Динамические системы, том 3(31), No. 1-2, 49–68

УДК 517.538

Резонансная динамика как причина жесткого возбуждения колебаний в некоторых задачах теории упругой устойчивости

А. Н. Куликов

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,
Ярославль 150000. *E-mail: anat_kulikov@mail.ru*

Аннотация. В работе рассмотрен класс абстрактных нелинейных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве, который включает в себя нелинейные краевые задачи, встречающиеся в теории упругой устойчивости. Например, при изучении флаттера пластины в сверхзвуковом потоке газа. Рассматривается вариант малого демпфирования. Показано, что в случаях близкх к резонансу 1:1 собственных частот линеаризованной задачи могут бифурцировать неустойчивые периодические решения. Для обоснования результатов использован метод интегральных многообразий в сочетании с аппаратом нормальных форм для динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством.

Ключевые слова: нелинейные эволюционные уравнения, нелинейный панельный флаттер, жесткое возбуждение колебаний.

Введение

Математическим аспектам исследований колебаний тел в потоке газа или жидкости посвящено большое число исследований. Достаточно обратиться, например, к монографиям и работам [1-6,23-24], а также к списку цитируемой там литературы. Простейшие варианты постановки таких задач в случае цилиндрического изгиба приводят к необходимости исследования краевых задач для уравнения

$$w_{tt} + g_0 w_t + w_{xxxx} + c w_x = F(w_t, w_x, w_{xx}). \tag{0.1}$$

Уравнение (0.1) приведено в перенормированном виде, коэффициент $c \geq 0$ пропорционален скорости набегающего потока газа, $g_0 > 0$ — коэффициент демпфирования. Наконец, $w = w(t, x)$ — нормированный прогиб серединной поверхности пластины. Скорость потока газа направлена вдоль оси x. Функция $w(t, x)$ не зависит от y. Это означает, что рассматривается вариант цилиндрического изгиба пластинки [1; гл. 4]. В правой части уравнения (0.1) находятся слагаемые, которые учитывают нелинейный характер задачи. Так например, в монографии В.В. Болотина (см.[1;§4.12]) предложен следующий вариант

$$F(w_t, w_x, w_{xx}) = b_0 w_{xx} \int\limits_0^1 (w_x)^2 dx - (k_2(w_t + k_4 M w_x)^2 + k_3(w_t + k_4 M w_x)^3),$$

где $b_0, k_2, k_3, k_4 > 0$, а M – число Маха. Если обратиться к монографии [2;§7.6], то в соответствующей краевой задаче учтена лишь «геометрическая нелинейность» [1]. В первом варианте учтена аэродинамическая нелинейность на основе закона плоских сечений («поршневой» теории) [1]. Уравнение (0.1) необходимо дополнить краевыми условиями, отражающими характер закрепления концов пластины. Например, в случае шарнирного опирания

$$w(t,0) = w(t,1) = w_{xx}(t,0) = w_{xx}(t,1) = 0. \tag{0.2}$$

Краевые условия (0.2) могут быть заменены на иные [1],[2]. Например, уравнение (0.1) можно рассмотреть вместе с условиями жесткого закрепления

$$w(t,0) = w(t,1) = w_x(t,0) = w_x(t,1) = 0.$$

В работе предполагается рассмотреть вопрос о колебаниях пластинки в предположении, что коэффициент g_0 мал ($g_0 \ll 1$). Эта статья служит естественным дополнением к работе автора [7]. В работе [7] были изучены бифуркационные задачи, возникающие при реализации внутренних резонансов 1:2,1:3. Ниже будет рассмотрена задача о бифуркации малых колебаний в случае близком к резонансу 1:1.

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор $L(c) = v^{IV} + cv$, определенный на достаточно гладких функциях, удовлетворяющих краевым условиям $v(0) = v(1) = v''(0) = v''(1) = 0$. В работах [8-9,25] было показано, что при $c \in [0, c_1)(0 < c_1 < c_*)$ линейный дифференциальный оператор $L(c)$ имеет счетное множество простых собственных значений $0 < \sigma_1^2(c) < \sigma_2^2(c) < \ldots$ При $c = c_1$ собственное значение $\sigma_1^2(c_1)$ становится двукратным. Наконец, можно указать такие положительные постоянные c_2, c_3, что $c_3 < c_2 < c_1$ и $\sigma_2(c_2) = 2\sigma_1(c_2), \sigma_2(c_3) = 3\sigma_1(c_3)$.

Итак, при $c \approx c_3, c \approx c_2, c \approx c_1$ для точек спектра устойчивости краевой задачи (0.1), (0.2) реализуются случаи, близкие к резонансам 1:3,1:2,1:1. Напомним, что комплексное или действительное число $\lambda(\lambda \in C(R))$ принадлежит спектру устойчивости, если краевая задача

$$w_{tt} + g_0 w_t + w_{xxxx} + c w_x = 0,$$
$$w(t,0) = w(t,1) = w_{xx}(t,0) = w_{xx}(t,1) = 0$$

допускает нетривиальные решения вида $w(t,x) = \exp(\lambda t)v(x)$.

В теории упругой устойчивости величина c_1, при которой реализуется резонанс 1:1, играет особую роль и носит специальное название «нижней скорости флаттера» [1,§4.9]. При малых g_0 величина c_1 дает достаточно хорошее приближение для величины c_* — скорости флаттера. Далее ограничимся рассмотрением случаев, когда приведенная скорость потока газа c близка к c_1.

В работе будет рассмотрен класс абстрактных нелинейных уравнений в гильбертовом пространстве, который включает в себя многие нелинейные эволюционные краевые задачи из теории упругой устойчивости. Например, краевую задачу (0.1), (0.2). Для абстрактных уравнений из указанного класса будут рассмотрены задачи о бифуркации малых периодических решений в случаях близких к резонансу 1:1. Как правило, эти решения оказываются неустойчивыми и, следовательно, имеет место жесткое возбуждение автоколебаний.

Для систем, состоящих из двух обыкновенных дифференциальных уравнений, которые можно считать двучленным галеркинским приближением для краевых задач подобных (0.1), (0.2), излагаемые результаты были получены в работах [10-11]. В работе [12] эти результаты были распространены на системы обыкновенных дифференциальных уравнений размерности $n > 2$. В работе [8] была рассмотрена краевая задача (0.1), (0.2) без использования конечномерных приближений. Аналогичные результаты были получены в работе [13], где была рассмотрена краевая задача близкая к (0.1), (0.2). Там была изучена нелинейная краевая задача, в которой учитывалась лишь «геометрическая нелинейность» (см. [2;§7.6]).

1. Описание рассматриваемого класса абстрактных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве

Пусть H действительное сепарабельное гильбертово пространство. В этом пространстве рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{u} + g_0\dot{u} + (A^2 + cB)u = f(u, \dot{u}, c), \tag{1.1}$$

зависящее от параметра $c \in [0, \infty)$. Операторы, входящие в правую и левую части уравнения (1.1), удовлетворяют ряду ограничений, которые индуцированы видом уравнений теории упругой устойчивости [1-3]. Эти ограничения сведены в серию предположений.

Предположение 1. Будем считать, что A — замкнутый линейный оператор, область определения которого H_A плотна в H, а линейный оператор B подчинен A[14,гл. I,§7]. Дополнительно будем предполагать, что линейный оператор A имеет своим обратным вполне непрерывный (компактный) оператор A^{-1}.

Предположение 2. Линейный оператор iA — производящий оператор группы класса (C_0) [14; гл. 1, §2] в комплексном расширении H.

Через H_A обозначим подпространство H, состоящее из тех $u \in H_A$, для которых определена норма $||u||_A = ||Au||$. Аналогичным образом определено и подпространство $H_{A^2} : u \in H_{A^2}$, если определена норма $||u||_{A^2} = ||A^2u||$. Наконец, комплексное расширение H ниже будем обозначать через H_k.

Предположение 3. Нелинейный оператор $f(u, v, c)$ действует из шара $S(r)$ пространства $H_A \times H_A \times R$ в H и имеет сильно непрерывную производную Фреше $f'_u(u, v, c)$, сильно непрерывную H-расширенную [15] производную Фреше $f'_v(u, v, c)$. Эти производные удовлетворяют условию Липшица в шаре $S(r)$. Считаем, что нелинейный оператор $f(u, v, c)$ гладко зависит от параметра c в метрике пространства H.

Предположение 4. Нелинейный оператор $f(u, v, c)$ имеет по совокупности переменных u, v в нуле порядок малости выше первого. В частности, при всех рассматриваемых c справедливы неравенства

$$f(u, v, c)|_{u=0,v=0} = f_u(u, v, c)|_{u=0,v=0} = f_v(u, v, c)|_{u=0,v=0} = 0.$$

Первые три предположения гарантируют локальную разрешимость задачи Коши для уравнения (1.1), если (см. [15],[26])

$$u(0) = u_0 \in H_{A^2},\ \dot{u}(0) = \dot{u}_0 \in H_A. \tag{1.2}$$

Четвертое предположение дополняет первые три. Пусть $||u_0||_{A^2} \le \sigma$, $||\dot{u}_0||_A \le \sigma$, то задача Коши имеет единственное решение (см. [15])

$$u(t) \in C^2((-T_\sigma, T_\sigma), H) \cap C^1((-T_\sigma, T_\sigma), H_A) \cap C((-T_\sigma, T_\sigma), H_{A^2}),$$

где $T_\sigma \to \infty$, если $\sigma \to 0$. Это решение может быть найдено методом последовательных приближений, которые сходятся со скоростью геометрической прогрессии. Метод последовательных приближений в работе [15] применялся к интегральному уравнению, заменяющего задачу Коши (1.1), (1.2). Для интегрального уравнения гладкая зависимость от начальных условий и параметров исследуется достаточно стандартным способом. В работе [15] приведен достаточно полный список работ, где рассмотрены схожие задачи. Аналогичные результаты получены в широко известной работе [26].

