Динамические системы, вып. 21 (2006), 43–53

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 517.9

Оценки сходимости решений линейного уравнения нейтрального типа [1]

Д. Я. Хусаинов*, Й. Диблик, Е. И. Кузьмич***
* Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко,
Киев 01033. *E-mail: dkh@unicyb.kiev.ua, lenamaks79@mail.ru*
** Zilina University, Zilina 01026, Slovak Republic.
E-mail: josef.diblik@fpv.utc.sk

Аннотация. Рассматривается линейное дифференциально-разностное уравнение нейтрального типа с постоянными коэффициентами $\frac{d}{dt}\left[x(t)-dx(t-\tau)\right]=ax(t)+bx(t-\tau)$, $\tau>0$, $x(t)\in\mathbb{R}$, $t\geq 0$, начальное возмущение которого находится в δ-окрестности положения равновесия. Получена мажорантная оценка отклонения решения уравнения от положения равновесия.

1. Введение

Практические задачи последнего времени вызвали необходимость получения оценок функционирования динамических процессов, описываемых функционально-дифференциальными уравнениями [1–2]. Как правило, получение утверждения об устойчивости или неустойчивости решений для практических задач уже не достаточно. Бывает, что и неустойчивая система на небольшом промежутке времени дает неплохие результаты. Поэтому важным является получение конструктивных оценок сходимости (или расходимости) решений уравнений. Рассмотрим линейное скалярное дифференциально-разностное уравнение нейтрального типа [3, 4]

$$\frac{d}{dt}\left[x(t)-dx(t-\tau)\right]=ax(t)+bx(t-\tau),\ \ \tau>0, x(t)\in R^1, t\geq 0. \tag{1.1}$$

Уравнение может быть как устойчивым, так и неустойчивым. Предполагается, что начальное возмущение находится в δ-окрестности положения равновесия. Требуется получить мажорантную оценку величины отклонения решения $x(t)$ уравнения (1.1) от положения равновесия.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке словацкого фонда VEGA, грант No. 1/3238/06

Здесь и в дальнейшем используются следующие векторные и матричные нормы

$$|A| = \left\{\lambda_{\max}(A^T A)\right\}^{1/2}, \ \|x(t)\|_\tau = \max_{-\tau \le s \le 0} |x(s+t)|,$$
$$\|x(t)\|_{\tau,\beta} = \left\{\int_{-\tau}^{0} e^{\beta s} \left|x(t+s)\right|^2 d\, s\right\}^{1/2}, \tag{1.2}$$

где $\lambda_{\max}(\cdot)$ и $\lambda_{\min}(\cdot)$ — наибольшее и наименьшее собственные числа соответствующих симметричных, положительно определенных матриц.

Для получения оценок возмущений используется метод функционалов Ляпунова-Красовского [5, 6].

2. Оценки сходимости решений устойчивых скалярных уравнений

Рассмотрим линейное уравнение (1.1) в предположении его устойчивости. Имеет место следующий результат.

Теорема 1. *Пусть параметры уравнения (2.1) таковы, что*

$$a + bd - |b + ad| > 0. \tag{2.1}$$

Тогда нулевое решение асимптотически устойчиво и для произвольного решения $x(t)$ справедлива следующая оценка сходимости

$$\|x(t)\|_{\tau,\beta} \le \left[\sqrt{\frac{1+d^2}{g}}\left(|x(0)| + |x(-\tau)|\right) + \|x(0)\|_{\tau,\beta}\right] e^{-\beta t}, \ t \ge 0,$$
$$\textit{где} \ \ \beta = \frac{a + bd - |b + ad|}{(1+d^2) + g\tau}. \tag{2.2}$$

Доказательство. Как было сказано выше, для получения формулы (2.2) используем метод функционалов Ляпунова-Красовского [5,6]. Функционал выбирается в виде

$$V[x(t), t] = e^{\gamma t} h \left[x(t) - dx(t-\tau)\right]^2 + g e^{\gamma t}\int_{-\tau}^{0} e^{\beta s} x^2(t+s) d\, s,$$

