

УДК 539.3

К вопросу о построении системы базисных функций для решения задач о геометрически нелинейных колебаниях многослойных пологих оболочек

Л. В. Курпа, Г. Н. Тимченко, Н. А. Будников

Национальный технический университет "Харьковский политехнический институт
Харьков, 61002. E-mail: *L.Kurpa@mail.ru*

Аннотация. В настоящей работе впервые построены структуры решения, удовлетворяющие граничным условиям скользящей заделки и скользящего шарнира для оболочек симметричного строения со сложной формой плана. Эти структурные формулы являются базой для построения системы координатных функций, необходимых для решения задач о геометрически нелинейных колебаниях многослойных пологих оболочек. Выполнено исследование вынужденных нелинейных колебаний пятислойных пологих оболочек сложной формы с использованием полученных структур решения.

Ключевые слова: нелинейные колебания, многослойные пологие оболочки, теория R-функций, структуры решения.

1. Введение

Исследованию линейных и геометрически нелинейных колебаний многослойных пологих оболочек и пластин посвящено большое количество работ. Достаточно полный обзор существующих работ по данной тематике за последние годы выполнен, например, в статьях [5–7]. Как следует из обзора, одним из наиболее распространенных методов решения данного класса задач является метод конечных элементов (МКЭ). В работах [1–3] был предложен альтернативный численно-аналитический подход, базирующийся на использовании теории R-функций. Этот метод позволяет исследовать геометрически нелинейные колебания многослойных пологих оболочек со сложной формой плана. Что же касается различных видов граничных условий, то предложенный метод предполагает знание системы координатных функций, удовлетворяющих заданным граничным условиям. Ранее были построены системы координатных функций, удовлетворяющие только кинематическим граничным условиям. В настоящей работе построены новые структуры решения, с помощью которых легко могут быть получены системы координатных функций, удовлетворяющие всем граничным условиям, соответствующим условиям скользящей заделки и скользящего шарнира.

2. Математическая постановка задачи о вынужденных нелинейных колебаниях многослойных пологих оболочек

Рассмотрим тонкую многослойную пологую оболочку симметричного строения, состоящую из n слоев постоянной толщины h . Предполагается, что проскальзывание между слоями отсутствует. Пусть срединная поверхность оболочки отнесена к прямоугольной системе координат, причем оси Ox и Oy совмещены с направлениями линий главных кривизн оболочки, а ось Oz направлена по нормали к срединной поверхности. Для постановки задачи воспользуемся классической геометрически нелинейной теорией [8], основывающейся на гипотезах Кирхгоффа-Лява. В операторной форме система уравнений движения оболочки имеет вид [3]:

$$\begin{cases} L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w = -Nl_1(w) + m_1\partial_{tt}u, \\ L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w = -Nl_2(w) + m_1\partial_{tt}v, \\ L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w = -Nl_3(u, v, w) + F(t) + m_1\partial_{tt}w. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь u , v и w — компоненты вектора перемещений $\{U\}$ в направлениях осей Ox , Oy и Oz соответственно. Величина m_1 , линейные дифференциальные операторы L_{ij} , $i, j = \overline{1, 3}$, и нелинейные дифференциальные операторы Nl_i , $i = \overline{1, 3}$ определяются так же, как и в работе [3]. Функция $F(t)$ представляет собой поперечную периодическую нагрузку. В настоящей работе она задана как:

$$F(t) = P_0 \cos \Omega t. \quad (2)$$

Система (1) дополняется соответствующими граничными условиями. В настоящей работе рассмотрим следующие виды граничных условий:

- скользящая заделка:

$$N_n = 0, \quad T_n = 0, \quad w = 0, \quad \partial_n w = 0, \quad (3)$$

- скользящий шарнир:

$$N_n = 0, \quad T_n = 0, \quad w = 0, \quad M_n = 0. \quad (4)$$

Выражения для N_n , M_n , T_n и v_n определяются известными формулами [8]:

$$N_n = N_{11}l^2 + N_{22}m^2 + 2N_{12}lm, \quad (5)$$

$$T_n = N_{12}(l^2 - m^2) + (N_{11} - N_{22})lm, \quad (6)$$

$$M_n = M_{11}l^2 + M_{22}m^2 + 2M_{12}lm, \quad (7)$$

где $l = \cos \alpha$, $m = \cos \beta = \sin \alpha$ — направляющие косинусы вектора внешней нормали к границе области.

