^{sN} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{s}\sum\limits_{n=1}^{N} a_{mn}^{ij} x_n^j + b_m^i}{\sum\limits_{j=1}^{s}\sum\limits_{n=1}^{N} a_{mn}^{ij} + \varphi_m^i}, \quad (m > N)$$

Пусть $H_N = \sup\limits_{m>N} V_{s(m-1)+i}^{sN}$, $h_N = \inf\limits_{m>N} V_{s(m-1)+i}^{sN}$ $\quad (i = 1, 2, \ldots, s)$, тогда для точных граней лимитант справедливы следующие утверждения [3]

1) основное свойство лимитант: $h_N \le x_m^i \le H_N, (m > N, i = 1, 2, \ldots, s)$;

2) свойство монотонности: $h_N \ge h_{N-1}$; $\quad H_N \le H_{N-1}$ $(N = 1, 2, \ldots)$.

Из свойства монотонности, в силу ограниченности решения (2.1), получаем существование

$$\lim_{N\to\infty} h_N = h, \ \lim_{N\to\infty} H_N = H.$$

3. Обобщение закона асимптотических выражений

Теорема 1. *Если в каждой i-ой строке матрицы A_{mn} все ненулевые элементы допускают оценку при $n < m$:*

$$l r_n^i \le a_{mn}^{ij} \xi_m^i \le L r_n^i, \ (L \ge l > 0), \tag{3.1}$$

где последовательности ξ_m^i, r_n^i таковы, что $\exists\ P > 0$: $b_m^i \xi_m^i \le P$, $\varphi_m^i \xi_m^i \le P$; $\lim\limits_{N\to\infty} \left(\sum\limits_{n=1}^{N} r_n^i\right)^{-1} = 0$; $\xi_m^i = O(\sum\limits_{n=1}^{m-1} r_n^i)$, при $m \to \infty$.

Тогда существует общий ненулевой предел

$$\lim_{m\to\infty} x_m^i = G > 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Доказательство. Доказательство теоремы проведем в два этапа. На первом докажем, что $h > 0$; на втором $H = h$.

1. В силу монотонности h_N достаточно показать, что найдется $N^* : h_{N^*} > 0$. Пусть свободные члены системы (2.1) таковы, что $b^{i_0}_{m_0} > 0$. Так как единственное решение системы совпадает с главным (которое неотрицательно), то $x^{i_0}_{m_0} > 0$. Разобьем теперь множество номеров $\{1, 2, \ldots, s\} = I_0 \cup \overline{I_0}$, $(\overline{I_0} = \{i_0\})$. Так как направленный граф матрицы A_{mn} сильно связан, то существует номер $i_1 \in I_0$ для которого $a^{i_1 i_0}_{mn} > 0$. Тогда из (3.1) следует, что существует номер $m_1 > m_0$: $a^{i_1 i_0}_{m_1 m_0} x^{i_0}_{m_0} > 0$, а значит $x^{i_1}_{m_1} > 0$. Далее определяем как $\overline{I_1} = \{i_0, i_1\}$, тогда существует $a^{i_2 j}_{mn} > 0, (i_2 \in I_1, j \in \overline{I_1})$. Из оценки (3.1) следует, что найдется $m_2 > m_1$: $a^{i_2 i_p}_{m_2 m_p} x^{i_p}_{m_p} > 0$ $(p = 0, 1)$, откуда $x^{i_2}_{m_2} > 0$ и т. д. Продолжая, получаем, что $x^{i_p}_{m_p} > 0$ $(p = 0, 1, \ldots, s-1)$, при этом $\bigcup\limits_{p=0}^{s-1} i_p = \{1, 2, \ldots, s\}, \quad m_0 < m_1 < \cdots < m_{s-1}$. Оценим лимитанты $V^{sN}_{s(m-1)+i}$ при $m > N^* > m_{s-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ снизу:

$$V^{sN^*}_{s(m-1)+i} \geq \frac{l \sum\limits_{j\in\Omega(i)} \sum\limits_{n=1}^{N^*} r^i_n x^j_n}{L \sum\limits_{j\in\Omega(i)} \sum\limits_{n=1}^{N^*} r^i_n + P} \geq \frac{l r^i_{m_{p^*}} \min\limits_p x^{i_p}_{m_p}}{Ls \sum\limits_{n=1}^{N^*} r^i_n + P} > 0,$$

($\Omega(i)$ — множество номеров столбцов ненулевых элементов i -ой строки A_{mn}).

Существование $p^* = p^*(i)$ обеспечивается тем, что для любой строки i матрицы A_{mn} найдется хотя бы один ненулевой элемент. Тогда нижняя грань $h_{N^*} > 0$.

2. Рассмотрим верхние грани $H_{N_1} \leq H_{N_0}$. Пусть H_{N_1} достигается на $V^{sN_1}_{s(m^*-1)+i^*}$, если sup достигается в точке сгущения, то m^* и i^* можно выбрать конечными и такими, что значение отличается от H_{N_1} на величину пренебрежимо малую по сравнению с величинами, участвующими в дальнейших оценках.