где постоянные $h > 0$, $g > 0$, $\gamma > 0$, $\beta > 0$ будут определены в дальнейшем. Поскольку функционал V является однородным относительно h и g, то можно положить $h = 1$. Произведя замену $t + s = \xi$, получим

$$V[x(t), t] = e^{\gamma t}\left[x(t) - dx(t-\tau)\right]^2 + g e^{\gamma t}\int_{t-\tau}^{t} e^{-\beta(t-\xi)} x^2(\xi) d\,\xi, \ g > 0. \tag{2.3}$$

Используя введенные матричные и векторные нормы (1.2), получим для (2.3) следующие двусторонние оценки:

$$ge^{\gamma t}\left\|x(t)\right\|_{\tau,\beta}^2 \le V[x(t),t] \le e^{\gamma t}\left(1+d^2\right)\left[x^2(t)+x^2(t-\tau)\right]+ge^{\gamma t}\left\|x(t)\right\|_{\tau,\beta}^2. \qquad (2.4)$$

Вычислим полную производную функционала (2.3) вдоль решений уравнения (1.1). Она имеет вид

$$\frac{d}{dt}V[x(t),t] = \gamma e^{\gamma t}\left[x(t)-dx(t-\tau)\right]^2 + 2e^{\gamma t}\left[x(t)-dx(t-\tau)\right]\left[-ax(t)+bx(t-\tau)\right]+$$
$$+ge^{\gamma t}\left[x^2(t)-e^{-\beta\tau}x^2(t-\tau)\right]+e^{\gamma t}g(\gamma-\beta)\int\limits_{t-\tau}^{t}e^{-\beta(t-\xi)}x^2(\xi)d\xi.$$

Запишем производную в виде

$$\frac{d}{dt}V\left[x(t),t\right] =$$
$$= -e^{\gamma t}\left(x(t),x(t-\tau)\right)\left\{\begin{bmatrix} 2a-g & -ad-b \\ -ad-b & 2bd+g \end{bmatrix} - \gamma\begin{bmatrix} 1 & -d \\ -d & d^2 \end{bmatrix}\right\}\begin{pmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \end{pmatrix}+$$
$$+e^{\gamma t}g(1-e^{-\beta\tau})x^2(t-\tau)-e^{\gamma t}(\beta-\gamma)\,g\int\limits_{t-\tau}^{t}e^{-\beta(t-\xi)}x^2(\xi)d\,\xi. \qquad (2.5)$$

Условием положительной определенности матрицы

$$S[g] = \begin{bmatrix} 2a-g & -ad-b \\ -ad-b & 2bd+g \end{bmatrix},$$

согласно критерия Сильвестра, является выполнение неравенств

$$\Delta_1 = 2a-g>0,$$
$$\Delta_2 = (2a-g)(2bd+g)-(ad+b)^2>0.$$

Оптимальное значение величины g, т.е. значение, при котором матрица $S[g]$ будет положительно определенной, выберем из условия максимума определителя Δ_2, т.е. из условия

$$\frac{d\Delta_2}{dg} = \frac{d}{dg}\left[(2a-g)(2bd+g)-(ad+b)^2\right]=0.$$

Из этого условия следует, что $g=a-bd$ и, следовательно, получаем

$$S[g] = \begin{bmatrix} a+bd & -(ad+b) \\ -(ad+b) & a+bd \end{bmatrix}.$$

Поскольку при выбранном g имеем

$$\Delta_1 = a + bd \ \text{ и } \ \Delta_2 = (a+bd)^2 - (ad+b)^2,$$

то условия положительной определенности матрицы $S\,[g]$ получают вид

$$a + bd > |ad + b|\,.$$

Из характеристического уравнения матрицы $S[g]$

$$\lambda^2 - 2(a+bd)\lambda + \left[(a+bd)^2 - (ad+b)^2\right] = 0$$

находим $\lambda_{\min}\,(S[g]) = (a+bd) - |ad+b|$. Выберем величины β и γ таким образом, чтобы $\beta - \gamma \geq 0$. Поскольку

$$\lambda_{\max}\,(M) = 1 + d^2, \text{где} \quad M = \left[\begin{array}{cc} 1 & -d \\ -d & d^2 \end{array}\right],$$