Компоненты N_{ij} и $N_{ij}^{(N)}$ ($i, j = 1, 2$) вектора усилий $\{N\}$ и его нелинейной составляющей $\{N^{(N)}\}$ для оболочек симметричного строения в матричной форме определяются как:

$$\{N\} = \{N_{11}; N_{22}; N_{12}\}^T = [C] \{\varepsilon\}, \quad (8)$$

$$\{N^{(N)}\} = \{N_{11}^{(N)}; N_{22}^{(N)}; N_{12}^{(N)}\}^T = [C] \{\varepsilon^{(N)}\}. \quad (9)$$

Здесь:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11}; \varepsilon_{22}; \varepsilon_{12}\}^T, \quad (10)$$

$$\varepsilon_{11} = \partial_x u + k_1 w + \frac{1}{2} (\partial_x w)^2, \varepsilon_{22} = \partial_y v + k_2 w + \frac{1}{2} (\partial_y w)^2, \varepsilon_{12} = \partial_y u + \partial_x v + (\partial_x w \partial_y w),$$

$$\{\varepsilon^{(N)}\} = \left\{ \frac{1}{2} (\partial_x w)^2; \frac{1}{2} (\partial_y w)^2; (\partial_x w \partial_y w) \right\}^T.$$

Матрицы жесткости $[C]$ и $[D]$ имеют вид:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{bmatrix}, [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}.$$

Приведенные жесткостные характеристики C_{ij} , D_{ij} ($ij = 1, 2, 6$), имеют такое же представление, как и в [2,3].

Компоненты M_{ij} , $i, j = 1, 2$ вектора моментов $\{M\}$ определяются как:

$$\{M\} = \{M_{11}; M_{22}; M_{12}\}^T = [D] \{\chi\},$$

$$\{\chi\} = \{\chi_{11}; \chi_{22}; \chi_{12}\}^T = \{-\partial_{xx} w; -\partial_{yy} w; -2\partial_{xy} w\}^T.$$

Начальные условия были приняты в виде:

$$w|_{t=0} = w_{\max}, \quad \partial_t w|_{t=0} = 0.$$

3. Метод решения задачи

3.1. Решение линейной задачи.

Согласно методу, предложенному в [2,3], прежде всего необходимо найти решение соответствующей линейной задачи, т.е. задачи о свободных колебаниях многослойных пологих оболочек.

Как и в работе [1], решение линейной задачи выполняется с помощью вариационного метода Ритца. Согласно этому методу, необходимо построить системы координатных функций, удовлетворяющих граничным условиям (3)–(4). Для

получения системы координатных функций, построим необходимые структурные формулы, удовлетворяющие заданным граничным условиям.

Под *структурой решения* [4] краевой задачи понимается представление решения в виде:

$$\{U\} = \{B_k(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_j, \omega, \omega_i)\}.$$

Здесь B_k — операторы, вид которых зависит от типа граничных условий, $\omega(x, y) = 0$ — уравнение границы области, $\omega_i(x, y) = 0$ — уравнения отдельных участков границы области, $\Phi_j(x, y)$, $j = \overline{1, s}$ — неопределенные компоненты, выбранные таким образом, чтобы вектор-функция $\{U\}$ наиболее точно удовлетворяла заданной системе дифференциальных уравнений.

Для построения структурных формул, удовлетворяющих граничным условиям, содержащим производные по нормали, касательной или смешанные производные, в работе [4] были предложены следующие дифференциальные операторы:

$$D_m f(x, y) = (\nabla\omega, \nabla)^m f = (\partial_x\omega \partial_x + \partial_y\omega \partial_y)^m f,$$

$$T_m f(x, y) = (\partial_x\omega \partial_y - \partial_y\omega \partial_x)^m f,$$

$$D_1 T_1 f = \partial_x\omega \partial_y\omega (\partial_{yy}f - \partial_{xx}f) + ((\partial_x\omega)^2 - (\partial_y\omega)^2) \partial_{xy}f.$$

Заметим, что операторы $D_m f$, $T_m f$ и $D_1 T_1 f$ имеют смысл всюду в рассматриваемой области. А если функция $\omega(x, y)$ нормализована, т.е. удовлетворяет условиям:

$$\omega(x, y) \succ 0, \forall (x, y) \in \Omega, \omega(x, y)|_{\partial\Omega} = 0, \partial_n\omega|_{\partial\Omega} = 1,$$

то на границе эти операторы совпадают с производными по направлениям внутренней нормали и касательной, т.е.

$$D_m f(x, y) = \partial_n^m f, T_m f(x, y) = \partial_\tau^m f, D_1 T_1 f(x, y) = \partial_{n\tau} f(x, y), \forall (x, y) \in \partial\Omega. \quad (11)$$

В частности, операторы D_1 и T_1 обладают следующими свойствами:

$$D_1\omega = 1, T_1\omega = 0, \forall (x, y) \in \partial\Omega.$$

Использование таких операторов позволяет выполнять продолжение граничных условий внутрь области.