Представим в виде разности $V^{sN_1}_{s(m-1)+i} = D(m,i) - \eta(m,i)(m > N_1)$, где

$$D(m,i) = \frac{\sum\limits_{j\in\Omega(i)} \sum\limits_{n=1}^{N_0} a^{ij}_{mn} x^j_n + b^j_m + H_{N_0} \sum\limits_{j\in\Omega(i)} \sum\limits_{n=N_0+1}^{N_1} a^{ij}_{mn}}{\sum\limits_{j\in\Omega(i)} \sum\limits_{n=1}^{N_1} a^{ij}_{mn} + \varphi^i_m}, \tag{3.2}$$

$$\eta(m,i) = \frac{\sum\limits_{j\in\Omega(i)} \sum\limits_{n=N_0+1}^{N_1} a^{ij}_{mn}(H_{N_0} - x^j_n)}{\sum\limits_{j\in\Omega(i)} \sum\limits_{n=1}^{N_1} a^{ij}_{mn} + \varphi^i_m}. \tag{3.3}$$

Представление (3.2) дает оценку: $D(m,i) \leq H_{N_0}$. Тогда из неравенства

$$H_{N_1} = D(m^*, i^*) - \eta(m^*, i^*) \leq H_{N_0} - \eta(m^*, i^*),$$

находим, что
$$\eta(m^*,i^*) \leq H_{N_0} - H_{N_1} \leq H_{N_0} - H \leq \varepsilon(N_0). \tag{3.4}$$
Из (3.4) можно получить следующую оценку:
$$\varepsilon(N_0) \geq \eta(m^*,i^*) \geq \frac{l \sum\limits_{j\in\Omega(i^*)} \sum\limits_{n=N_0+1}^{N_1} r_n^{i^*}(H_{N_0} - x_n^j)}{P + L \sum\limits_{j\in\Omega(i^*)} \sum\limits_{n=1}^{N_1} r_n^{i^*}}. \tag{3.5}$$
Откуда
$$\frac{\sum\limits_{j\in\Omega(i^*)} \sum\limits_{n=N_0+1}^{N_1} r_n^{i^*}(H_{N_0} - x_n^j)}{\sum\limits_{j\in\Omega(i^*)} \sum\limits_{n=1}^{N_1} r_n^{i^*}} \leq \frac{\varepsilon(N_0)}{l}(L + \frac{P}{\min\limits_{i=1,2,\ldots,s} r_1^i}).$$
Используя последнее неравенство, можно оценить $\eta(m,i^*)$ сверху:
$$\eta(m,i^*) \leq \frac{L \sum\limits_{j\in\Omega(i^*)} \sum\limits_{n=N_0+1}^{N_1} r_n^{i^*}(H_{N_0} - x_n^j)}{l \sum\limits_{j\in\Omega(i^*)} \sum\limits_{n=1}^{N_1} r_n^{i^*}} \leq \frac{L}{l^2}\varepsilon(N_0)(L + \frac{P}{\min\limits_{i=1,2,\ldots,s} r_1^i}).$$
Получаем, что величина $\eta(m,i^*)$ является бесконечно малой вне зависимости от N_1.

Оценим теперь $D(m,i^*)$, поделив числитель и знаменатель дроби на выражение $\sum\limits_{j\in\Omega(i^*)} \sum\limits_{n=N_0+1}^{N_1} a_{mn}^{i^*j}$. Знаменатель этой дроби можно сделать сколь угодно близким к единице соответствующим выбором N_1:
$$1 \leq 1 + \frac{\sum\limits_{j\in\Omega(i^*)} \sum\limits_{n=1}^{N_0} a_{mn}^{i^*j} + \varphi_m^{i^*}}{\sum\limits_{j\in\Omega(i^*)} \sum\limits_{n=N_0+1}^{N_1} a_{mn}^{i^*j}} \leq 1 + \frac{sL \sum\limits_{n=1}^{N_0} r_n^{i^*} + P}{l \sum\limits_{n=N_0+1}^{N_1} r_n^{i^*}} \leq 1 + \varepsilon_1(N_1),$$
а числитель $D(m,i^*)$ — к H_{N_0}. Значит,
$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon : m > N > N_\varepsilon :\ |V_{s(m-1)+i^*}^{sN} - H| < \varepsilon. \tag{3.6}$$
Если при некотором N_1 inf достигается на лимитанте $V_{s(m'-1)+i'}^{sN_1}$, то подобным же образом можно показать, что
$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \colon m > N > N_\varepsilon :\ |V_{s(m-1)+i'}^{sN} - h| < \varepsilon. \tag{3.7}$$

В случае $s = 1$ (нулевые элементы отсутствуют) $i^* \equiv i'$, и, в силу единственности предела, $H = h$, что доказывает теорему в общем случае $i^* \neq i'$ и $H - h > 0$.