то перепишем выражение (2.5) для производной функционала $V\,[x(t),t]$ следующим образом

$$\frac{d}{dt}V[x(t),t] \leq -e^{\gamma t}\left\{[(a+bd) - |b+ad|] - \gamma\left(1+d^2\right)\right\}x^2(t) - \\ - e^{\gamma t}\left\{[(a+bd) - |b+ad|] - \gamma\left(1+d^2\right) - \left(1-e^{-\beta\tau}\right)g\right\}x^2\,(t-\tau) - \\ - e^{\gamma t}\,(\beta-\gamma)\,g\,\|x(t)\|^2_{\tau,\beta} \quad (2.6)$$

Для функционала $V[x(t),t]$ и его производной будут справедливы неравенства (2.4), (2.6). Получим условия, которые необходимо наложить на коэффициенты уравнения и параметры функционала Ляпунова-Красовского, чтобы для полной производной функционала выполнялось неравенство

$$\frac{d}{dt}V[x(t),t] \leq -\varsigma V[x(t),t], \quad \varsigma > 0.$$

Проведем следующие преобразования.

1. Перепишем правую часть неравенства (2.4) в виде

$$-e^{\gamma t}\,\|x(t)\|^2_{\tau,\beta} \leq -\frac{1}{g}V\,[x(t),t] + e^{\gamma t}\frac{1+d^2}{g}x^2(t) + e^{\gamma t}\frac{1+d^2}{g}x^2(t-\tau)$$

и подставим в неравенство (2.6). Получаем

$$\frac{d}{dt}V[x(t),t] \leq -(\beta-\gamma)V[x(t),t] - \\ - e^{\gamma t}\{[(a+bd) - |b+ad|] - \gamma(1+d^2) - (\beta-\gamma)(1+d^2)\}x^2(t) - \\ - e^{\gamma t}\{[(a+bd) - |b+ad|] - \gamma(1+d^2) - (\beta-\gamma)(1+d^2) - (1-e^{-\beta\tau})g\}x^2(t-\tau)$$

И, если коэффициенты уравнения и параметры функционала таковы, что

$$[(a+bd)-|b+ad|]-\gamma\left(1+d^2\right)-(\beta-\gamma)\left(1+d^2\right)-\left(1-e^{-\beta\tau}\right)g>0,$$

или

$$\frac{[(a+bd)-|b+ad|]-\gamma\left(1+d^2\right)-\left(1-e^{-\beta\tau}\right)g}{1+d^2}>\beta-\gamma,$$

то

$$\frac{d}{dt}V\left[x(t),t\right]\leq-\varsigma V\left[x(t),t\right],\quad \varsigma=\beta-\gamma. \tag{2.7}$$

2. Перепишем правую часть неравенства (2.4) в виде

$$-e^{\gamma t}x^2(t)\leq-\frac{1}{1+d^2}V[x(t),t]+e^{\gamma t}x^2(t-\tau)+e^{\gamma t}\frac{g}{1+d^2}\left\|x(t)\right\|^2_{\tau,\beta}$$

и вновь подставим полученное выражение в неравенство (2.6). Получаем

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V[x(t),t]\leq-\frac{[(a+bd)-|b+ad|]-\gamma(1+d^2)}{1+d^2}&V[x(t),t]-\\ &-e^{\gamma t}(1-e^{-\beta\tau})gx^2(t)-\\ &-e^{\gamma t}\left\{(\beta-\gamma)-\frac{[(a+bd)-|b+ad|]-\gamma(1+d^2)}{1+d^2}g\right\}\left\|x(t)\right\|^2_{\tau,\alpha}\end{aligned}$$

Поскольку при $\beta>0$ слагаемое $e^{\gamma t}\left(1-e^{-\beta\tau}\right)g$ всегда положительно, то это неравенство нельзя привести к виду, когда правая часть содержит только член $-\varsigma V\left[x(t),t\right]$.