Ниже представим вывод структуры решения для условий *скользящей заделки* (3). Так как для оболочек симметричного строения граничные условия для перемещений u, v и прогиба w не связаны между собой, то вначале построим структуры решения, удовлетворяющие условиям

$$N_n = 0, T_n = 0. \quad (12)$$

Для линейной задачи нормальные N_n и касательные T_n усилия определяются формулами:

$$N_n = N_{11}^{(L)} l^2 + N_{22}^{(L)} m^2 + 2N_{12}^{(L)} lm, \quad (13)$$

$$T_n = N_{12}^{(L)} (l^2 - m^2) + \left(N_{11}^{(L)} - N_{22}^{(L)} \right) lm. \quad (14)$$

При этом, в силу граничных условий (3), для функции прогиба ($w = 0$) компоненты $N_{ij}^{(L)}$ будут определены как:

$$\left\{ N_{11}^{(L)}; N_{22}^{(L)}; N_{12}^{(L)} \right\}^T = [C] \{ \partial_x u; \partial_y v; \partial_y u + \partial_x v \}^T. \quad (15)$$

Учитывая эти соотношения, выразим функции N_n и T_n через производные по нормали n и касательной τ к границе области. Можно показать, что формулы (13) – (14) преобразуются к виду:

$$N_n = A_1^0 \partial_n u + B_1^0 \partial_\tau u + K_1^0 \partial_n v + L_1^0 \partial_\tau v,$$

$$T_n = A_2^0 \partial_n u + B_2^0 \partial_\tau u + K_2^0 \partial_n v + L_2^0 \partial_\tau v,$$

где

$$\begin{aligned} A_1^0 &= C_{11}l^3 + 3C_{16}l^2m + (C_{12} + 2C_{66})lm^2 + C_{26}m^3, \\ B_1^0 &= C_{16}l^3 + (2C_{66} - C_{11})l^2m + (C_{26} - 2C_{16})lm^2 - C_{12}m^3, \\ K_1^0 &= C_{16}l^3 + (C_{12} + 2C_{66})l^2m + 3C_{26}lm^2 + C_{22}m^3, \\ L_1^0 &= C_{12}l^3 + (2C_{26} - C_{16})l^2m + (C_{12} - 2C_{66})lm^2 - C_{26}m^3, \\ A_2^0 &= C_{16}l^3 + (C_{11} + C_{66} - C_{12})l^2m - C_{26}lm^2 - C_{66}m^3, \\ B_2^0 &= C_{66}l^3 - C_{26}l^2m - (C_{11} + C_{66} - C_{12})lm^2 + C_{16}m^3, \\ K_2^0 &= C_{66}l^3 + C_{16}l^2m + (C_{12} - C_{22} - C_{66})lm^2 - C_{26}m^3, \\ L_2^0 &= C_{26}l^3 + (C_{12} - C_{22} - C_{66})l^2m - C_{16}lm^2 + C_{66}m^3. \end{aligned}$$

Тогда граничные условия (3) для функций u и v можно записать в форме:

$$\begin{cases} A_1^0 \partial_n u + B_1^0 \partial_\tau u + K_1^0 \partial_n v + L_1^0 \partial_\tau v = 0, \\ A_2^0 \partial_n u + B_2^0 \partial_\tau u + K_2^0 \partial_n v + L_2^0 \partial_\tau v = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Как и в работе [4], построим продолжения функций $A_i^0, B_i^0, K_i^0, L_i^0, i = 1, 2$ внутрь области, используя свойства нормализованной функции ω :

$$l = -\partial_x \omega, m = -\partial_y \omega.$$

Тогда, учитывая свойства (11) дифференциальных операторов D_1 и T_1 , продолжение граничных условий (16) можно записать так:

$$\begin{cases} A_1 D_1 u + B_1 T_1 u + K_1 D_1 v + L_1 T_1 v = \omega \Psi_1, \\ A_2 D_1 u + B_2 T_1 u + K_2 D_1 v + L_2 T_1 v = \omega \Psi_2. \end{cases} \quad (17)$$