Из монотонности граней лимитант следует, что $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N > N_\varepsilon :$

$$h_N \geq h - \varepsilon, H_N \leq H + \varepsilon.$$

При этом из основного свойства лимитант следует $h - \varepsilon \leq x_m^i \leq H + \varepsilon$, $(m > N;$ $i = 1, 2, \ldots, s)$. Из (3.6) получаем, что при $m = N + 1$ справедлива оценка:

$$H - \varepsilon \leq V_{s(m-1)+i^*}^{s(m-1)} \leq H + \varepsilon.$$

Используя последние неравенства найдем при $m > N$ нижнюю оценку для $x_m^{i^*}$:

$$x_m^{i^*} = \sum_{j\in\Omega(i^*)} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^{i^*j} x_n^j + b_m^{i^*} \equiv V_{s(m-1)+i^*}^{s(m-1)} \left(\sum_{j\in\Omega(i^*)} \sum_{n=1}^{m-1} a_{mn}^{i^*j} + \varphi_m^{i^*} \right) +$$

$$+ \sum_{j\in\Omega(i^*)} \sum_{n=m}^{\infty} a_{mn}^{i^*j} x_n^j \geq (H - \varepsilon) \left(\sum_{j\in\Omega(i^*)} \sum_{n=1}^{m-1} a_{mn}^{i*j} + \varphi_m^{i^*} \right) +$$

$$+ (h - \varepsilon) \sum_{j\in\Omega(i^*)} \sum_{n=m}^{\infty} a_{mn}^{i^*j} = h - \varepsilon + (H - h) \left(\sum_{j\in\Omega(i^*)} \sum_{n=1}^{m-1} a_{mn}^{i^*j} + \varphi_m^{i^*} \right) \geq$$

$$\geq h - \varepsilon + \frac{(H-h)l}{\xi_m^{i^*}} \sum_{n=1}^{m-1} r_n^{i^*}.$$

Из условия теоремы следует, что найдется $N = N(i)$ такой, что при $m > N(i)$: $\xi_m^i \leq C_i \sum\limits_{n=1}^{m-1} r_n^i$. Если положить $N > \max\limits_{i=1,2,\ldots,s} N(i)$ и $\delta \leq \min\limits_{i=1,2,\ldots,s} (C_i)^{-1}$, получаем для $m > N$:

$$\frac{1}{\xi_m^i} \sum_{n=1}^{m-1} r_n^i \geq \delta > 0, (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Тогда оценка $x_m^{i^*}$ принимает вид:

$$x_m^{i^*} \geq h - \varepsilon + (H - h)l\delta,\ (m > N). \tag{3.8}$$

Обозначим $\overline{U_0} = \{i^*\},\ U_0 = \{1, 2, \ldots, s\} \setminus \{i^*\}$, тогда существует элемент $a_{mn}^{i_1 i^*} > 0$ $(i_1 \in U_0)$. Оценим снизу лимитант $V_{s(m-1)+i_1}^{sN_1}$ при некотором $N_1 > N$, для этого представим лимитант в виде:

$$V^{sN_1}_{s(m-1)+i_1} = \frac{\sum\limits_{j\in\Omega(i_1)} \sum\limits_{n=1}^{N} a^{i_1 j}_{mn} x^j_n + b^{i_1}_m + (h-\varepsilon) \sum\limits_{j\in\Omega(i_1)} \sum\limits_{n=N+1}^{N_1} a^{i_1 j}_{mn}}{\sum\limits_{j\in\Omega(i_1)} \sum\limits_{n=1}^{N_1} a^{i_1 j}_{mn} + \varphi^{i_1}_m} + \\ + \frac{\sum\limits_{j\in\Omega(i_1)} \sum\limits_{n=N+1}^{N_1} a^{i_1 j}_{mn}(x^j_n - h + \varepsilon)}{\sum\limits_{j\in\Omega(i_1)} \sum\limits_{n=1}^{N_1} a^{i_1 j}_{mn} + \varphi^{i_1}_m};$$

Из этого представления можно заметить на основе (3.8), что

$$V^{sN_1}_{s(m-1)+i_1} \geq h - \varepsilon + \frac{\sum\limits_{j\in\Omega(i_1)} \sum\limits_{n=N+1}^{N_1} a^{i_1 j}_{mn}(x^j_n - h + \varepsilon)}{\sum\limits_{j\in\Omega(i_1)} \sum\limits_{n=1}^{N_1} a^{i_1 j}_{mn} + \varphi^{i_1}_m} \geq \\ \geq h - \varepsilon + \frac{\sum\limits_{n=N+1}^{N_1} a^{i_1 i*}_{mn}(x^{i*}_n - h + \varepsilon)}{\sum\limits_{j\in\Omega(i_1)} \sum\limits_{n=1}^{N_1} a^{i_1 j}_{mn} + \varphi^{i_1}_m} \geq h - \varepsilon + \frac{(H-h) l\delta \sum\limits_{n=N+1}^{N_1} a^{i_1 i^*}_{mn}}{\sum\limits_{j\in\Omega(i_1)} \sum\limits_{n=1}^{N_1} a^{i_1 j}_{mn} + \varphi^{i_1}_m}.$$