3. Наконец, перепишем правую часть неравенства (2.4) в виде

$$-e^{\gamma t}x^2(t-\tau)\leq-\frac{1}{1+d^2}V[x(t),t]+e^{\gamma t}x^2(t)+e^{\gamma t}\frac{g}{1+d^2}\left\|x(t)\right\|^2_{\tau,\beta}$$

и подставим полученное выражение в (2.6). Получаем

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V[x(t),t]\leq-\frac{[(a+bd)-|b+ad|]-\gamma(1+d^2)-(1-e^{-\beta\tau})g}{1+d^2}&V[x(t),t]-\\ &-e^{\gamma t}(1-e^{-\beta\tau})gx^2(t)-\\ -e^{\gamma t}g\left\{(\beta-\gamma)-\frac{[(a+bd)-|b+ad|]-\gamma(1+d^2)-(1-e^{-\beta\tau})g}{1+d^2}\right\}&\left\|x(t)\right\|^2_{\tau,\alpha}\end{aligned}$$

И, если параметры таковы, что

$$\frac{[(a+bd)-|b+ad|]-\gamma\left(1+d^2\right)-\left(1-e^{-\beta\tau}\right)g}{1+d^2}\leq\beta-\gamma,$$

то

$$\frac{d}{dt}V[x(t),t]\leq-\varsigma V[x(t),t],\ \varsigma=D(\beta)-\gamma, \tag{2.8}$$

где $D(\beta) = \dfrac{[(a+bd) - |b+ad|] - \left(1 - e^{-\beta\tau}\right) g}{1+d^2}$. Решив дифференциальные неравенства (2.7), (2.8), получаем

$$V[x(t), t] \le V[x(0), 0] e^{-\varsigma t}, \quad t \ge 0,$$

$$\varsigma = \begin{cases} \beta - \gamma, & \text{если } \ \beta - \gamma < D(\beta), \\ D(\beta) - \gamma, & \text{если } \ \beta - \gamma \ge D(\beta). \end{cases}$$

Вновь используя двусторонние оценки (2.4) для функционала Ляпунова - Красовского $V[x(t), t]$, запишем

$$e^{\gamma t} g \left\| x(t) \right\|_{\tau,\beta}^2 \le V[x(t), t] \le V[x(0), 0] e^{-\varsigma t} \le$$
$$\le \left\{ \left(1 + d^2\right) \left[x^2(0) + x^2(-\tau)\right] + g \left\| x(0) \right\|_{\tau,\beta}^2 \right\} e^{-\varsigma t}, \ t \ge 0.$$

Отсюда окончательная оценка сходимости решений скалярного уравнения нейтрального типа, полученная с помощью функционала Ляпунова-Красовского, имеет вид

$$\left\| x(t) \right\|_{\tau,\beta} \le \left[\sqrt{\frac{1+d^2}{g}} \left(|x(0)| + |x(-\tau)| \right) + \left\| x(0) \right\|_{\tau,\beta} \right] e^{-\theta(\beta) t}, \quad t \ge 0,$$

$$\theta\left(\beta\right) = \varsigma + \gamma,$$

где функция $\theta\left(\beta\right)$ имеет вид

$$\theta\left(\beta\right) = \min \left\{ \frac{[(a+bd) - |b+ad|] - \left(1 - e^{-\beta\tau}\right) g}{1+d^2}, \beta \right\}. \tag{2.9}$$

Функция $\theta\left(\beta\right)$ представляет собой кусочно непрерывно-дифференцируемую функцию, составленную из двух частей. Первая из них

$$\theta_1\left(\beta\right) = \frac{[(a+bd) - b + ad] - g}{1+d^2} + \frac{g}{1+d^2} e^{-\beta\tau}$$