Следующие предположения носят более специальный характер.

Предположение 5. Линейный оператор $A^2 + cB$ при всех $c \in [0, c_1)$ имеет положительные и простые собственные значения

$$\sigma_1^2(c) < \sigma_2^2(c) < \ldots,$$

а при $c = c_1$ также имеет счетное множество собственных значений $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \ldots$ $(\sigma_j^2 = \sigma_j^2(c_1))$. Будем считать, что собственные значения $\sigma_j^2 (j = 2, 3, \ldots)$ простые и им соответствуют собственные элементы $e_j (j = 2, 3, \ldots)$. Собственное значение σ_1^2 двукратно и ему соответствует собственный элемент e_1 и присоединенный e_0. Пусть $A_0 = A^2 + c_1 B$, тогда $A_0 e_1 = \sigma_1^2 e_1,\ A_0 e_0 = \sigma_1^2 e_0 + e_1$. Через A_0^* обозначим сопряженный к A_0 линейный оператор, а через h_j его собственные элементы, отвечающие $\sigma_j^2 (j = 2, 3, \ldots)$. При $j = 1$ выполнены равенства $A_0^* h_0 = \sigma_1^2 h_0, A_0^* h_1 = \sigma_1^2 h_1 + h_0$. Будем также предполагать, что системы элементов $\{e_0, e_1, e_2, \ldots\}, \{h_0, h_1, h_2, \ldots\}$ формируют биортогональные базисы (базисы Бари-Рисса) [16; гл. 6],[17;гл. 2,§5]. В частности, $(e_j, h_k) = \delta_{kj}$, где δ_{kj} — символ Кронекера.

Предположение 6. В рамках данной работы будем считать, что

$$f(u, v, c) = f_2(u, v, c) + f_3(u, v, c),$$

где $f_2(u, v, c), f_3(u, v, c)$ — билинейный и трилинейный операторы по совокупности переменных u, v при всех рассматриваемых c. Будем считать, что они зависят от параметра c аналитически в метрике пространства H.

В большинстве приложений

$$f_j(u, v, c) = \sum_{m=0}^{m_0} f_{jm}(u, v) c^m,\ j = 1, 2.$$

Очень часто $f_{jm} \equiv 0,\ m = 1, 2, \ldots$, то есть они от c не зависят. Так будет, например, если ограничиться рассмотрением задач, где учитывается лишь «геометрическая нелинейность» [2; гл. 7, §7.6].

Предположение 7.

$$\sigma_k \neq 2\sigma_1,\ \sigma_m \neq 3\sigma_1,\ |\sigma_k - \sigma_m \pm \sigma_1| > \sigma_0,$$

где $k, m = 2, 3, \ldots$, а σ_0 — положительная постоянная.

Последнее предположение в прикладных задачах обычно проверяется достаточно просто. Например, если рассмотреть в качестве примера краевую задачу (0.1), (0.2), то роль линейного дифференциального оператора A_0 там играет оператор $L_0v(x) = v^{IV} + c_1v'$, определенный на достаточно гладких функциях, удовлетворяющих условиям шарнирного опирания ($v(0) = v(1) = v''(0) = v''(1) = 0$). В работе [8] спектр дифференциального оператора L_0 был в достаточной мере изучен. В частности, приближенно вычислены первые собственные значения $\sigma_1^2(c_1), \sigma_2^2(c_1), \sigma_3^2(c_1), \ldots$. Для собственных значений с большими номерами указана их асимптотика, позволяющая проверить содержательность предположения 7.

В рамках данной работы будем предполагать, что $c = c_1 + a\varepsilon^2$, $g_0 = 2\varepsilon g$, где $a, g \in R, g > 0$, а ε — малый положительный параметр ($\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, где ε_0 — некоторая положительная постоянная. Выбранная нормировка g_0 подчеркивает с математической точки зрения, что коэффициент демпфирования (трения) достаточно малая величина. Предположение о малости g_0 вполне допустимо. Это уже отмечалось ранее. В большом числе примеров в теории упругой устойчивости численное значение $g_0 << 1$. Отклонение приведенной скорости от нижней скорости флаттера будем нормировать величиной ε^2.

Предположения 1–6 и нормировки параметров c и g_0 задачи позволяют переписать уравнение (1.1) в модифицированном виде

$$\ddot{u} + 2g\varepsilon\dot{u} + A_0u + \varepsilon^2 aBu = F_2(u, \dot{u}) + F_3(u, \dot{u}) + \varepsilon^2(B_2(u, \dot{u}, \varepsilon^2) + B_3(u, \dot{u}, \varepsilon^2)). \tag{1.3}$$

Линейный оператор B подчинен линейному оператору A и, следовательно, A_0 (см., например, [14; гл. 1, §7]). Наконец,

$$F_2(u, \dot{u}) = f_2(u, \dot{u}, c_1),\ F_3(u, \dot{u}) = f_3(u, \dot{u}, c_1),$$
$$f_2(u, \dot{u}, c) = F_2(u, \dot{u}) + \varepsilon^2 B_2(u, \dot{u}, \varepsilon^2),\ f_3(u, \dot{u}, c) = F_3(u, \dot{u}) + \varepsilon^2 B_3(u, \dot{u}, \varepsilon^2).$$

Через $B_2(u, \dot{u}, \varepsilon^2), B_3(u, \dot{u}, \varepsilon^2)$ обозначены билинейный и трилинейный операторы, которые гладко зависят от ε^2 в метрике H.

Как обычно, фазовым пространством решений уравнения (1.3) будем называть пространство начальных условий (1.2), при которых задача Коши локально разрешима. Здесь речь идет о пространстве $H_{A^2} \times H_A (u_0 \in H_{A^2}, \dot{u}_0 \in H_A)$. Обозначим через H_k, H_{kA}, H_{kA^2} комплексные расширения пространств H, H_A, H_{A^2}, соответственно, и рассмотрим вспомогательное дифференциальное уравнение

$$\ddot{u} + 2g\varepsilon\dot{u} + A(\varepsilon)u = 0, \tag{1.4}$$

где $A(\varepsilon) = A_0 + \varepsilon^2 aB$. Для определения устойчивости нулевого решения положим $u(t) = \exp(\lambda t)v,\ v \in H_{A^2}\ (v \in H_{kA^2})$. Откуда $A(\varepsilon)v = \mu v$, где $\mu = -\lambda^2 - 2\varepsilon g\lambda$. Поэтому λ находим как корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + 2\varepsilon g\lambda + \mu(\varepsilon) = 0, \tag{1.5}$$

где $\mu(\varepsilon)$ — собственное значение линейного оператора $A(\varepsilon)$. Подчеркнем, что $\mu_k(0) = \sigma_k^2,\ \lambda_k(0) = \pm i\sigma_k, k = 1, 2, \ldots$.

Пусть $\varepsilon > 0$. При $k = 2, 3, \ldots$ находим [27; гл. 8], что $\mu_k(\varepsilon) = \sigma_k^2(1 + o(\varepsilon))$. При обосновании последнего равенства используется простота собственных значений σ_k^2 оператора A_0. В частности, отсюда вытекает равенство $\lambda_{k_{12}}(\varepsilon) = \pm i\sigma_k - g\varepsilon + o(\varepsilon)$. Поэтому, $Re\lambda_{k_{12}}(\varepsilon) < 0$, если $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, а ε_0 – достаточно малая положительная постоянная. При $k = 1$ ситуация более сложная в силу двукратности собственного значения σ_1^2.

Лемма 1. *Пусть* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 = const > 0$. *Тогда*

$$\mu_{\pm 1}(\varepsilon) = \sigma_1^2 \pm \sqrt{a\alpha}\varepsilon + o(\varepsilon)$$

и соответствующие четыре точки спектра устойчивости могут быть вычислены приближенно по одной из четырех формул

$$\lambda_1(\varepsilon) = -g\varepsilon \pm i\sigma_1[1 \pm 0.5\sqrt{a\alpha}\frac{1}{\sigma_1^2}\varepsilon] + o(\varepsilon).$$

Собственные значения $\mu_{\pm 1}(\varepsilon)$ *соответствуют собственным элементам*

$$e_1(\varepsilon) = e_1 \pm \varepsilon\sqrt{a\alpha}e_0 + o(\varepsilon),\ \alpha = (Be_1, h_0).$$

Действительно, собственный элемент и соответствующее собственное значение будем искать в виде сумм [27; гл. 8]

$$e_1(\varepsilon) = e_1 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + o(\varepsilon^2),\ \mu_1(\varepsilon) = \sigma_1^2 + \gamma_1\varepsilon + \gamma_2\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2),$$

где $p_1, p_2 \in H_{A^2}, \gamma_1, \gamma_2 \in C$. Тогда для определения p_1, p_2 получим два неоднородных уравнения

$$A_0 p_1 = \sigma_1^2 p_1 + \gamma_1 e_1,\ A_0 p_2 = \sigma_1^2 p_2 + \gamma_1 p_1 + \gamma_2 e_1 - aBe_1.$$

Первое из них имеет решение $p_1 = \gamma_1 e_0$, а из условия разрешимости второго(оператор $A_0 - \sigma_1^2 E$ не имеет обратного)

$$(\gamma_1 p_1 + \gamma_2 e_1 - aBe_1, h_0) = 0$$

находим, что $\gamma_1^2 = a(Be_1, h_0) = a\alpha$. При выводе последней формулы учтено, что $(e_1, h_0) = 0, (e_0, h_0) = 1$. Уместно и необходимо различать два случая: 1)$\alpha a \geq 0$, 2)$\alpha a < 0$. В первом из них $\mu_1(\varepsilon) \in R$ и более того при малых ε гарантировано неравенство $\mu_1(\varepsilon) > 0$. Поэтому для обоих корней уравнения (1.5) выполнены неравенства $Re\lambda_{1j}(\varepsilon) < 0, j = 1, 2$.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$\ddot{u} + A_0 u = 0. \tag{1.6}$$

В силу предположения 5 уравнение (1.6) имеет два линейно независимых периодических решения $u(t) = e_1 \exp(\pm i\sigma_1 t)$, период которых равен $2\pi/\sigma_1$. Наряду с линейным однородным уравнением (1.6) рассмотрим неоднородное

$$\ddot{u} + A_0 u = q(\exp(\pm ik\sigma_1 t)), \tag{1.7}$$

где $k = 0, 1, 2, 3, q \in H_k$. Напомним хорошо известное условие разрешимости неоднородного дифференциального уравнения в классе $2\pi/\sigma_1$ периодических функций $u(t)$ со значениями в H или H_k.