По условию теоремы r^i_n таковы, что можно выбрать номер N_1 $(m > N_1)$:

$$\frac{\sum\limits_{n=N+1}^{N_1} a^{i_1 i^*}_{mn}}{\sum\limits_{j\in\Omega(i_1)} \sum\limits_{n=1}^{N_1} a^{i_1 j}_{mn} + \varphi^{i_1}_m} \geq \frac{l \sum\limits_{n=N+1}^{N_1} r^{i_1}_n}{sL \sum\limits_{n=1}^{N_1} r^{i_1}_n + P} \geq \theta > 0. \tag{3.9}$$

Здесь, $\theta < 1$ — некоторая постоянная, существование которой обеспечивается тем, что предел последней дроби в (3.9) равен l/sL . Таким образом,

$$V^{sN_1}_{s(m-1)+i_1} \geq h - \varepsilon + (H-h) l\delta\theta, \tag{3.10}$$

в частности, эта оценка верна при $m = N_1 + 1$, то есть $V^{s(m-1)}_{s(m-1)+i_1} \geq h - \varepsilon + (H-h) l\delta\theta$.

Оценим $x_m^{i_1} \quad (m > N_1)$ снизу:

$$x_m^{i_1} = \sum_{j\in\Omega(i_1)} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^{i_1 j} x_n^j + b_m^{i_1} = V_{s(m-1)+i_1}^{s(m-1)} \left(\sum_{j\in\Omega(i_1)} \sum_{n=1}^{m-1} a_{mn}^{i_1 j} + \varphi_m^{i_1} \right) +$$
$$+ \sum_{j\in\Omega(i_1)} \sum_{n=m}^{\infty} a_{mn}^{i_1 j} x_n^j \geq (h - \varepsilon + (H-h) l\delta\theta) \left(\sum_{j\in\Omega(i_1)} \sum_{n=1}^{m-1} a_{mn}^{i_1 j} + \varphi_m^{i_1} \right) +$$
$$+ (h-\varepsilon) \sum_{j\in\Omega(i_1)} \sum_{n=m}^{\infty} a_{mn}^{i_1 j} = h - \varepsilon + (H-h) l\delta\theta \left(\sum_{j\in\Omega(i_1)} \sum_{n=1}^{m-1} a_{mn}^{i_1 j} + \varphi_m^{i_1} \right) \geq$$
$$\geq h - \varepsilon + (H-h) l^2 \delta\theta \frac{1}{\xi_m^{i_1}} \sum_{n=1}^{m-1} r_n^{i_1} \geq h - \varepsilon + (H-h)(l\delta)^2\theta. \quad (3.11)$$

Пусть $\overline{U_1} = \{i^*, i_1\}$, так как δ можно выбрать таким, что $l\delta < 1$, то оценка для $x_m^{i_1}$ будет верна и для всех

$$x_m^i \geq h - \varepsilon + (H-h)(l\delta)^2\theta, \ i \in \overline{U_1}, \ m > N_1. \quad (3.12)$$

Из условия существует $i_2 \in U_1$, что $a_{mn}^{i_2 j} > 0$ $(j \in \overline{U_1})$. Строим, аналогично (3.10) оценку снизу для $V_{s(m-1)+i_2}^{sN_2}$, тогда найдется $N_2 > N_1$:

$$V_{s(m-1)+i_2}^{sN_2} \geq h - \varepsilon + (H-h)(l\delta\theta)^2. \quad (3.13)$$

Тогда, аналогично (3.11) получаем оценку для $x_m^{i_2} \quad (m > N_2)$:

$$x_m^{i_2} \geq h - \varepsilon + (H-h)(l\delta)^3\theta^2.$$

Пусть $\overline{U_p} = \{i^*, i_1, \ldots, i_p\}$, предположим, что справедливы оценки

$$x_m^i \geq h - \varepsilon + (H-h)(l\delta)^{p+1}\theta^p, \quad i \in \overline{U_p}, m > N_p \ (N_{p+1} \geq N_p), \quad (3.14)$$

$$V_{s(m-1)+i}^{sN_p} \geq h - \varepsilon + (H-h)(l\delta\theta)^p. \quad (3.15)$$

Тогда найдется $i_{p+1} \in U_p$, что $a_{mn}^{i_{p+1} i} > 0$ $(i \in \overline{U_p})$. Выбираем $N_{p+1} > N_p$ таким, что выполняется

$$V_{s(m-1)+i_{p+1}}^{sN_{p+1}} \geq h - \varepsilon + \frac{(H-h)(l\delta)^{p+1}\theta^p \sum\limits_{n=N_p+1}^{N_{p+1}} a_{mn}^{j_{p+1} i}}{\sum\limits_{j\in\Omega(i_{p+1})} \sum\limits_{n=1}^{N_{p+1}} a_{mn}^{i_{p+1} i} + \varphi_m^{i_{p+1}}} \geq h - \varepsilon + (H-h)(l\delta\theta)^{p+1}. \quad (3.16)$$

При $m > N_{p+1}$ из (3.16) следует $V_{s(m-1)+i_{p+1}}^{s(m-1)} \geq h - \varepsilon + (H-h)(l\delta\theta)^{p+1}$.