где

$$A_i = EC(A_i^0), B_i = EC(B_i^0), K_i = EC(K_i^0), L_i = EC(L_i^0), i = \overline{1, 2}.$$

Функции u и v будем искать в виде:

$$u = \Phi_1 + \omega \Phi_3, \quad v = \Phi_2 + \omega \Phi_4. \quad (18)$$

Подставляя (18) в (17) и используя свойства дифференциальных операторов D_1 и T_1 [4], преобразуем эту систему следующим образом:

$$\begin{cases} A_1 D_1 \Phi_1 + A_1 \Phi_3 + B_1 T_1 \Phi_1 + K_1 D_1 \Phi_2 + K_1 \Phi_4 + L_1 T_1 \Phi_2 = \omega \Psi_1, \\ A_2 D_1 \Phi_1 + A_2 \Phi_3 + B_2 T_1 \Phi_1 + K_2 D_1 \Phi_2 + K_2 \Phi_4 + L_2 T_1 \Phi_2 = \omega \Psi_2. \end{cases}$$

Введем обозначения:

$$R_1 = A_1 D_1 \Phi_1 + B_1 T_1 \Phi_1 + K_1 D_1 \Phi_2 + L_1 T_1 \Phi_2,$$

$$R_2 = A_2 D_1 \Phi_1 + B_2 T_1 \Phi_1 + K_2 D_1 \Phi_2 + L_2 T_1 \Phi_2,$$

$$P = A_1 K_2 - A_2 K_1,$$

$$P_1^{(u)} = B_1 K_2 - B_2 K_1, \quad P_2^{(u)} = L_1 K_2 - L_2 K_1,$$

$$P_1^{(v)} = A_1 L_2 - A_2 L_1, \quad P_2^{(v)} = A_1 B_2 - A_2 B_1.$$

Тогда из системы

$$\begin{cases} A_1 \Phi_3 + K_1 \Phi_4 = -R_1 + \omega \Psi_1, \\ A_2 \Phi_3 + K_2 \Phi_4 = -R_2 + \omega \Psi_2, \end{cases}$$

можно получить выражения для Φ_3 и Φ_4 :

$$\Phi_3 = \frac{1}{P} [(R_2 K_1 - R_1 K_2) + \omega \Psi_3], \quad \Phi_4 = \frac{1}{P} [(R_1 A_2 - R_2 A_1) + \omega \Psi_4]. \quad (19)$$

Подставляя соотношения (19) в (18), получим:

$$u = \Phi_1 - \frac{\omega}{P} [P D_1 \Phi_1 + P_1^{(u)} T_1 \Phi_1 + P_2^{(u)} T_1 \Phi_2] + \omega^2 \Psi_3, \quad (20)$$

$$v = \Phi_2 - \frac{\omega}{P} [P D_1 \Phi_2 + P_1^{(v)} T_1 \Phi_2 + P_2^{(v)} T_1 \Phi_1] + \omega^2 \Psi_4. \quad (21)$$

Здесь Ψ_3 и Ψ_4 — неопределенные компоненты, включающие Ψ_1 и Ψ_2 .

Очевидно, что выражения $\frac{\omega}{P}$ и $\frac{\omega P}{P^2 + \omega^2}$ совпадают на границе области. Однако знаменатель $P^2 + \omega^2 > 0$, $\forall (x, y) \in \Omega$. Поэтому далее будем использовать именно этот множитель. Тогда (20) и (21) примут вид:

$$u = \Phi_1 - \frac{\omega P}{P^2 + \omega^2} [P D_1 \Phi_1 + P_1^{(u)} T_1 \Phi_1 + P_2^{(u)} T_1 \Phi_2] + \omega^2 \Psi_3, \quad (22)$$

$$v = \Phi_2 - \frac{\omega P}{P^2 + \omega^2} [P D_1 \Phi_2 + P_1^{(v)} T_1 \Phi_2 + P_2^{(v)} T_1 \Phi_1] + \omega^2 \Psi_4. \quad (23)$$

Заметим, что если на границе области заданы неоднородные граничные условия

$$N_n = -F_1^0, T_n = -F_2^0,$$

то можно показать, что выражения для u и v будут иметь следующий вид:

$$u = \Phi_1 - \frac{\omega P}{P^2 + \omega^2} \left[PD_1\Phi_1 + P_1^{(u)}T_1\Phi_1 + P_2^{(u)}T_1\Phi_2 \right] + \frac{\omega P}{P^2 + \omega^2} (F_2K_1 - F_1K_2) + \omega^2\Psi_3, \quad (24)$$

$$v = \Phi_2 - \frac{\omega P}{P^2 + \omega^2} \left[PD_1\Phi_2 + P_1^{(v)}T_1\Phi_2 + P_2^{(v)}T_1\Phi_1 \right] + \frac{\omega P}{P^2 + \omega^2} (F_2A_1 - F_1A_2) + \omega^2\Psi_4, \quad (25)$$

где F_1 и F_2 – продолжения функций F_1^0 и F_2^0 , т.е. $F_i = EC(F_i^0)$.