на промежутке $\beta \ge 0$ является непрерывно дифференцируемой, монотонно убывающей функцией, причем

$$\theta_1\left(0\right) = \frac{[(a+bd) - |b+ad|]}{1+d^2} > 0,$$

$$\lim_{\beta \to +\infty} \theta_1\left(\beta\right) = \frac{[(a+bd) - |b+ad|] - g}{1+d^2}.$$

Вторая функция $\theta_2\left(\beta\right) = \beta$ монотонно возрастающая. Поэтому максимальное значение функции $\theta\left(\beta\right)$ определяется при пересечении этих двух кривых, т.е. является решением уравнения

$$\frac{\left[(a+bd) - |b+ad| - \left(1 - e^{-\beta\tau}\right) g\right]}{1+d^2} = \beta. \tag{2.10}$$

Точное решение уравнения (2.10) найти не удается. Получим приближенное решение этого уравнения, гарантирующее оценку сходимости решения. Для этого заменим функцию $\theta_1(\beta)$ отрезком прямой проходящей через точку $M_0(0, \theta_1(0))$, с угловым коэффициентом, совпадающим с производной функции $\varsigma_1(\beta)$ в точке $\beta = 0$. Он имеет вид

$$\overline{\theta}_1(\beta) = \theta_1'(0)\,\beta + \theta_1(0).$$

Подставляя соответствующие значения параметров, получим

$$\overline{\theta}_1(\beta) = -\frac{g\tau}{1+d^2}\beta + \frac{[(a+bd) - |b+ad|]}{1+d^2}.$$

Поэтому решением уравнения

$$-\frac{g\tau}{1+d^2}\beta + \frac{[(a+bd) - |b+ad|]}{1+d^2} = \beta$$

будет

$$\overline{\beta} = \frac{[(a+bd) - |b+ad|]}{(1+d^2) + g\tau}.$$

Таким образом окончательно получаем утверждение (2.2) теоремы 1. □

3. Оценки сходимости решений неустойчивых скалярных уравнений

Вновь рассмотрим скалярное уравнение (1.1)

$$\frac{d}{dt}\left[x(t) - dx(t-\tau)\right] = -ax(t) + bx(t-\tau), \;\; a > 0, \;\; |d| \neq 1.$$

На этот раз не будем делать предположений, гарантирующих его устойчивость. В этом случае не будем накладывать условие $\gamma > 0$. Поскольку рассматривается линейное уравнение на конечном интервале времени, то даже в случае неустойчивости можно проводить оценки расхождений его решений. Получение оценок расхождения вновь будем получать с использованием функционала (2.3)

$$V[x(t), t] = e^{\gamma t}\left[x(t) - dx(t-\tau)\right]^2 + ge^{\gamma t}\int\limits_{-\tau}^{0} e^{\beta s} x^2(t+s)ds, \;\; g > 0.$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть параметры уравнения (1.1) таковы, что не выполняется*

$$a + bd - |b+ad| > 0$$

а система неравенств (относительно переменных $g > 0$, γ)

$$\gamma + g < 2a, \quad g^2 + g\gamma\left(1 - d^2\right) + 2\left(bd - a\right)g < -\left(ad - b\right)^2 \tag{3.1}$$

имеет решение. Тогда для произвольного решения $x(t)$ уравнения (1.1) справедлива следующая оценка сходимости

$$\left\|x(t)\right\|_{\tau,\beta} \le \left[\sqrt{\frac{1+d^2}{g}}\left(|x(0)| + |x(-\tau)|\right) + \left\|x(0)\right\|_{\tau,\beta}\right]e^{-\theta(\beta,\gamma)t}, \quad t \ge 0, \tag{3.2}$$

$$\theta\left(\beta,\gamma\right) = \min\left\{\frac{\lambda_{\min}\left(S\left[g,\gamma\right]\right) - \left(1 - e^{-\beta\tau}\right)g}{1+d^2} + \gamma, \beta\right\},$$

$$\lambda_{min}(S[g,\gamma]) = \frac{1}{2}\Big\{[2(a+bd) - \gamma(1+d^2)] - \\ - \sqrt{[2(a-bd-g) - \gamma(1-d^2)]^2 + [(ad+b) - \gamma]^2}\Big\}$$