Оценим $x_m^{i_{p+1}}\quad (m>N_{p+1})$:

$$x_m^{i_{p+1}}=\sum_{j\in\Omega(i_{p+1})}\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}^{i_{p+1}j}x_n^j+b_m^{i_{p+1}}=$$
$$=V_{s(m-1)+i_{p+1}}^{s(m-1)}\left(\sum_{j\in\Omega(i_{p+1})}\sum_{n=1}^{m-1}a_{mn}^{i_{p+1}j}+\varphi_m^{i_{p+1}}\right)+\sum_{j\in\Omega(i_{p+1})}\sum_{n=m}^{\infty}a_{mn}^{i_{p+1}j}x_n^j\geq$$
$$\geq h-\varepsilon+(H-h)(l\delta\theta)^{p+1}\left(\sum_{j\in\Omega(i_{p+1})}\sum_{n=1}^{m-1}a_{mn}^{i_{p+1}j}+\varphi_m^{i_{p+1}}\right)\geq$$
$$\geq h-\varepsilon+(H-h)(l\delta)^{p+2}\theta^{p+1}.$$

Можно утверждать, согласно математической индукции, что при $p=s-1$; $\overline{U_{s-1}}=\{1,2,\ldots,s\}$ для $m>N_s-1$:

$$V_{s(m-1)+i}^{s(m-1)}\geq h-\varepsilon+(H-h)(l\delta\theta)^{s-1},\ (i=1,2,\ldots,s).$$

При достаточно малом ε $V_{s(m-1)+i}^{s(m-1)}$ оказывается вне ε-окрестности h, в том числе и для i', для которого выполняется (3.7). Указанное противоречие доказывает, что пределы точных граней лимитант совпадают $H=h$, в силу основного свойства лимитант получаем утверждение теоремы. $\square$

Замечание 1. Бесконечная система (2.1), удовлетворяющая условиям теоремы, не является вполне регулярной, то есть

$$\lim_{m\to 0}\varphi_m^i=0,\quad (i=1,2,\ldots,s)\tag{3.17}$$

Действительно, из условий регулярности (2.2) следует, что

$$\varphi_m^i+\sum_{j=1}^{s}\sum_{n=1}^{N}a_{mn}^{ij}<1,$$

тогда из (3.1) и $\varphi_m^i\xi_m^i\leq P$:

$$\varphi_m^i\equiv\frac{\xi_m^i\varphi_m^i\left(\varphi_m^i+\sum\limits_{j=1}^{s}\sum\limits_{n=1}^{N}a_{mn}^{ij}\right)}{\xi_m^i\varphi_m^i+\sum\limits_{j=1}^{s}\sum\limits_{n=1}^{N}\xi_m^i a_{mn}^{ij}}\leq\frac{P}{l\sum\limits_{n=1}^{N}r_n^i},$$

учитывая условие $\lim\limits_{N\to\infty}\left(\sum\limits_{n=1}^{N}r_n^i\right)^{-1}=0$, получаем равенство (3.17).

4. Собственные колебания ортотропной пластинки

В качестве примера рассмотрим собственные колебания тонкой прямоугольной ортотропной пластинки $(x, y) \in [-a; a] \times [-b, b]$ толщины h. Уравнение движения и граничные условия свободного края записываются при помощи четырех упругих констант:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{4.1}$$

где ρ — плотность, $D_x = \frac{E'_x h^3}{12}$; $D_y = \frac{E'_y h^3}{12}$; $H = D_1 + 2D_{xy}$; $D_1 = \frac{E'' h^3}{12}$; $D_{xy} = \frac{G h^3}{12}$;

$$x = \pm a : D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; D_x \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (H + 2D_{xy}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0;$$

$$y = \pm b : D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; D_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (H + 2D_{xy}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0.$$

Общее решение уравнения (3.17) $w = W(x, y)e^{i\omega t}$ строим при помощи метода разделения переменных в форме рядов Фурье. Ниже представлено решение в случае симметричных по обеим осям колебаний:

$$\begin{gathered} W = A_0 \cos \sqrt[4]{E'_x/E'_y}\Omega y + B_0 \mathrm{ch} \sqrt[4]{E'_x/E'_y}\Omega y + C_0 \cos \Omega x + D_0 \mathrm{ch} \Omega x + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \mathrm{ch} \bar{p}_n y + B_n \mathrm{ch} p_n y) \cos \alpha_n x + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \mathrm{ch} \bar{q}_n x + D_n \mathrm{ch} q_n x) \cos \beta_n y \end{gathered} \tag{4.2}$$