Также легко убедиться, что если положить $\Psi_3 = \Psi_4 \equiv 0$, то при любом выборе неопределенных компонент Φ_1 и Φ_2 граничные условия (3) также будут выполняться. Поэтому при численной реализации обычно этими неопределенными компонентами пренебрегают.

Очевидно, что при выборе структуры решения для прогиба $w(x, y)$ в виде:

$$w = \omega^2\Phi_3, \quad (26)$$

граничные условия (3) для этой функции будут удовлетворены.

Для построения последовательностей координатных функций представим неопределенные компоненты структур решения в виде рядов по некоторым полным системам функций:

$$\Phi_1(x) = \sum_{i=1}^{N_1} a_i\varphi_i^{(1)}(x), \Phi_2(x) = \sum_{i=N_1+1}^{N_2} a_i\varphi_i^{(2)}(x), \Phi_3(x) = \sum_{i=N_2+1}^{N_3} a_i\varphi_i^{(3)}(x), \quad (27)$$

где $\{\varphi_i^{(k)}\}$ – некоторая полная система функций. В качестве полной системы функций могут быть выбраны, например, степенные полиномы, сплайны, полиномы Чебышева и т.д. Подставляя представление (27) в структурные формулы (24) – (26), получаем искомые системы координатных функций.

Коэффициенты $a_i, i = \overline{1, N_3}$ находятся из условия минимума соответствующего функционала.

Аналогично можно построить структурные формулы для условий (4) скользящего шарнира. При этом для функций u и v могут быть выбраны структуры решения (24) – (25), а для прогиба w следующая структура решения:

$$w = \omega \Phi_3 - \frac{\omega^2 S_1}{2(S_1^2 + \omega^2)} [S_1(2D_1\Phi_3 + \Phi_3D_2\omega) + 2S_2T_1\Phi_3 + S_3\Phi_3T_2\omega - \omega\Psi_5]. \quad (28)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 S_1 &= -D_{11} (\partial_x \omega)^4 - 4D_{16} (\partial_x \omega)^3 \partial_y \omega - 2(D_{12} + 2D_{66}) (\partial_x \omega)^2 (\partial_y \omega)^2 - \\
 &\quad - 4D_{26} \partial_x \omega (\partial_y \omega)^3 - D_{22} (\partial_y \omega)^4, \\
 S_2 &= -D_{16} (\partial_x \omega)^4 + (D_{11} - D_{12} - 2D_{66}) (\partial_x \omega)^3 \partial_y \omega + 3(D_{16} - D_{26}) (\partial_x \omega)^2 (\partial_y \omega)^2 + \\
 &\quad + (D_{12} - D_{22} + 2D_{26}) \partial_x \omega (\partial_y \omega)^3 + D_{26} (\partial_y \omega)^4, \\
 S_3 &= -D_{12} (\partial_x \omega)^4 + 2(D_{16} - D_{26}) (\partial_x \omega)^3 \partial_y \omega - (D_{11} + D_{22} - 4D_{66}) (\partial_x \omega)^2 (\partial_y \omega)^2 - \\
 &\quad - 2(D_{16} - D_{26}) \partial_x \omega (\partial_y \omega)^3 - D_{12} (\partial_y \omega)^4.
 \end{aligned}$$

3.2. Решение нелинейной задачи.