При $k = 0, 2, 3$ уравнение (1.7) имеет периодическое решение вида

$$u(t) = \nu \exp(ik\sigma_1 t) + \overline{\nu} \exp(-ik\sigma_1 t),$$

где $\nu \in H_{kA^2}$ (H_{A^2}) находим как решение уравнения

$$(-(k\sigma_1)^2 + A_0)\nu = q.$$

При $k = 1$ уравнение (1.7) имеет периодическое решение, если $(q, h_0) = 0$. В частности, при $q = e_1$ таким решением будет $u(t) = e_0 \exp(\pm i\sigma_1 t)$. Равенства

$$\int\limits_0^{2\pi/\sigma_1} (u(t), h_1 \exp(\pm i\sigma_1 t))dt = 0. \tag{1.8}$$

выделяет одно подходящее решение дифференциального уравнения (1.7).

В работе будут рассмотрены вопросы о существовании и устойчивости малых по норме периодических решений уравнения (1.3). Речь пойдет о таких решениях $u(t,\varepsilon)$, для которых выполнены предельные равенства

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u(t,\varepsilon) = 0,\ \lim_{\varepsilon\to 0} T(\varepsilon) = \frac{2\pi}{\sigma_1}.$$

Здесь $T(\varepsilon)$ период искомого решения, а первый предел следует понимать в смысле нормы фазового пространства решений уравнения (1.3).

2. Алгоритм построения малых периодических решений

Периодические решения уравнения (1.3) с периодом близким к $2\pi/\sigma_1$ будем искать в следующем виде

$$u(t,\varepsilon) = \varepsilon u_1(t,s) + \varepsilon^2 u_2(t,s) + \varepsilon^3 u_3(t,s) + o(\varepsilon^3), \tag{2.1}$$

где $s = \varepsilon t,\ u_1(t) = [z_1(s)\exp(i\sigma_1 t) + \overline{z}_1(s)\exp(-i\sigma_1 t)]e_1,\ u_2(t,s), u_3(t,s) \in H_{A^2}$, по переменной t имеют период $2\pi/\sigma_1$. Комплекснозначные функции $z_1(s), \overline{z}_1(s)$ будут выбраны в процессе реализации алгоритма. В данном разделе ограничимся алгоритмом, позволяющим определять $z_1(s), \overline{z}_1(s), u(t,\varepsilon)$ приближенно. Подстановка суммы (2.1) в дифференциальное уравнение (1.3) с последующим приравниванием членов при одинаковых степенях ε до ε^3 включительно позволяет сформировать два линейных неоднородных дифференциальных уравнения для определения $u_2(t,s), u_3(t,s)$. При их формировании следует учесть, что

$$\frac{dv(t,s)}{dt} = \dot v + \varepsilon v',\ \frac{d^2 v(t,s)}{dt^2} = \ddot v + 2\varepsilon \dot v' + \varepsilon^2 v'',\ \dot v = \frac{\partial v(t,s)}{\partial t},$$
$$v' = \frac{\partial v(t,s)}{\partial s},\ \dot v' = \frac{\partial^2 v(t,s)}{\partial s \partial t},\ \ddot v = \frac{\partial^2 v(t,s)}{\partial t^2},\ v'' = \frac{\partial^2 v(t,s)}{\partial s^2}.$$

Так для $u_2(t,s)$ получаем неоднородное дифференциальное уравнение

$$\begin{gathered}\ddot u_2 + A_0 u_2 = -2i\sigma_1[z_1'(s)\exp(i\sigma_1 t) - \overline{z}_1'(s)\exp(-i\sigma_1 t)]e_1 - \\ -2gi\sigma_1[z_1(s)\exp(i\sigma_1 t) - \overline{z}_1(s)\exp(-i\sigma_1 t)]e_1 + F_2(u_1(t,s), \dot u_1(t,s)).\end{gathered} \tag{2.2}$$

При этом

$$F_2(u_1(t,s), \dot u_1(t,s)) = F_{22} z_1^2(s)\exp(2i\sigma_1 t) + F_{20} z_1(s)\overline{z}_1(s) + \overline{F}_{22}\overline{z}_1^2(s)\exp(-2i\sigma_1 t),$$

где $F_{22}, \overline{F}_{22} \in H_k, F_{20} \in H$. Частное решение неоднородного дифференциального уравнения (2.2) представим в виде суммы частных решений

$$u_2(t,s) = u_{21}(t,s) + u_{22}(t,s)$$

двух вспомогательных неоднородных дифференциальных уравнений

$$\ddot{u}_{21} + A_0 u_{21} = -2i\sigma_1[z_1'(s)\exp(i\sigma_1 t) - \overline{z}_1'(s)\exp(-i\sigma_1 t)]e_1 -$$
$$-2gi\sigma_1[z_1(s)\exp(i\sigma_1 t) - \overline{z}_1(s)\exp(-i\sigma_1 t)]e_1, \ddot{u}_{22} + A_0 u_{22} = F_2(u_1(t,s), \dot{u}_1(t,s)).$$

Положим

$$u_{21}(t,s) = (z_0(s)\exp(i\sigma_1 t) + \overline{z}_0(s)\exp(-i\sigma_1 t))e_0.$$

Подстановка $u_{21}(t,s)$ в первое из двух последних уравнений показывает, что

$$z_0 = -2i\sigma_1(z_1' + g z_1). \tag{2.3}$$

Частное решение второго из них можно записать в виде суммы

$$u_{22}(t,s) = u_{22}(t, z_1, \overline{z}_1) = p_2 z_1^2 \exp(2i\sigma_1 t) + p_0 z_1 \overline{z}_1 + \overline{p}_2 \overline{z}_1^2 \exp(-2i\sigma_1 t),$$

где $p_2, \overline{p}_2 \in H_{kA^2},\ p_0 \in H_{A^2}$ и могут быть найдены как решения уравнений

$$(A_0 - 4\sigma_1^2)p_2 = F_{22},\ (A_0 - 4\sigma_1^2)\overline{p}_2 = \overline{F}_{22},\ A_0 p_0 = F_{20}.$$

Их разрешимость вытекает из предположения 7. Просто проверяется, что для таким образом выбранного решения $u_2(t,s)$ условие (1.8) выполнено. Приравнивая коэффициенты при ε^3, можно сформировать неоднородное уравнение для $u_3(t,s)$. В результате имеем

$$\ddot{u}_3 + A_0 u_3 = F_3(u_1, \dot{u}_1) + \Phi_3(u_1, u_2, \dot{u}_1, \dot{u}_2) - [z_1''\exp(i\sigma_1 t) + \overline{z}_1''\exp(-i\sigma_1 t)]e_1 -$$
$$-2i\sigma_1[z_0'\exp(i\sigma_1 t) - \overline{z}_0'\exp(-i\sigma_1 t)]e_0 - 2i\sigma_1 g[z_0\exp(i\sigma_1 t) - \overline{z}_0\exp(-i\sigma_1 t)]e_0 -$$
$$-a[z_1\exp(i\sigma_1 t) + \overline{z}_1\exp(-i\sigma_1 t)]Be_1,$$

где, как и ранее, начиная с формулы (2.2), использованы обозначения $z_1 = z_1(s)$, $z_0 = z_0(s)$, $u_1 = u_1(t,s)$, $u_2 = u_2(t,s)$, $u_3 = u_3(t,s)$. Наконец, $\Phi_3(u_1, u_2, \dot{u}_1, \dot{u}_2) = \dfrac{\partial}{\partial\mu}F_2(u_1 + \mu u_2, \dot{u}_1 + \mu\dot{u}_2)|_{\mu=0}$. Первые два члена в правой части последнего неоднородного дифференциального уравнения можно записать в виде суммы

$$F_3(u_1, \dot{u}_1) + \Phi_3(u_1, u_2, \dot{u}_1, \dot{u}_2) = Q_3 z_1^3 \exp(3i\sigma_1 t) + Q_1 z_1^2 \overline{z}_1 \exp(i\sigma_1 t) +$$
$$+\overline{Q}_1 z_1 \overline{z}_1^2 \exp(-i\sigma_1 t) + \overline{Q}_3 \overline{z}_1^3 \exp(-3i\sigma_1 t) + Q_2 z_1 z_0 \exp(2i\sigma_1 t) +$$
$$+Q_0 z_1 \overline{z}_0 + \overline{Q}_0 \overline{z}_1 z_0 + \overline{Q}_2 \overline{z}_1 \overline{z}_0 \exp(-2i\sigma_1 t),$$

где $Q_j, \overline{Q_j} \in H_k, j = 0,1,2,3$. Последнее равенство – следствие структуры u_1, u_2 и свойств F_2, F_3. Из условий разрешимости неоднородного уравнения для $u_3(t,s)$ следует справедливость равенства

$$-2i\sigma_1 z_0' - 2i\sigma_1 g z_0 - a\alpha z_1 + (\gamma_1 + i\gamma_2)z_1^2\overline{z}_1 = 0, \tag{2.4}$$

где $(\gamma_1 + i\gamma_2) = (Q_1, h_0),\ \alpha = (Be_1, h_0)$.