где $\Omega^4 = \rho h \omega^2 / D_x$ — безразмерная частота колебаний,$\alpha_n = \pi n/a$; $\beta_n = \pi n/b$. Величины $p_n = p_{1n} + ip_{2n}$; $q_n = q_{1n} + iq_{2n}$ — решения биквадратных уравнений

$$\frac{E'_y}{E'_x} p^4 - 2\alpha_n^2 \frac{E'' + 2G}{E'_x} p^2 + \alpha_n^4 - \Omega^4 = 0; q^4 - 2\beta_n^2 \frac{E'' + 2G}{E'_x} q^2 + \frac{E'_y}{E'_x} \beta_n^4 - \Omega^4 = 0.$$

Раскладывая входящие функции в ряды Фурье, из равенств при базисных функциях получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{gathered} x_0 a\Omega(\mathrm{ctg}\Omega a + \mathrm{cth}\Omega a) + y_0 \frac{2E''}{E'_x} \sqrt[4]{\frac{E'_x}{E'_y}} = \sqrt{\frac{E'_x}{E'_y}} \frac{E''\Omega^4}{E'_y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{p_n^2 \bar{p}_n^2}; \\ y_0 b\Omega \sqrt{\frac{E'_x}{E'_y}} \left(\mathrm{ctg} \sqrt[4]{\frac{E'_x}{E'_y}} \Omega b + \mathrm{cth} \sqrt[4]{\frac{E'_x}{E'_y}} \Omega b \right) + x_0 \frac{2E''}{E'_y} = \frac{E''\Omega^4}{E'_y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{q_n^2 \bar{q}_n^2}; \\ x_m \Delta_m^x = \sqrt[4]{\frac{E'_x}{E'_y}} \frac{4\Omega^4 E''}{E'_y \beta_m^4 - E'_x \Omega^4} y_0 + 2\sqrt{\frac{E'_y}{E'_x}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{E''(E''+4G)}{E'_x E'_y}\right) \beta_m^2 \alpha_n^2 + \frac{E''}{E'_y}\Omega^4}{\alpha_n^4 + \frac{2E''+4G}{E'_x}\beta_m^2 \alpha_n^2 + \frac{E'_y}{E'_x}\beta_m^4 - \Omega^4} y_n \\ y_m \Delta_m^y = \sqrt{\frac{E'_y}{E'_x}} \frac{4\Omega^4 E''}{E'_y(\alpha_m^4 - \Omega^4)} y_0 + 2\sqrt{\frac{E'_x}{E'_y}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{E''(E''+4G)}{E'_x E'_y}\right) \beta_n^2 \alpha_m^2 + \frac{E''}{E'_y}\Omega^4}{\beta_n^4 + \frac{2E''+4G}{E'_y}\beta_n^2 \alpha_m^2 + \frac{E'_x}{E'_y}(\alpha_m^4 - \Omega^4)} x_n, \end{gathered} \tag{4.3}$$

где

$$x_0 = C_0\Omega\frac{\sin\Omega a}{a};\quad x_n = \frac{E'_x(-1)^n C_n\bar{q}_n(q_n^2-\bar{q}_n^2)\mathrm{sh}\bar{q}_n a}{a((E''+4G)\beta_n^2 - E'_x q_n^2)};$$

$$y_0 = A_0\Omega\frac{\sin\sqrt[4]{\frac{E'_x}{E'_y}}\Omega b}{b};\quad y_n = \frac{(E'_y)^{3/2}(-1)^n A_n\bar{p}_n(p_n^2-\bar{p}_n^2)\mathrm{sh}\bar{p}_n a}{\sqrt{E'_x}b((E''+4G)\alpha_n^2 - E'_y p_n^2)};$$

$$\Delta_m^x = \frac{a}{q_m\bar{q}_m(q_m^2-\bar{q}_m^2)}\left[\bar{q}_m\left(q_m^2 - \frac{E''}{E'_x}\beta_m^2\right)\left(\frac{E''+4G}{E'_x}\beta_m^2 - \bar{q}_m^2\right)\mathrm{cth}q_m a - q_m\left(\bar{q}_m^2 - \frac{E''}{E'_x}\beta_m^2\right)\left(\frac{E''+4G}{E'_x}\beta_m^2 - q_m^2\right)\mathrm{cth}\bar{q}_m a\right];$$

$$\Delta_m^y = \frac{b}{p_m\bar{p}_m(p_m^2-\bar{p}_m^2)}\left[\bar{p}_m\left(p_m^2 - \frac{E''}{E'_y}\alpha_m^2\right)\left(\frac{E''+4G}{E'_y}\alpha_m^2 - \bar{p}_m^2\right)\mathrm{cth}p_m b - p_m\left(\bar{p}_m^2 - \frac{E''}{E'_y}\alpha_m^2\right)\left(\frac{E''+4G}{E'_y}\alpha_m^2 - p_m^2\right)\mathrm{cth}\bar{p}_m b\right].$$