Неизвестные функции u, v, w будем искать в виде:

$$\begin{cases}
 u(x, y, t) = \sum_{i=1}^n y_i(t) \cdot u_i^{(c)}(x, y) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n y_i(t) \cdot y_j(t) \cdot u_{ij}(x, y), \\
 v(x, y, t) = \sum_{i=1}^n y_i(t) \cdot v_i^{(c)}(x, y) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n y_i(t) \cdot y_j(t) \cdot v_{ij}(x, y), \\
 w(x, y, t) = \sum_{i=1}^n y_i(t) \cdot w_i^{(c)}(x, y),
 \end{cases} \quad (29)$$

где $u_i^{(c)}(x, y)$, $v_i^{(c)}(x, y)$ и $w_i^{(c)}(x, y)$ – собственные функции линейной задачи. Функции $u_{ij}(x, y)$ и $v_{ij}(x, y)$ являются решениями системы:

$$\begin{cases}
 L_{11}u_{ij} + L_{12}v_{ij} = -Nl_1^{(2)}(w_i^{(c)}, w_j^{(c)}), \\
 L_{12}u_{ij} + L_{22}v_{ij} = -Nl_2^{(2)}(w_i^{(c)}, w_j^{(c)}).
 \end{cases} \quad (30)$$

Операторы $Nl_1^{(2)}$ и $Nl_2^{(2)}$ определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned}
 Nl_1^{(2)}(w_i^{(c)}, w_j^{(c)}) &= \partial_x w_i^{(c)} \left(C_{11} \partial_{xx} w_j^{(c)} + 2C_{16} \partial_{xy} w_j^{(c)} + C_{66} \partial_{yy} w_j^{(c)} \right) + \\
 &\quad + \partial_y w_i^{(c)} \left(C_{16} \partial_{xx} w_j^{(c)} + (C_{12} + C_{66}) \partial_{xy} w_j^{(c)} + C_{26} \partial_{yy} w_j^{(c)} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Nl_2^{(2)}(w_i^{(c)}, w_j^{(c)}) &= \partial_x w_i^{(c)} \left(C_{16} \partial_{xx} w_j^{(c)} + (C_{12} + C_{66}) \partial_{xy} w_j^{(c)} + C_{26} \partial_{yy} w_j^{(c)} \right) + \\
 &\quad + \partial_y w_i^{(c)} \left(C_{66} \partial_{xx} w_j^{(c)} + 2C_{26} \partial_{xy} w_j^{(c)} + C_{22} \partial_{yy} w_j^{(c)} \right).
 \end{aligned}$$

Система (30) дополняется соответствующими неоднородными граничными условиями.

Решение данной задачи выполняется с помощью метода Ритца.

При таком выборе функций $u_{ij}(x, y)$ и $v_{ij}(x, y)$ первые два уравнения системы (1) удовлетворяются тождественно. Применяя процедуру Бубнова-Галёркина к третьему уравнению системы (1), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$y_r''(t) + \omega_{Lr}^2 y_r(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_{ij}^{(r)} y_i(t) y_j(t) +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \gamma_{ijk}^{(r)} y_i(t) y_j(t) y_k(t) = \tilde{F}_r(t), \quad r = \overline{1, n}. \quad (31)$$

Коэффициенты системы (31) определяются соотношениями:

$$\beta_{ij}^{(r)} = \frac{-1}{m_1 \|w_r^{(c)}\|^2} \iint_{\Omega} \left[N_{11}^{(L)} \partial_{xx} w_j^{(c)} + N_{22}^{(L)} \partial_{yy} w_j^{(c)} + 2N_{12}^{(L)} \partial_{xy} w_j^{(c)} - \right. \\ \left. - k_1 N_{11}^{(Np)} - k_2 N_{22}^{(Np)} \right] w_r^{(c)} d\Omega,$$

$$\gamma_{ijk}^{(r)} = \frac{-1}{m_1 \|w_r^{(c)}\|^2} \iint_{\Omega} \left[N_{11}^{(Np)} \partial_{xx} w_k^{(c)} + N_{22}^{(Np)} \partial_{yy} w_k^{(c)} + 2N_{12}^{(Np)} \partial_{xy} w_k^{(c)} \right] w_r^{(c)} d\Omega,$$

$$\tilde{F}_r(t) = P_r \cos \Omega t, \quad \text{где } P_r = \frac{P_0}{m_1 \|w_r^{(c)}\|^2} \iint_{\Omega} w_r^{(c)} d\Omega,$$

$$\{N^{(L)}\} = \{N_{11}^{(L)}; N_{22}^{(L)}; N_{12}^{(L)}\}^T = [C] \{\varepsilon^{(L)}\},$$

$$\{N^{(Np)}\} = \{N_{11}^{(Np)}; N_{22}^{(Np)}; N_{12}^{(Np)}\}^T = [C] \{\varepsilon^{(Np)}\},$$

$$\{\varepsilon^{(L)}\} = \left\{ \partial_x u_i^{(c)} + k_1 w_i^{(c)}; \partial_y v_i^{(c)} + k_2 w_i^{(c)}; \left(\partial_y u_i^{(c)} + \partial_x v_i^{(c)} \right) \right\}^T,$$

$$\{\varepsilon^{(Np)}\} = \left\{ \partial_x u_{ij} + \frac{\partial_x w_i^{(c)} \partial_x w_j^{(c)}}{2}; \partial_y v_{ij} + \frac{\partial_y w_i^{(c)} \partial_y w_j^{(c)}}{2}; \partial_y u_{ij} + \partial_x v_{ij} + \partial_x w_i^{(c)} \partial_y w_j^{(c)} \right\}^T.$$