Если теперь продифференцировать равенство (2.3) по s, а затем из равенств (2.3), (2.4) исключить z_0, то получим одно дифференциальное уравнение второго порядка для комплекснозначной функции $z_1(s)$

$$z_1'' + 2gz_1' + (g^2 + a_1)z_1 - (\gamma_5 + i\gamma_6)z_1|z_1|^2 = 0, \tag{2.5}$$

где $\gamma_5 + i\gamma_6 = (\gamma_1 + i\gamma_2)/(4\sigma_1^2), a_1 = (a\alpha)/(4\sigma_1^2)$. Уравнение (2.5), будем называть нормальной формой (квазинормальной формой).

Рассмотрим также линейное дифференциальное уравнение

$$z_1'' + 2gz_1' + bz_1 = 0 \ (b = g^2 + a_1), \tag{2.6}$$

которое получено из уравнения (2.5) путем его линеаризации на нулевом состоянии равновесия.

Лемма 2. *Пусть $b = g^2 + a_1 > 0$. Тогда нулевое решение дифференциального уравнения (2.6) и дифференциального уравнения (2.5) асимптотически устойчиво. Если $b < 0$, то оно неустойчиво.*

Исследование устойчивости уравнения (2.6) базируется на анализе характеристического уравнения $\lambda^2 + 2g\lambda + b = 0$. Равенство $b = 0$ выделяет критический случай при исследовании устойчивости нулевого решения уравнения (2.5). Этот вариант выбора b рассматривать не будем.

Рассмотрим функцию

$$z_1(s) = \eta \exp(i\omega s),$$

где $\eta, \omega \in R, \eta > 0$. Данная $2\pi/\omega$ периодическая функция будет решением уравнения (2.5), если ее параметры удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$-\omega^2 + b - \gamma_5\eta^2 = 0, \ 2g\omega - \gamma_6\eta^2 = 0.$$

Будем считать, что $\gamma_5 + i\gamma_6 \neq 0$. Пусть сначала $\gamma_5 \neq 0$. Выделим два случая: 1)$\gamma_6 \neq 0$, 2)$\gamma_6 = 0$. В первом из них $\omega = \gamma_6\eta^2/(2g)$, а для определения η^2 получим биквадратное уравнение $P_1(\eta^2) = 0$, где $P_1(\xi) = \gamma_7\xi^2 + \gamma_5\xi - b, \ \gamma_7 = (\gamma_6/(2g))^2 > 0, \xi = \eta^2$. Во втором — находим, что $\omega = 0$, а для η имеем уже уравнение $P_2(\eta^2) = 0$
($P_2(\xi) = \gamma_5\xi - b$). Условие $\eta > 0$ не сужает класс рассматриваемых автомодельных решений в силу автономности дифференциального уравнения (2.5).

Далее будем рассматривать только простые и положительные корни уравнения $P_1(\eta^2) = 0$. Это уравнение имеет два простых положительных корня, если выполнены неравенства $b < 0, \gamma_5 < 0, \gamma_5^2 - 4b\gamma_7 > 0$. Данное уравнение имеет один положительный простой корень, если $b > 0$.

Пусть $\eta = \eta_*$ положительный простой корень уравнения $P_1(\eta^2) = 0$. Тогда соответствующее ему решение обозначим через $z_{1*}(s)$. При этом $z_{1*}(s) = \eta_* \exp(i\omega_* s)$, где $\omega_* = \eta_*^2\gamma_6/(2g)$.. Для исследования данного решения положим

$$z_1(s) = \eta_* \exp(i\omega_* s)(1 + v(s)).$$

После подстановки данной функции $z_1(s)$ в уравнение (2.5), элементарных преобразований и линеаризации, для вспомогательной функции $v(s)$ получим линейное дифференциальное уравнение в C

$$v'' + 2(g + i\omega_*)v' - \eta_*^2(\gamma_5 + i\gamma_6)(v + \overline{v}) = 0.$$

При формировании этого уравнения было учтено, что $\eta_* \exp(i\omega_* s)$ удовлетворяет уравнению (2.5). Пусть теперь $v(s) = v_1(s) + iv_2(s)$. Действительные функции $v_1(s), v_2(s)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$v_1'' + 2(gv_1' - \omega_* v_2') - 2\eta_*^2\gamma_5 v_1 = 0,\ v_2'' + 2(gv_2' + \omega_* v_1') - 2\eta_*^2\gamma_6 v_1 = 0.$$

Ответ на вопрос об устойчивости решений данной системы сводится, как обычно, к анализу расположения на комплексной плоскости корней характеристического уравнения для последней системы дифференциальных уравнений

$$\Delta(\mu) = det\begin{pmatrix} \mu^2 + 2g\mu - 2\eta_*^2\gamma_5 & -2\omega_*\mu \\ 2\omega_*\mu - 2\gamma_6\eta_*^2 & \mu^2 + 2g\mu \end{pmatrix} = 0.$$

После преобразований получаем уравнения $\Delta(\mu) = \mu\Delta_1(\mu) = 0$, где

$$\Delta_1(\mu) = \mu^3 + p\mu^2 + q\mu + r,\ p = 4g > 0,$$
$$q = 4g^2 + 4\omega_*^2 - 2\eta_*^2\beta,\ r = -4g\beta\eta_*^2,\ \beta = P_1'(\xi)|_{\xi=\eta_*^2}\ (\beta \neq 0).$$

Один из корней характеристического уравнения $\mu = 0$. Это следствие линеаризации на периодическом решении $z_{1*}(s) = \eta_* \exp(i\omega_* s)$.

Теорема 1. *Пусть $\beta < 0$, то периодическое решение $z_{1*}(s)$ дифференциального уравнения (2.5) устойчиво (орбитально асимптотически устойчиво). Если $\beta > 0$, то оно неустойчиво.*

Если $\beta < 0$, то выполнены неравенства $q > 0,\ r > 0,\ pq - r > 0$. Следовательно, для корней уравнения $\Delta_1(\mu) = 0$ справедливы неравенства $Re\mu_j < 0, j = 1, 2, 3$. Более подробно доказательство изложено в работах [10-11]. Там же рассматривается второй случай, когда $\gamma_6 = 0$. Тогда $\omega_* = 0$, а η_* — положительный корень уравнения $P_2(\eta^2) = \gamma_5\eta^2 - b = 0$.

Теорема 2. *Пусть $b\gamma_5 > 0$. Тогда у уравнения (2.5) существует одномерное инвариантное многообразие, составленное из ненулевых состояний равновесия*

$$z_{1*}(s) = \eta_* \exp(ih),\ h \in R,\quad \eta_* = \sqrt{\frac{\gamma_5}{b}}.$$

Это многообразие устойчиво, если $b < 0$ и неустойчиво при $b > 0$.

В заключение этого фрагмента отметим, что при $\gamma_5 \neq 0$ один из существующих циклов l неустойчив ($z_1 \in l$, если $z_1 = \eta_* \exp(i\omega_* s)$). Действительно, если уравнение $P_1(\eta^2) = 0$ имеет только один положительный корень η_*, то $\beta = P_1'(\xi)|_{\xi=\eta_*^2} > 0$ и, следовательно, $r < 0$ и соответствующий ему цикл седловой.

Пусть уравнение $P_1(\eta^2) = 0$ имеет два положительных корня $\eta_1 < \eta_2$. Тогда из элементарного анализа квадратного трехчлена $P_1(\xi)$ вытекает, что

$$P_1'(\xi)|_{\xi=\eta_1^2} < 0,\ P_1'(\xi)|_{\xi=\eta_2^2} > 0.$$

Цикл, отвечающий меньшему корню η_1 устойчив, а большему корню η_2 отвечает неустойчивый (седловой) цикл.

Разберем теперь особый случай, когда $\gamma_5 = 0$. Но тогда $\gamma_6 \neq 0$. Уравнение (2.5) имеет периодическое решение $z_1(s) = \eta_* \exp(i\omega_*)$, где $\omega_*^2 = b$, то есть соответствующее ω_* существует, если $b > 0$. При этом $\eta_*^2 = 2g\omega_*/\gamma_6$, а знак ω_* ($\omega_* = \sqrt{b}$ или $\omega_* = -\sqrt{b}$) выбираем таким образом, чтобы было выполнено неравенство $\gamma_6\omega_* > 0$. При $\gamma_6 < 0$ данное периодическое решение устойчиво и неустойчиво при $\gamma_6 > 0$. Получили результат аналогичный теореме 1.

Теорема 3. *Существует $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ каждому периодическому решению $z_{1*}(s)$ уравнения (2.5), отвечающему простому положительному корню η_* уравнения $P_1(\eta^2) = 0$, соответствует периодическое решение уравнения (1.3) с наследованием свойств устойчивости.*

Для периодического решения справедливо асимптотическое представление

$$\begin{gathered}u(t,\varepsilon) = \varepsilon\eta_*[\exp(i(\sigma_1 + \varepsilon\omega_*)t) + \exp(-i(\sigma_1 + \varepsilon\omega_*)t)]e_1 + \\ +\varepsilon^2[-2i\eta_*\sigma_1(g + i\omega_*)\exp(i(\sigma_1 + \varepsilon\omega_*)t) + 2i\eta_*\sigma_1(g - i\omega_*)\exp(-i(\sigma_1 + \varepsilon\omega_*)t)]e_0 + \\ +\varepsilon^2\eta_*^2[p_2\exp(2i(\sigma_1 + \omega_*\varepsilon)t) + p_0 + \overline{p}_2\exp(-2i(\sigma_1 + \omega_*\varepsilon)t)] + o(\varepsilon^2).\end{gathered}$$

Элементы $p_2, \overline{p}_2, p_0$ были определены в процессе реализации алгоритма построения нормальной формы.