Можно показать, что система (4.3) квазирегулярна, то есть для нее выполняются условия регулярности (2.2) начиная с некоторого номера N_R, так как

$$\lim_{m\to\infty}(1-\varphi_m^1) = \lim_{m\to\infty}(1-\varphi_m^2) = \frac{E'_xE'_y - E''^2 - 4GE''}{E'_xE'_y - E''^2 + 4G\sqrt{E'_xE'_y}} < 1.$$

Исследование (4.3) можно свести [6] к регулярным системам, для этого представим как линейную комбинацию первых N_R неизвестных остальные неизвестные ($X_1 = x_0, X_2 = y_0, X_{2m+1} = x_m, X_{2m+2} = y_m$):

$$X_m = \sum_{j=1}^{N_R}\xi_m^j X_j \quad (m > N_R), \tag{4.4}$$

получаем, после подстановки (4.4) в (4.3) при $m > N_R$, совокупность бесконечных систем относительно $\{\xi_m^j\}$ (M_{mn} — элемент бесконечной матрицы (4.3))

$$\xi_m^j = \sum_{n=N_R+1}^{\infty} M_{mn}\xi_n^j + M_{mj} \quad (m > N_R; j = 1, 2, \ldots, N_R). \tag{4.5}$$

Системы (4.5) в силу квазирегулярности исходной системы (4.3) будут вполне регулярными, что означает для них существование единственного ограниченного решения. Первые неизвестные определяются из конечной однородной системы

$$X_m = \sum_{n=1}^{N_R}(M_{mn} + \sum_{j=N_R+1}^{\infty} M_{mj}\xi_j^n)X_n \quad (m = 1, 2, \ldots, N_R) \tag{4.6}$$

Система (4.6) на собственных частотах Ω^* имеет нетривиальное решение, которое позволяет построить собственные формы пластины. Таким образом, равенство нулю определителя системы (4.6) может выступать в роли дисперсионного уравнения для определения собственных частот пластины. Эффективность представленного подхода оказывается напрямую связанной с точностью решения регулярных систем (4.5).

Приведем при помощи замены переменных

$$Z^j_{2m+1} = \frac{\xi^j_{2m+1}\beta_m^{2+\lambda}}{(E'_x)^{1/2+\lambda/4}}; \quad Z^j_{2m+2} = \frac{\xi^j_{2m+2}\alpha_m^{2+\lambda}}{(E'_y)^{1/2+\lambda/4}} \quad (m > N_r; N_r = [N_R/2] - 1)$$

системы (4.5) к виду

$$\begin{cases} Z^j_{2m+1} = \frac{2}{\Delta^x_m}\left(\frac{E'_y}{E'_x}\right)^{1+\frac{\lambda}{4}} \sum\limits_{n=N_r+1}^{\infty}\left(\frac{\beta_m}{\alpha_n}\right)^{2+\lambda} \frac{\left(1-\frac{E''(E''+4G)}{E'_xE'_y}\right)\beta_m^2\alpha_n^2+\frac{E''}{E'_y}\Omega^4}{\alpha_n^4+\frac{2E''+4G}{E'_x}\beta_m^2\alpha_n^2+\frac{E'_y}{E'_x}\beta_m^4-\Omega^4} Z^j_{2n+2}+ \\ +\frac{\beta_m^{2+\lambda}M_{2m+1,j}}{(E'_x)^{1/2+\lambda/4}}; \\ Z^j_{2m+2} = \frac{2}{\Delta^y_m}\left(\frac{E'_x}{E'_y}\right)^{1+\frac{\lambda}{4}} \sum\limits_{n=N_r+1}^{\infty}\left(\frac{\alpha_m}{\beta_n}\right)^{2+\lambda} \frac{\left(1-\frac{E''(E''+4G)}{E'_xE'_y}\right)\beta_n^2\alpha_m^2+\frac{E''}{E'_y}\Omega^4}{\beta_n^4+\frac{2E''+4G}{E'_y}\beta_n^2\alpha_m^2+\frac{E'_x}{E'_y}(\alpha_m^4-\Omega^4)} Z^j_{2n+1}+ \\ +\frac{\alpha_m^{2+\lambda}M_{2m+2,j}}{(E'_y)^{1/2+\lambda/4}}; (m > N_r) \end{cases} \tag{4.7}$$