В случае одномодовой аппроксимации система (31) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. При этом зависимость отношения Ω/ω_L от амплитуды $A = w_{\max}/h$ колебаний оболочки под действием поперечной нагрузки $\tilde{F}(t) = P_1 \cos \Omega t$, может быть найдена по формуле [9]:

$$(\Omega/\omega_L)^2 = 1 + \frac{8}{3\pi} \beta A + \frac{3}{4} \gamma A^2 \pm \frac{P_1}{A}. \quad (32)$$

4. Численные результаты

Исследуем вынужденные колебания пятислойной ортогонально-армированной ($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ$) полой оболочки с условиями закрепления скользящей заделки (3). Геометрия оболочки представлена на рис. 1.

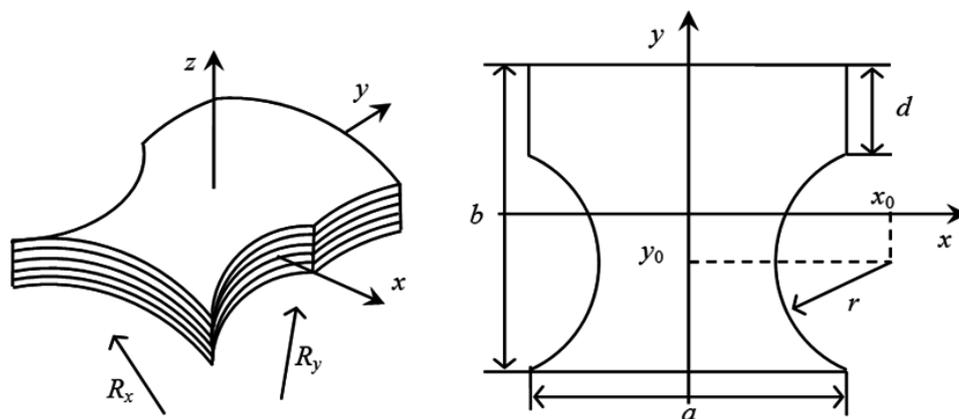


Рис. 1. Геометрическая форма оболочки

Радиусы кривизны оболочки $R_x = R_y = 10a$. Механические характеристики материала следующие [10]:

$$E_1/E_2 = 40, G_{12}/E_2 = 0.6, \nu_{12} = 0.25.$$

Для исследования динамики поведения оболочки воспользуемся структурами решения (24)–(26), удовлетворяющими всем граничным условиям, а также структурами

$$u = \Phi_1, \quad v = \Phi_2, \quad w = \omega^2 \Phi_3, \quad (33)$$

которые удовлетворяют только кинематическим граничным условиям (3).

Результаты значений ω_{NL}/ω_L для пятислойных пологих оболочек квадратной формы ($b/a = 1$), а также оболочек со сложной формой плана ($b/a = 1, d = 0.2a, x_0 = 0.8a, y_0 = -0.1a$), полученные с помощью структур (33) и новых структур (24)–(26), приведены в таблице.

w_{max}/h	Квадратный план		План сложной формы	
	RFM, структуры (33)	RFM, структуры (24)–(26)	RFM, структуры (33)	RFM, структуры (24)–(26)
0.5	0.97562	0.97508	0.98708	0.98692
1.0	0.95895	0.95756	0.98033	0.97986
1.5	0.95034	0.94785	0.97987	0.97895
2.0	0.95006	0.94620	0.98571	0.98422
2.5	0.95810	0.95264	0.99774	0.99556
3.0	0.97425	0.96701	1.01574	1.01277
3.5	0.99812	0.98896	1.03941	1.03556
4.0	1.02918	1.01802	1.06836	1.06357

Таблица 1. Отношения ω_{NL}/ω_L для свободных колебаний сферических оболочек

Как видно из таблицы, значения ω_{NL}/ω_L , полученные двумя способами, достаточно близки, максимальное отклонение не превышает 0.5%.