Эта теорема сформулирована для общего случая $\gamma_6 \neq 0$. Если $\gamma_6 = 0$, то фразу «каждому периодическому решению» заменить на — «каждому состоянию равновесия» ($\omega_* = 0$). Уравнение $P_1(\eta^2) = 0$ следует заменить на уравнение $P_2(\eta^2) = 0$. Уравнение $P_2(\eta^2) = 0$ может иметь только простой положительный корень, если, конечно, таковой существует.

Нормальную форму (2.5) можно записать в виде системы из двух дифференциальных уравнений первого порядка. Сначала положим $z_1(s) = w_1(s), z_1'(s) = w_0(s)$, а затем возвратим к старой независимой переменной $t(s = \varepsilon t)$. В результате получим систему из двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{w}_1 = \varepsilon w_0,\ \dot{w}_0 = \varepsilon[-2gw_0 - bw_1 - (\gamma_5 + i\gamma_6)w_1|w_1|^2].$$

Положим теперь $w_1(t) = y_1(t)\exp(-i\sigma_1 t),\ w_0(t) = y_0(t)\exp(-i\sigma_1 t)$. В результате получим систему

$$\dot{y}_1 = i\sigma_1 y_1 + \varepsilon y_0,\ \dot{y}_0 = i\sigma_1 y_0 + \varepsilon[-2gy_0 - by_1 + (\gamma_5 + i\gamma_6)y_1|y_1|^2] \tag{2.7}$$

– иной вариант записи для нормальной формы. Наконец, для дальнейших построений удобно систему дифференциальных уравнений (2.7) переписать в тригонометрической форме, положив

$$y_1 = \rho_1\exp(i\varphi_1),\ y_0 = i\rho_0\exp(i\varphi_0), \tag{2.8}$$

где $\rho_j = \rho_j(t), \varphi_j = \varphi_j(t)$ $(j = 0, 1)$. Для новых переменных $\rho_1, \rho_0, \Theta = \varphi_1 - \varphi_0$ получим замкнутую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}\dot{\rho}_1 = \varepsilon\rho_0\sin\Theta,\ \dot{\rho}_0 = -\varepsilon(2g\rho_0 + b\rho_1\sin\Theta) + (\gamma_6\cos\Theta + \gamma_5\sin\Theta)\rho_1^3, \\ \dot{\Theta} = \varepsilon(\frac{\rho_0}{\rho_1}\cos\Theta - b\frac{\rho_1}{\rho_0}\cos\Theta - (\gamma_6\sin\Theta - \gamma_5\cos\Theta)\frac{\rho_1^3}{\rho_0}),\end{gathered} \tag{2.9}$$

которую следует дополнить уравнением

$$\dot{\varphi}_1 = \sigma_1 + \varepsilon\frac{\rho_0}{\rho_1}\cos\Theta.$$

Замкнутая подсистема дифференциальных уравнений (2.9) при $\gamma_6 \neq 0$ имеет состояние равновесия

$$\Theta = \Theta_*, \rho_1 = \eta_*, \rho_0 = \eta_0 = \frac{|\gamma_6|}{2g}\eta_*^3,$$

где η_*, Θ_* — корни уравнений $P_1(\eta^2) = 0,\ \sin\Theta = 0$. При этом $\Theta_* = 0$, если $\gamma_6 > 0$ и $\Theta_* = \pi$, если $\gamma_6 < 0$, так как знак произведения $\gamma_6\cos\Theta_*$ должен совпадать со знаком слагаемого $2g\rho_0$ $(\rho_0, g > 0)$.

Пусть теперь $\gamma_6 = 0$. Тогда при переходе от системы дифференциальных уравнений (2.7) к системе аналогичной (2.9) вместо замены (2.8) лучше использовать следующую

$$y_1 = \rho_1\exp(i\varphi_1),\ y_0 = iu_0\exp(i\varphi_1),\ u_0 = u_1 + iu_2,\ \varphi_1 = \varphi_1(t) \in R.$$

В результате имеем систему дифференциальных уравнений в R^3

$$\begin{gathered}\dot{\rho}_1 = -\varepsilon u_2,\ \dot{u}_1 = \varepsilon(\frac{u_2}{\rho_1} - 2g)u_1, \\ \dot{u}_2 = -\frac{u_1u_2}{\rho_1} + \varepsilon[-2gu_2 + b\rho_1 - \gamma_5\rho_1^3].\end{gathered} \tag{2.10}$$

которую следует дополнить уравнением

$$\dot{\varphi}_1 = \sigma_1 + (\varepsilon u_1)/\rho_1.$$

Замкнутая подсистема (2.10) имеет состояние равновесия $u_1 = u_2 = 0, \rho_1 = \sqrt{b/\gamma_5}$, если конечно, $b\gamma_5 > 0$. Более детальное изложение исследования нормальной формы в тригонометрическом виде можно найти в работе [10].

3. Обоснование основного результата

В этом разделе речь пойдет о доказательстве теоремы 3, которая была сформулирована в п. 2. Для этого потребуются некоторые преобразования, связанные с необходимостью переписать дифференциальное уравнение (1.3) в иной форме.

В силу предположения 5 и разрешимости задачи Коши (1.3), (1.2) любое ее решение может быть записано в виде

$$u(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t,\varepsilon)e_k,$$

где $u_k(t,\varepsilon) = (u(t,\varepsilon), h_k)$. Функции $u_k(t,\varepsilon)$ дифференцируемы. Разрешимость задач Коши (1.3), (1.2) влекут также за собой сходимость рядов

$$\sum_{j=2}^{\infty} u_j(t,\varepsilon)\sigma_j^2 e_j,\ \sum_{j=2}^{\infty} \dot{u}_j(t,\varepsilon)\sigma_j e_j,\ \sum_{j=2}^{\infty} \ddot{u}_j(t,\varepsilon)e_j.$$

Последние утверждения вытекают из предположений 3,4. Сходимость рядов понимаем в смысле нормы пространства H.

В предыдущих разделах было построено приближенное периодическое решение дифференциального уравнения (1.3) с точностью до $o(\varepsilon^2)$. Для этого была использована сумма (2.1), в которой к настоящему моменту определены первые два слагаемых. Рассмотрим сумму из них, но в другой форме записи. Положим,

$$u_a(y_1,\overline{y_1},y_0,\overline{y_0},\varepsilon) = \varepsilon u_1(y_1,\overline{y}_1) + \varepsilon^2 u_2(y_1,\overline{y_1},y_0,\overline{y_0}), \tag{3.1}$$

где, как уже отмечалось ранее,

$$\begin{gathered} y_1 = y_1(t) = w_1(\varepsilon t)\exp(i\sigma_1 t),\ w_1(s) = z_1(s), \\ y_0 = y_0(t) = w_0(\varepsilon t)\exp(i\sigma_1 t),\ w_0(s) = z_1'(s),\ u_1(y_1,\overline{y}_1) = (y_1+\overline{y}_1)e_1, \\ u_2(y_1,\overline{y}_1,y_0,\overline{y}_0) = p^2 y_1^2 + p_0 y_1\overline{y}_1 + \overline{p}_2 y_1^2 - 2i\sigma_1[(y_0-\overline{y}_0)+g(y_1-\overline{y}_1)]e_0, \end{gathered}$$

а элементы $p_2, p_0, \overline{p}_2$ были определены в п. 2.

Из построений п. 2 вытекает справедливость утверждения.

Теорема 4. *Пусть $y_1 = y_1(t), y_0 = y_0(t)$ решения системы дифференциальных уравнений (2.7). Тогда сумма (3.1) задает приближенное решение уравнения (1.3). Функция $u_a(t)$ удовлетворяет уравнению (1.3) с точностью до слагаемых, имеющих порядок $o(\varepsilon^2)$.*

Из этого утверждения вытекает, что если $y_{1*}(t), y_{0*}(t)$ периодическое решение системы (2.7), то $u_a(y_{1*}(t),\overline{y}_{1*}(t),y_{0*}(t),\overline{y}_{0*}(t),\varepsilon)$ приближенное решение уже уравнения (1.3). Равенство (3.1) задает «приближенное» интегральное многообразие для решений уравнения (1.3).