Выбрав достаточно большим N_R в разложении (4.4), всегда можно добиться неотрицательности коэффициентов (4.7). Неопределенный коэффициент λ находится из условия, чтобы для (4.7) последовательности из условий регулярности (2.2) стремились к нулю (3.17). Суммируя ряды в условиях регулярности по формуле Эйлера-Маклорена и переходя к пределу, получаем равенство:

$$\varphi^i_m = 1 - f(\lambda) + O(m^{\lambda-1}),$$

где

$$f(\lambda) = \frac{\sqrt[4]{4E'_xE'_y}(E'_xE'_y - E''^2 - 4E''G)}{\sqrt{\sqrt{E'_xE'_y} - E'' - 2G}(E'_xE'_y - E''^2 + 4G\sqrt{E'_xE'_y})}\times$$
$$\times\frac{\sin\left(\frac{\lambda+1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{E'_xE'_y-(E''+2G)^2}{(E''+2G)^2}}\right)}{\cos\frac{\pi\lambda}{2}}.$$

Уравнение для определения λ имеет вид: $f(\lambda) = 1$, данное уравнение имеет единственный корень на $\lambda \in [0, 1)$ для всех значений упругих постоянных.

Положив $\xi^1_m = \xi^2_m = m^{1-\lambda}$ и $r^1_n = r^2_n = n^{-\lambda}$, можно увидеть, что для системы (4.7) выполняются все требуемые теоремой оценки, единственность решения следует из теоремы П. С. Бондаренко [1]. Таким образом, справедливо

$$\lim_{m\to\infty} Z^j_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} Z^j_{2m+2} = \tilde{G}_j.$$

Наличие положительного предела у решений (4.7) позволяет использовать для двусторонних оценок первых неизвестных и предельного значения, метод предельных лимитант [5] и получить нетривиальное решение (4.3) на собственной частоте колебаний с требуемой точностью. Так для квадратной пластинки из пятислойной кленовой фанеры ($a = b = 1; E'_x = 131;\ E'_y = 42;\ E'' = 5,1;\ G = 11,1$ в единицах $10^3\ kg/cm^2$) была найдена первая собственная частота пластины $\Omega_1^* = 1,77737$ как нуль определителя конечной системы (4.6). На данной собственной частоте $N_R(\Omega_1^*) = 2$, то есть только два первых уравнения (4.3) не являются регулярными. Ниже представлены данные оценки при удержании в конечных системах метода лимитант 200 уравнений:

$0,002331 \le Z_3^1 \le 0,002331$	$0,040867 \le Z_3^2 \le 0,040867$
$0,014317 \le Z_4^1 \le 0,014317$	$0,014441 \le Z_4^2 \le 0,014441$
$0,005135 \le Z_5^1 \le 0,005135$	$0,010399 \le Z_5^2 \le 0,010399$
$0,004344 \le Z_{200}^1 \le 0,004353$	$0,012368 \le Z_{200}^2 \le 0,012397$
$0,004345 \le \tilde{G}_1 \le 0,004389$	$0,012254 \le \tilde{G}_2 \le 0,012407$

Нетривиальное решение системы (4.6) $X_1 = 1; X_2 = -14,5957$ позволяет по формулам (4.4) найти все оставшиеся компоненты нетривиального решения квазирегулярной бесконечной системы (4.3). Учитывая, что для данного примера значение $\lambda = 0,414002$ из (4.4) для исходных неизвестных следует асимптотическая формула:

$$x_m \approx \frac{G_\lambda (E'_x)^{1/2+\lambda/4}}{\beta_m^{2+\lambda}},\ y_m \approx \frac{G_\lambda (E'_y)^{1/2+\lambda/4}}{\alpha_m^{2+\lambda}} \quad (m \to \infty),$$

где $G_\lambda = \sum_{j=1}^{N_R} X_j \tilde{G}_j$.

5. Заключение

Представленное обобщение закона асимптотических выражений, благодаря введенным в условие последовательностям r_n^i, позволят использовать теорему для исследования степенных асимптотик квазирегулярных бесконечных систем, возникающих в задачах динамики и статики упругого тела, в том числе и для задач на собственные значения.

Список цитируемых источников

1. *Бондаренко П. С.* К вопросу о единственности для бесконечных систем линейных уравнений // Мат. Сборник — 1951. — 29, № 2 . — С. 403 - 418.
2. *Гринченко В. Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. —Киев: Наук. думка, 1978. — 264с.

3. *Коялович Б. М.* Исследование о бесконечных системах линейных алгебраических уравнений.//-Изв. Физ.-мат. ин-та им. В.А. Стеклова. — 1930.- №3.- С.41-167.
4. *Папков С. О. , Чехов В. Н.* Про існування ненульової границі для розв'язку парної нескінченної системи алгебраїчних рівнянь // Вісник ЗДУ — 2000.— №1. —- С. 78 - 85.
5. *Чехов В. Н. , Пан А. В.* Про граничні вирази лімітант Кояловича // Доповіді НАН України — 2007.—№3.—-С. 31-36.
6. *Папков С. О.* Планарные колебания прямоугольной пластины в случае первой основной граничной задачи // Динамические системы — т.1. (29), №1. 2011. — С.41-51.

Получена 05.12.2011