Доказательство. Запишем производную функционала (2.3) в виде

$$\frac{d}{dt}V[x(t)] = \\ = -e^{\gamma t}(x(t), x(t-\tau))\begin{bmatrix} 2a - g - \gamma & -(ad+b) + \gamma d \\ -(ad+b) + \gamma d & 2bd + g - \gamma d^2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \end{pmatrix} + \\ + e^{\gamma t}g(1 - e^{-\beta\tau})x^2(t-\tau) - e^{\gamma t}(\beta - \gamma)g\int_{t-\tau}^{t} e^{-\beta(t-\xi)}x^2(\xi)d\xi$$

Условием положительной определенности матрицы

$$S[g,\gamma] = \begin{bmatrix} 2a - g - \gamma & -\left(ad+b\right) + \gamma d \\ -(ad+b) + \gamma d & 2bd + g - \gamma d^2 \end{bmatrix},$$

согласно критерия Сильвестра, является выполнение неравенств

$$\Delta_1 = 2a - g - \gamma > 0, \\ \Delta_2 = (2a - g - \gamma)(2bd + g - \gamma d^2) - \left[-\left(ad+b\right) + \gamma d\right]^2 > 0.$$

Перепишем их в виде

$$\gamma + g < 2a, \\ g^2 + g\gamma\left(1 - d^2\right) + 2\left(bd - a\right)g < -\left(ad - b\right)^2.$$

Согласно условия теоремы 2, система неравенств имеет решение. Поэтому для полной производной функционала Ляпунова имеет место соотношение

$$\frac{d}{dt}V[x(t), t] \le -e^{\gamma t}\lambda_{min}(S[g,\gamma])[x^2(t) + x^2(t-\tau)] + \\ + e^{\gamma t}g(1 - e^{-\beta\tau})x^2(t-\tau) - e^{\gamma t}(\beta - \gamma)g\|x(t)\|^2_{\tau,\beta} \tag{3.3}$$

где

$$\lambda_{min}(S[g,\gamma]) = \frac{1}{2}\Big\{[2(a+bd)-\gamma(1+d^2)]- \\ -\sqrt{[2(a-bd-g)-\gamma(1-d^2)]^2+[(ad+b)-\gamma]^2}\Big\}$$

И так как матрица $S\,[g,\gamma]$ положительно определенная, то $\lambda_{\min}\,(S\,[g,\gamma])>0$.

Таким образом для функционала $V[x(t),t]$ и его производной будут справедливы неравенства (2.3), (3.3).

Проведем следующие преобразования.

1. Перепишем правую часть неравенства (2.3) в виде

$$-e^{\gamma t}\,\|x(t)\|^2_{\tau,\beta}\le -\frac{1}{g}V\,[x(t),t]+e^{\gamma t}\frac{1+d^2}{g}x^2(t)+e^{\gamma t}\frac{1+d^2}{g}x^2(t-\tau)$$

и подставим в неравенство (3.3). Получаем

$$\frac{d}{dt}V[x(t),t]\le -(\beta-\gamma)V[x(t),t]- \\ -e^{\gamma t}\{\lambda_{min}(S[g,\gamma])-(\beta-\gamma)(1+d^2)\}x^2(t)- \\ -e^{\gamma t}\{\lambda_{min}(S[g,\gamma])\}-(\beta-\gamma)(1+d^2)-(1-e^{-\beta\tau})g\}x^2(t-\tau)$$

И, если параметры уравнения таковы, что

$$\lambda_{\min}\,(S\,[g,\gamma])-(\beta-\gamma)\left(1+d^2\right)-\left(1-e^{-\beta\tau}\right)g>0,$$

то

$$\frac{d}{dt}V\,[x(t),t]\le -\varsigma V\,[x(t),t]\,,\quad \varsigma=\beta-\gamma. \tag{3.4}$$