Будем искать такие точные решения дифференциального уравнения (1.3), для которых справедливо равенство

$$u(t,\varepsilon) = u_a(y_1,\overline{y}_1,y_0,\overline{y}_0,\varepsilon) + \varepsilon^2 w(t,\varepsilon),$$

где $w(t,\varepsilon) = \sum\limits_{j=3}^{n} w_j(t,\varepsilon)e_j$, комплекснозначные функции $y_0 = y_0(t,\varepsilon), y_1 = y_1(t,\varepsilon)$ удовлетворяют уже не системе дифференциальных уравнений (2.7), а уточненной системе

$$\begin{gathered} \dot{y}_1 = i\sigma_1 y_1 + \varepsilon y_0 + \varepsilon^2\Phi_1(y_1,\overline{y}_1,y_0,\overline{y}_0,w,\dot{w},\varepsilon), \\ \dot{y}_0 = i\sigma_1 y_0 + \varepsilon[-2gy_0 - by_1 + (\gamma_5+i\gamma_6)y_1|y_1|^2] + \varepsilon^2\Phi_0(y_1,\overline{y}_1,y_0,\overline{y}_0,w,\dot{w},\varepsilon), \end{gathered} \tag{3.2}$$

а $w_j(t,\varepsilon)$, в свою очередь, счетной системе дифференциальных уравнений

$$\ddot{w}_j + \sigma_j^2 w_j + 2g\varepsilon\dot{w}_j = \Phi_j, \tag{3.3}$$

где $j = 2,3,\dots, k = 0,1,2,\dots$ Наконец,

$$\Phi_k(y_1,\overline{y}_1,y_0,\overline{y}_0,w,\dot{w},\varepsilon) = (\Phi,h_k),\ k = 0,1,2,3,\dots,\ w = (w_2,w_3,\dots),\ \dot{w} = (\dot{w}_2,\dot{w}_3,\dots).$$

Наконец, при $\varepsilon \neq 0$

$$\begin{gathered} \Phi = \Phi(y_1,\overline{y}_1,y_0,\overline{y}_0,w,\dot{w},\varepsilon) = \varepsilon^{-2}[F_2(u,\dot{u}) - F_2(v_1,\dot{v}_1) + F_3(u,\dot{u}) + \\ +\varepsilon^2(b_2(u,\dot{u},\varepsilon^2) + b_3(u,\dot{u},\varepsilon^2))],\ v_1 = \varepsilon(y_1+\overline{y}_1)e_1. \end{gathered}$$

В последней формуле положим $\Phi_{2j} = \dfrac{\partial}{\partial\varepsilon}(\Phi_j(y_1, \overline{y}_1, y_0, \overline{y}_0, w, \dot{w}, \varepsilon))|_{\varepsilon=0}$. Тогда дифференциальные уравнения (3.3) можно переписать в уточненной форме

$$\ddot{w}_j + 2g\varepsilon\dot{w}_j + \sigma_j^2 w_j - \varepsilon\Phi_{2j} = \varepsilon^2\Psi_j, \tag{3.4}$$

где $\Psi_j = \Psi_j(y_1, \overline{y}_1, y_0, \overline{y}_0, w, \dot{w}, \varepsilon)$, $w = (w_2, w_3, \ldots)$, $\dot{w} = (\dot{w}_2, \dot{w}_3, \ldots)$. Подчеркнем, что в силу предположений 3,4 и выбора $w, \dot{w}$ (имеется в виду сходимость соответствующих рядов) у функционалов Ψ_j существуют непрерывные частные производные $\dfrac{\partial\Psi_j}{\partial w_k}, \dfrac{\partial\Psi_j}{\partial\dot{w}_k}, k, j = 2, 3, \ldots$ Эти производные удовлетворяют условию Липшица относительно векторных переменных $w = (w_2, w_3, \ldots)$, $\dot{w} = (\dot{w}_2, \dot{w}_3, \ldots)$, а также $y_0, \overline{y}_0, y_1, \overline{y}_1$.

От системы дифференциальных уравнений второго порядка (3.4) достаточно традиционным способом перейдем к системе уравнений первого порядка. Положим

$$w_j = -\frac{v_{j1}}{\sigma_j},\ \dot{w}_j = v_{j2},\ j = 2, 3, \ldots$$

В результате получим систему

$$\dot{v}_{j1} = -\sigma_j v_{j2}, \quad \dot{v}_{j2} = \sigma_j v_{j1} + \varepsilon\Phi_{2j} + \varepsilon^2\Psi_j, \tag{3.5}$$

$$\Phi_{2j} = \Phi_{2j}(y_1, \overline{y}_1, y_0, \overline{y}_0, v_1, \overline{v}_1, v_2, \overline{v}_2),\ \Psi_j = \Psi_j(y_1, \overline{y}_1, y_0, \overline{y}_0, v_1, \overline{v}_1, v_2, \overline{v}_2),$$
$$v_1 = (v_{21}, v_{31}, \ldots),\ v_2 = (v_{22}, v_{32}, \ldots),\ \overline{v}_1 = (\overline{v}_{21}, \overline{v}_{31}, \ldots),\ \overline{v}_2 = (\overline{v}_{22}, \overline{v}_{32}, \ldots).$$

Подчеркнем, что в силу предшествующих предположений и замен сходятся ряды

$$\sum_{j=2}^{\infty} v_{jm}\sigma_j e_j,\ \sum_{j=2}^{\infty} \dot{v}_{jm} e_j,\ m = 1, 2$$

в смысле нормы H_k. Продолжим преобразования и положим

$$\eta_j = v_{j1} + iv_{j2},\ \overline{\eta}_j = v_{j1} - iv_{j2},\ v_{j1} = \frac{1}{2}(\eta_j + \overline{\eta}_j),\ \overline{v}_{j2} = \frac{1}{2i}(\eta_j - \overline{\eta}_j),\ j = 2, 3, \ldots.$$

В результате последних взаимооднозначных замен получим систему уравнений для комплекснозначных функций $\eta_j = \eta_j(t)$ эквивалентную системе (3.5)

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_j &= i\sigma_j\eta_j - \varepsilon g\eta_j + \varepsilon g\overline{\eta}_j + \varepsilon G_{2j} + \varepsilon^2 G_{3j}, \\ \dot{\overline{\eta}}_j &= i\sigma_j\overline{\eta}_j - \varepsilon g\overline{\eta}_j + \varepsilon g\eta_j + \varepsilon\overline{G}_{2j} + \varepsilon^2\overline{G}_{3j}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

где, конечно, $j = 2, 3, \ldots, G_{3j} = i\Psi_j$, и, следовательно,

$$G_{3j} = G_{3j}(y_1, \overline{y}_1, y_0, \overline{y}_0, \eta, \overline{\eta}, \varepsilon),\ \eta = (\eta_2, \eta_3, \ldots),\ \overline{\eta} = (\overline{\eta}_2, \overline{\eta}_3, \ldots).$$

Наконец, $G_{2j} = i\Phi_{2j}$. Поэтому

$$G_{2j} = y_1\sum_{k=2}^{\infty} g_{jk}\eta_k + \overline{y}_1\sum_{k=2}^{\infty} l_{jk}\eta_k + \text{к.с.},$$

где $l_{jk}, g_{jk} \in H_k$. Через к.с. обозначены комплексно сопряженные слагаемые по отношению к выписанным в явном виде.

Еще одно преобразование касается системы дифференциальных уравнений (3.6). Положим

$$\eta_j = y_j + \varepsilon[\nu_j \overline{y}_j + y_1 \sum_{k=2}^{\infty} \beta_{jk} y_k + \overline{y}_1 \sum_{k=2}^{\infty} \gamma_{jk} y_k + \text{к.с.}], \tag{3.7}$$

где через к.с. обозначены слагаемые, которые комплексно сопряжены к последним четырем слагаемым в правой части замены (3.7), $j = 2, 3, \dots$

Пусть $\eta = (\eta_2, \eta_3, \dots), \overline{\eta} = (\overline{\eta}_2, \overline{\eta}_3, \dots),\ y = (y_2, y_3, \dots),\ \overline{y} = (\overline{y}_2, \overline{y}_3, \dots)$. Будем считать, что $y, \eta \in W_1$, если в H_k сходятся ряды

$$\sum_{j=2}^{\infty} i\eta_j \sigma_j e_j,\ \sum_{j=2}^{\infty} -i\overline{\eta}_j \sigma_j e_j, \sum_{j=2}^{\infty} iy_j \sigma_j e_j,\ \sum_{j=2}^{\infty} -i\overline{y}_j \sigma_j e_j,$$

то есть W_1 дискретный аналог H_{kA}.

Замены (3.7) приводят систему дифференциальных уравнений (3.6) к системе уже следующего вида

$$\begin{aligned} \dot{y}_j &= i\sigma_j y_j - \varepsilon g y_j + \varepsilon^2 H_j, \\ \dot{\overline{y}}_j &= -i\sigma_j \overline{y}_j - \varepsilon g \overline{y}_j + \varepsilon^2 \overline{H}_j, \end{aligned} \tag{3.8}$$

если коэффициенты в формулах (3.7) выбрать таким образом, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{aligned} -i\sigma_k \nu_k &= i\sigma_k \nu_k + g,\ k = 2, 3, \dots, \\ (i\sigma_1 + i\sigma_k)\beta_{jk} &= i\sigma_j \beta_{jk} + g_{jk}, \\ (-i\sigma_1 + i\sigma_k)\gamma_{jk} &= i\sigma_j \gamma_{jk} + l_{jk},\ k = 2, 3, \dots \end{aligned} \tag{3.9}$$

дополненные сопряженными равенствами. Первое уравнение системы (3.9) имеет решение $\nu_j = -(g/(2\sigma_j))$, а второе и третье –

$$\beta_{jk} = \frac{g_{jk}}{i(\sigma_1 + \sigma_k - \sigma_j)},\ \gamma_{jk} = \frac{l_{jk}}{i(-\sigma_1 + \sigma_k - \sigma_j)}.$$

Знаменатели последних равенств отличны от нуля и при этом квалифицированно в силу предположения 7. Напомним, что в силу этого предположения справедливы неравенства $|\sigma_j - \sigma_k \pm \sigma_1| \geq \sigma_0 > 0$, где σ_0 — положительная постоянная.

Систему дифференциальных уравнений (3.8) дополним уравнениями (3.2). В результате получим счетную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= i\sigma_1 y_1 + \varepsilon y_0 + \varepsilon^2 H_1, \\ \dot{y}_0 &= i\sigma_1 y_0 + \varepsilon[-2gy_0 - by_1 + (\gamma_5 + i\gamma_6) y_1 |y_1|^2] + \varepsilon^2 H_0, \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\dot{y}_j = i\sigma_j y_j - \varepsilon g y_j + \varepsilon^2 H_j. \tag{3.11}$$

Здесь $j = 2, 3, \dots, H_0 = \Phi_0(y_1, \overline{y}_1, y_0, \overline{y}_0, y, \overline{y}, \varepsilon), H_1 = \Phi_1(y_1, \overline{y}_1, y_0, \overline{y}_0, y, \overline{y}, \varepsilon), H_j = H_j(y_1, \overline{y}_1, y_0, \overline{y}_0, y, \overline{y}, \varepsilon)$. Наконец, $y = (y_2, y_3, \dots) \in W_1$. Подчеркнем, что систему дифференциальных уравнений (3.10), (3.11) дополняют уравнения для комплексно сопряженных функций $\overline{y}_m(t), m = 0, 1, 2, \dots$.