На рис. 2 изображены резонансные кривые вынужденных колебаний оболочки сложной формы под действием поперечной периодической нагрузки $F(t) = P_0 \cos \Omega t$ при $P_0 = 0.2, 0.4, 0.6$.

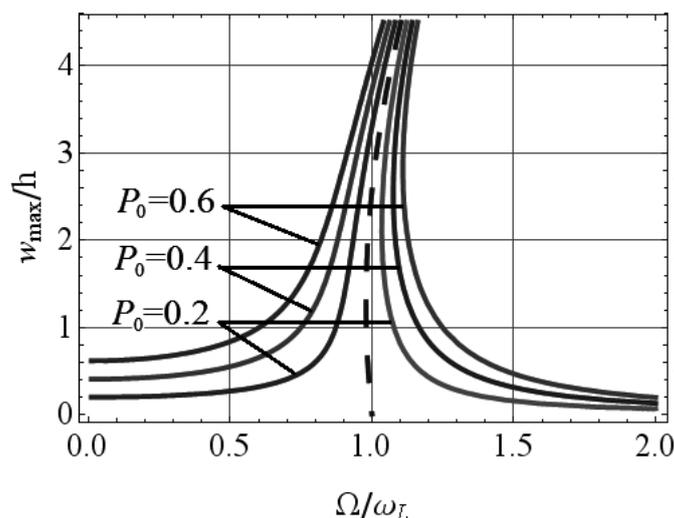


Рис. 2. Скелетные и резонансные кривые пологой сферической оболочки, находящейся под действием поперечной нагрузки

Скелетная кривая свободных колебаний рассматриваемой оболочки изображена на рис. 2 пунктирной линией. Соответствующие ей резонансные кривые вынужденных колебаний оболочки, находящейся под действием нагрузки $F(t) = P_0 \cos \Omega t$ при $P_0 = 0.2, 0.4, 0.6$, изображены сплошными линиями. При непрерывном изменении частоты возможен скачок с одной ветви резонансной кривой на другую, это связано с возникновением областей неустойчивости. Исследование зон неустойчивости в данной работе не рассматривалось.

5. Выводы

В работе построены структуры решения для задач о геометрически нелинейных колебаниях многослойных пологих оболочек симметричного строения с произвольной формой плана. Построенные структурные формулы удовлетворяют кинематическим и статическим граничным условиям, соответствующим скользящему, неподвижному и классическому шарниру. На базе построенных структур решения легко получить системы координатных функций, точно удовлетворяющие всем заданным граничным условиям. Используя полученные структуры решений и предложенный алгоритм решения указанного класса задач, выполнено исследование

пятислойной пологой оболочкой со сложной формой плана. Получены амплитудно-частотные характеристики и кривые отклика. Проведенные численные исследования показали, что во многих случаях нет необходимости удовлетворять всем граничным условиям, а можно использовать более простые координатные последовательности, удовлетворяющие только главным граничным условиям. Тем не менее, в каждом конкретном случае желательно при решении нелинейной задачи использовать оба варианта, поскольку метод Бубнова-Галеркина требует построения базисных функций, удовлетворяющих всем граничным условиям.

Список цитируемых источников

1. Курпа Л. В. Метод R-функций для решения линейных задач изгиба и колебаний пластин и пологих оболочек. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2009. – 408 с.
2. Курпа Л. В. Нелинейные свободные колебания многослойных пологих оболочек симметричного строения со сложной формой плана // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – 51, №2. – С. 75-85.
3. Курпа Л. В., Будников Н. А. Исследование вынужденных геометрически нелинейных колебаний многослойных пологих оболочек несимметричной структуры / Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць / ред. кол. А.П. Дзюба (відп. ред.) та ін. – Дніпропетровськ: Ліра, 2012. – Вип. 20. – С. 208–216.
4. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наукова думка, 1982. – 552 с.
5. Amabili M. Nonlinear vibrations and stability of shells and plates / M. Amabili. – Cambridge: Cambridge University Press, 2008. – 374 pp.
6. Zhang Y. X., Yang C. H. Recent developments in finite element analysis for laminated composite plates // Composite Structures. – 2009. – Vol. 88. – P. 147–157.
7. Sharma A. K., Mittal N. D. Review on Stress and Vibration Analysis of Composite Plates // Journal of applied sciences. – 2010. – 10(23) – P. 3156–3166.
8. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 446 с.
9. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с.

Получена 30.09.2012