Наряду с системой (3.10), (3.11) рассмотрим ее «укороченный» вариант

$$\dot{y}_j = i\sigma_j y_j - \varepsilon g y_j,\ j = 2, 3, \dots \tag{3.12}$$

$$\dot{y}_0 = i\sigma_1 y_0 + \varepsilon(-2gy_0 - by_1 + (\gamma_5 + i\gamma_6)y_1|y_1|^2),\ \dot{y}_1 = i\sigma_1 y_1 + \varepsilon y_0, \tag{3.13}$$

которая получена отбрасыванием в системе (3.10), (3.11) последних слагаемых.

Система дифференциальных уравнений (3.12), (3.13) имеет периодическое решение (см. п. 2)

$$y_1 = \eta_* \exp(i(\sigma_1 + \omega_*\varepsilon)t),\ y_0 = i\omega_*\eta_* \exp(i(\sigma_1 + \omega_*\varepsilon)t),\ y_j \equiv 0,\ j = 2, 3, \ldots.$$

Здесь η_* — простой положительный корень уравнения $P_1(\eta^2) = 0,\ \omega_* = (\gamma_6\eta_*)/2g$, если $\gamma_6 \neq 0$. При $\gamma_6 = 0,\ \omega_* = 0$, а η_*– положительный корень уравнения $P_2(\eta^2) = 0$.

Покажем, что система (3.10), (3.11) имеет цикл близкий к циклу «укороченной» системы (3.11), (3.12). Для этого воспользуемся результатами работ [18-21]. Преобразуем обе системы (3.10), (3.11), а также (3.12), (3.13), переписав их в тригонометрической форме. В результате этих преобразований получим две следующие системы. Первая из них соответствует «укороченной» системе (3.12), (3.13)

$$\dot{y}_j = i\sigma_j y_j - \varepsilon g y_j,\ \dot{\overline{y_j}} = -i\sigma_j \overline{y}_j - \varepsilon g \overline{y}_j, \tag{3.14}$$

$$\begin{gathered}\dot{\rho}_1 = \varepsilon G_1,\ \dot{\rho}_0 = \varepsilon G_0,\ \dot{\Theta} = \varepsilon G_2,\\ \dot{\psi}_1 = \sigma_1 + \varepsilon\frac{\rho_0}{\rho_1}\cos\Theta,\end{gathered} \tag{3.15}$$

где

$$\begin{gathered}G_1 = \rho_0 \sin\Theta,\ G_0 = -2g\rho_0 - \rho_1 b \sin\Theta + (\gamma_5 \sin\Theta + \gamma_6\cos\Theta)\rho_1^3,\\ G_2 = \frac{\rho_0}{\rho_1}\cos\Theta - b\frac{\rho_1}{\rho_0}\cos\Theta - (\gamma_6\sin\Theta - \gamma_5\cos\Theta)\frac{\rho_1^3}{\rho_0}.\end{gathered}$$

Система дифференциальных уравнений (3.14), (3.15) имеет инвариантный тор

$$\begin{gathered}y_j = 0,\ \rho_1 = \eta_*,\ \rho_0 = \eta_0 = \frac{\gamma_6\cos\Theta_*}{2g}\eta_*^2,\\ \psi_1(t) = (\sigma_1 + \varepsilon\frac{\eta_0}{\eta_*}\cos\Theta_*)t + \psi_0,\ \psi_0 \in R,\end{gathered}$$

где, как и ранее, η_* — простой (или один из них) корень уравнения $P_1(\eta^2) = 0, \sin\Theta_* = 0$. Напомним, что $\Theta_* = 0$ при $\gamma_6 > 0$ и $\Theta_* = \pi$ при $\gamma_6 < 0$. Случаи $\gamma_6 = 0$ и $\gamma_5 = 0$ разбираются отдельно и аналогично.

Полная система дифференциальных уравнений (3.10), (3.11) перепишется в аналогичной форме

$$\begin{gathered}\dot{y}_j = i\sigma_j y_j - \varepsilon g y_j + \varepsilon^2 H_j,\ \dot{\overline{y_j}} = -i\sigma_j\overline{y}_j - \varepsilon g\overline{y}_j + \varepsilon^2\overline{H}_j,\\ \dot{\rho}_1 = \varepsilon G_1 + \varepsilon^2 G_{10},\ \dot{\rho}_0 = \varepsilon G_0 + \varepsilon^2 G_{00},\ \dot{\Theta} = \varepsilon G_2 + \varepsilon^2 G_{20},\\ \dot{\psi}_1 = \sigma_1 + \varepsilon\frac{\rho_0}{\rho_1}\cos\Theta + \varepsilon^2 G_{30},\end{gathered} \tag{3.16}$$

где теперь $H_j = H_j(y, \overline{y}, \rho_1, \rho_0, \Theta, \psi_1),\ j = 2, 3, \ldots,\ G_{00} = G_{00}(y, \overline{y}, \rho_1, \rho_0, \Theta, \psi_1),\ G_{10} = G_{10}(y, \overline{y}, \rho_1, \rho_0, \Theta, \psi_1),\ G_{20} = G_{20}(y, \overline{y}, \rho_1, \rho_0, \Theta, \psi_1),\ G_{30} = G_{30}(y, \overline{y}, \rho_1, \rho_0, \Theta, \psi_1),\ y = (y_2, y_3, \ldots),\ \overline{y} = (\overline{y}_2, \overline{y}_3, \ldots)$. Все эти функции по переменной ψ_1 имеют период 2π.

Положим

$$\begin{gathered}y_j = z_j,\ j = 2, 3, \ldots, \rho_1 = \eta_* + \varepsilon v_1,\\ \rho_0 = \eta_0 + \varepsilon v_0,\ \Theta = \Theta_* + \varepsilon v_{-1},\ v = colon(v_1, v_0, v_{-1}).\end{gathered}$$

В новых переменных $z_j, v_1, v_0, v_{-1}, \psi_1$ система дифференциальных уравнений (3.14), (3.15) приобретает вид

$$\dot{z}_j = i\sigma_j z_j - \varepsilon g z_j, \ \dot{\overline{z_j}} = -i\overline{\sigma}_j \overline{z}_j - \varepsilon g \overline{z}_j, \tag{3.17}$$

$$\dot{v} = \varepsilon B_0 v + \varepsilon^2 P_1(v, \varepsilon), \ \dot{\psi}_1 = \sigma_1 + \varepsilon \frac{\eta_0}{\eta_*} \cos\Theta_* + \varepsilon^2 Q_1, \tag{3.18}$$

где $B_0 = \left\{\dfrac{\partial F_m}{\partial v_k}\right\}_{v=0}$, $(m, k = 1, 0, -1)$, а через F_1, F_0, F_{-1} обозначены правые части замкнутой подсистемы из трех первых уравнений системы (3.15). Через εB_0 обозначена матрица Якоби подсистемы (3.14), вычисленная в точке $\rho_1 = \eta_*, \rho_0 = \eta_0, \Theta = \Theta_*$. Аналогично перепишется и система дифференциальных уравнений (3.15)

$$\begin{aligned} z_j &= i\sigma_j z_j - \varepsilon g z_j + \varepsilon^2 P_j, \\ \dot{\overline{z_j}} &= -i\overline{\sigma}_j \overline{z}_j - \varepsilon g \overline{z}_j + \varepsilon^2 \overline{P}_j, \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\dot{v} = \varepsilon B_0 v + \varepsilon^2 P_0, \ \dot{\psi}_1 = \sigma_1 + \varepsilon \frac{\eta_0}{\eta_*} \cos\Theta_* + \varepsilon^2 Q_2. \tag{3.20}$$

В равенствах (3.18),(3.19),(3.20) $j = 2, 3, \dots, P_j = P_j(v, z, \overline{z}, \psi_1, \varepsilon), \overline{P}_j(v, z, \overline{z}, \psi_1, \varepsilon)$, $Q_1(v, z, \overline{z}, \psi_1, \varepsilon), Q_2(v, z, \overline{z}, \psi_1, \varepsilon)$ – гладкие функционалы (функции) своих переменных, $z = (z_2, z_3, \dots), \overline{z} = (\overline{z}_2, \overline{z}_3, \dots)$. Наконец, $P_1 = P_1(v, z), P_0 = P_0(v, z, \overline{z}, \psi_1, \varepsilon)$ гладкие вектор-функции со значениями в R^3. При этом P_0, P_j по переменной ψ_1 имеют период 2π.

Систему дифференциальных уравнений (3.19), (3.20) можно для удобства дальнейших ссылок на результаты работ [18-21] переписать как абстрактное дифференциальное уравнение в W_1. Положим

$$z_j = x_j + iy_j, \ j = 2, 3, \dots, \ q = (v_1, v_0, v_{-1}, x_2, y_2, x_3, y_3, \dots) \in W_1.$$

Напомним, что $q \in W_1$ означает, что сходится ряд

$$\sum_{j=2}^{\infty} (x_j + y_j)\sigma_j e_j.$$

Норму в пространстве W_1 можно определить равенством

$$||q||^2 = \sigma_1^2 v_0^2 + \sigma_1^2 v_1^2 + v_{-1}^2 + \sum_{j=2}^{\infty} \sigma_j^2 (x_j^2 + y_j^2).$$

После введения таких обозначений систему (3.19), (3.20) можно переписать еще один раз. Итак

$$\dot{q} = B(\varepsilon) q + \varepsilon^2 Q(q, \psi_1, \varepsilon), \tag{3.21}$$

$$\dot{\psi}_1 = (\sigma_1 + \varepsilon \frac{\eta_0}{\eta_1} \cos\Theta_*) + \varepsilon^2 Q_1(q, \psi_1, \varepsilon). \tag{3.22}$$

В силу предшествующих предположений нелинейный оператор Q и функционал Q_1 непрерывно дифференцируемы по переменным q, ψ_1 в смысле Фреше и соответствующие производные удовлетворяют условиям Липшица. Линейный оператор $B(\varepsilon)$ действует из пространства W_1 в W (дискретный аналог H) и определен равенством $B(\varepsilon) = \mathrm{diag}\,(\varepsilon B_0, B_2(\varepsilon), B_3(\varepsilon), \ldots)$, где трехмерная матрица B_0 была определена ранее, а

$$B_j(\varepsilon) = \begin{pmatrix} -\varepsilon g & -\sigma_j \\ \sigma_j & -\varepsilon g \end{pmatrix},\ j = 2, 3, \ldots$$

Линейный оператор $B(\varepsilon)$ порождает группу линейных ограниченных операторов класса C_0 [14;§3,п.7,§7, п.2]. В частности, этот оператор имеет счетное множество собственных значений $\mu_{-1}, \mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$, где $\mu_j = -\varepsilon g \pm i\sigma_j,\ j = 2, 3, \ldots$, а μ_{-1}, μ_0, μ_1 определяются как собственные значения матрицы εB_0. Для всех μ_k выполнено условие $Re\mu_k \neq 0$.

Из всего выше отмеченного вытекает, что если отбросить последние слагаемые, в обоих уравнениях системы (3.21), (3.22), то она имеет инвариантное многообразие

$$q = 0, \psi_1 = (\sigma_1 + \varepsilon\frac{\eta_0}{\eta_*}\cos\Theta_*)t + \psi_0,\ \psi_0 \in R.$$

Система дифференциальных уравнений (3.21), (3.22) имеет инвариантный тор. (см. теорему о возмущениях инвариантных торов из работ [18-21]) $q = \varepsilon^2 M(\psi_1, \varepsilon)$, где функция M со значениями в W_1 непрерывно дифференцируема по ψ_1 и ε. По переменной ψ_1 имеет период 2π. В переменных $y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots$, соответствующий тор будет определяться уравнениями

$$y_1 = \eta_* \exp(i\psi_1) + \varepsilon^2 Y_1(\psi_1, \varepsilon),\ \ y_0 = i\eta_0 \exp(i\psi_1) + \varepsilon^2 Y_0(\psi_1, \varepsilon), y_j = \varepsilon^2 Y_j(\psi_1, \varepsilon),\ \ j = 2, 3, \ldots$$

Здесь функции $Y_j(\psi_1, \varepsilon)$ зависят непрерывно дифференцируемым образом от ψ_1, ε, а также по переменной ψ_1 имеют период 2π. Выше везде речь шла об «одномерном» торе, который обычно называют циклом. Последнее означает, что результаты работ [18-21] были использованы в относительно частном случае.

Результаты, изложенные в работах [18-21], предполагают определенную гладкость потока (нелинейной группы или полугруппы), порождаемого решениями задачи Коши для абстрактного уравнения (системы) (3.21), (3.22). Отметим, что она входит в класс абстрактных уравнений, рассмотренных, например, в работе [15]. Иные ссылки можно найти в упомянутой работе (см. также [26]). В работе [15] вопрос о разрешимости задачи Коши и свойствах ее решения сведен к исследованию существования решения достаточно стандартного интегрального уравнения, которое изучается на базе применения метода последовательных приближений и, следовательно, необходимые утверждения о гладкости по параметру ε и начальным условиям доказываются стандартным образом (см., например, §3.1, с. 64-67 из учебного пособия [18], а также §3 из монографии [21]).

Прикладные аспекты данной задачи были изложены в докладах на IX, X съездах по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики в Нижнем Новгороде (см. [22], где изложены материалы последнего из этих двух докладов).

4. Заключение

В работе показано, что в случае близком к резнансу 1:1 могут возникнуть незатухающие колебания. Это происходит при скоростях меньших чем скорость флаттера. При этом с формальной точки зрения нулевое состояние равновесия остается устойчивым. Аналогичная картина имеет место при реализациях резонансов 1:2 и 1:3 (см., например, [7]). Подчеркнем, что такие эффекты имеют место при малом демпфировании (трении). Выводы этой работы, а также работы [7], не противоречат данным экспериментов. В монографии [1;гл. 4] отмечалось, что незатухающие колебания пластинки в сверхзвуковом потоке газа возникали и при докритических скоростях. Более детальное изложение прикладных аспектов полученных результатов можно найти в работах [8, 22, 25].

Список цитируемых источников

1. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. — М.: Физматлит, 1961. — 337 с.
2. *Гукенхеймер Дж.,Холмс Ф.* Нелинейные колебания динамических систем и бифуркации векторных полей. — Москва-Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2002. — 559 с.
3. *Вольмир А.С.* Оболочки в потоке жидкости и газа. — М.: Наука, 1979. — 320 с.
4. *Монвель Л.,Чуешов И.Д.* О колебаниях кармановесной пластинки в потенциальном потоке газа // Известия РАН, сер. матем. — 1999. — Т. 63. — №2 — С. 3–28.
5. *Куликов А.Н., Либерман Б.Д.* О новом подходе к исследованию задач нелинейного панельного флаттера // Вестник Яросл.-го ун-та. / Под ред. Ю.С. Колесова. — Ярославль: ЯрГУ, 1976. — С. 118–133.
6. *Колесов В.С., Колесов Ю.С., Куликов А.Н., Федик И.И.* Об одной математической задаче теории упругой устойчивости // Прикл. математика и механика. — 1978. — Т. 42. — №3. — С. 458–465.
7. *Куликов А. Н.* Бифуркации малых периодических решений в случае близком к резонансу 1:2 для одного класса нелинейных эволюционных уравнений // Динамические системы. — Т.2(30). — №3-4. — С. 241–258.
8. *Куликов А.Н.* Бифуркация автоколебаний пластинки при малом коэффициенте демпфирования в свехзвуковом потоке газа // Прикл. математика и механика. — 2009. — Т. 73. — №2. — С. 271–281.
9. *Куликов А.Н.* Резонанс 1:3 — одна из возможных причин нелинейного панельного флаттера // Журнал вычислительной математики и мат. физики. — 2011. — Т. 51. — №7. — С. 1266–1279.
10. *Куликов А.Н.* Нелинейный панельный флаттер: опасность жесткого возбуждения колебаний // Дифференциальные уравнения. — 1992. — Т. 28. — №6. — С. 1080–1082.
11. *Куликов А.Н.* Об одном аналоге бифуркационной теоремы Хопфа в задаче о математическом исследовании нелинейного панельного флаттера при малом коэффициенте затухания // Дифференциальные уравнения. — 1993. — Т. 29. — №5. — С. 780–785.
12. *Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.* Резонансная динамика нелинейных флаттерных систем // Труды МиАН. — 2008. — Т. 261. — С. 154–175.
13. *Куликов А.Н.* Жесткое возбуждение колебаний характерно для флаттера при малом коэффициенте демпфирования // Известия РАЕН Дифференциальные уравнения. — 2006. — Т. 29. — №11. — С. 131–134.
14. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука,1977. — 464 с.
15. *Якубов С.Я.* Разрешимость задачи Коши для абстрактных квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка и их приложения // Труды МиАН. — 1970. — Т. 23. — С. 154–175.
16. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию несамосопряженных операторов. — М.: Наука,1965. — 448 с.
17. *Неймарк М.А.* Линейный дифференциальные операторы. — М.: Наука,1969. — 526 с.
18. *Колесов А.Ю., Куликов А.Н.* Инвариантные торы нелинейных эволюционных уравнений. — Ярославль: Изд-во Яросл. гос. ун-та, 2003. — 105 с.

19. *Колесов А.Ю.,Куликов А.Н., Розов Н.Х.* Инвариантные торы одного класса точечных отображений: принцип кольца // Дифференциальные уравнения. — 2003. — Т. 39. — №5. —С. 584–601.
20. *Колесов А.Ю.,Куликов А.Н., Розов Н.Х.* Инвариантные торы одного класса точечных отображений: сохранение инвариантного тора при возмущениях // Дифференциальные уравнения. — 2003. — Т. 39. — №6. —С. 738–753.
21. *Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений. — М.: Физматлит,2004. — 405 с.
22. *Куликов А.Н.* Нелинейный панельный флаттер. Резонансы собственных частот — одна из возможных причин жесткого возбуждения колебаний // Вестник Нижегородского ун-та. — 2011. — Т. 4. — №2. — С. 193–194.
23. *Dowell E.* Flutter of panels at high supersonic speeds // AIAAJ. Vac. Technol. — 1964. — V. 2. — №10. — P. 1113–1119.
24. *Holmes P.J.,Marsden J.E.* Bifurcations to divergence and flutter in flow induced oscillation - an infinite dimensional analisis // Automatica. — 1978. — V. 14. — №4. — P. 367–384.
25. *Kulikov A. N.* Resonance of proper frequence 1:2 as a reason for hard excitation of oscillations for the plate ultrasonic gas // Тр. Междунар. конгресса ENOC-2008. — Russia,Saint-Petersburg: Saint-Petersburg, 2008. — P. 1636–1643.
26. *Segal I.* Nonlinear Semigroups // Ann. of Math. — 1963. — V. 78. — P. 339–364.
27. *Kato T.* Perturbation theory for linear operators. — Berlin: Springer-Verlag,1966. — 740 c.

Получена 10.04.2013