2. Перепишем правую часть неравенства (2.3) в виде

$$-e^{\gamma t}x^2(t)\le -\frac{1}{1+d^2}V[x(t),t]+e^{\gamma t}x^2(t-\tau)+e^{\gamma t}\frac{g}{1+d^2}\,\|x(t)\|^2_{\tau,\beta}$$

и вновь подставим полученное выражение в неравенство (3.3). Получаем

$$\frac{d}{dt}V[x(t),t]\le -\frac{\lambda_{\min}\,(S\,[g,\gamma])}{1+d^2}V\,[x(t),t]+e^{\gamma t}\left(1-e^{-\beta\tau}\right)gx^2(t-\tau)- \\ -e^{\gamma t}\left\{(\beta-\gamma)\,g-\frac{\lambda_{\min}\,(S\,[g,\gamma])}{1+d^2}g\right\}\|x(t)\|^2_{\tau,\beta}\,.$$

Поскольку при $\beta>0$ слагаемое $e^{\gamma t}\left(1-e^{-\beta\tau}\right)g$ всегда положительно, то неравенство нельзя привести к виду, когда правая часть содержит только отрицательный член $V\,[x(t),t]$.

3. Наконец, перепишем правую часть неравенства (2.3) в виде

$$-e^{\gamma t}x^2(t-\tau) \le -\frac{1}{1+d^2}V[x(t),t] + e^{\gamma t}x^2(t) + e^{\gamma t}\frac{g}{1+d^2}\left\|x(t)\right\|^2_{\tau,\beta}$$

и подставим полученное выражение в (3.3). Получаем

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V[x(t)] \le -\frac{\lambda_{\min}\left(S\left[g,\gamma\right]\right) - \left(1-e^{-\beta\tau}\right)g}{1+d^2}V[x(t),t]-\\ - e^{\gamma t}\left(1-e^{-\beta\tau}\right)gx^2(t)-\\ - e^{\gamma t}g\left\{(\beta-\gamma) - \frac{\lambda_{\min}\left(S\left[g,\gamma\right]\right) - \left(1-e^{-\beta\tau}\right)g}{1+d^2}\right\}\left\|x(t)\right\|^2_{\tau,\alpha}.\end{aligned}$$

И, если параметры таковы, что

$$\frac{\lambda_{\min}\left(S\left[g,\gamma\right]\right) - \left(1-e^{-\beta\tau}\right)g}{1+d^2} \le \beta-\gamma,$$

то

$$\frac{d}{dt}V\left[x(t),t\right] \le -\varsigma V\left[x(t),t\right],$$

$$\varsigma = D_1(\beta) = \frac{\lambda_{\min}\left(S\left[g,\gamma\right]\right) - \left(1-e^{-\beta\tau}\right)g}{1+d^2}. \tag{3.5}$$

Решая оба дифференциальных неравенства (3.4), (3.5), получаем

$$V[x(t),t] \le V[x(0),0]e^{-\varsigma t}, \quad t \ge 0,$$

$$\varsigma = \begin{cases}\beta-\gamma, & \text{если } \ \beta-\gamma < D_1(\beta),\\ D_1(\beta), & \text{если } \ \beta-\gamma \ge D_1(\beta).\end{cases}$$

Вновь используя двусторонние оценки (2.3) для функционала Ляпунова-Красовского $V[x(t),t]$, запишем

$$\begin{aligned}e^{\gamma t}g\left\|x(t)\right\|^2_{\tau,\beta} \le V[x(t),t] \le V[x(0),0]e^{-\varsigma t} \le\\ \le \left\{\left(1+d^2\right)\left[x^2(0)+x^2(-\tau)\right] + g\left\|x(0)\right\|^2_{\tau,\beta}\right\}e^{-\varsigma t}, \ \ t \ge 0.\end{aligned}$$

Отсюда окончательная оценка сходимости решений скалярного уравнения нейтрального типа, полученная с помощью функционала Ляпунова-Красовского, вновь имеет вид

$$\left\|x(t)\right\|_{\tau,\beta} \le \left[\sqrt{\frac{1+d^2}{g}}\left(|x(0)|+|x(-\tau)|\right) + \left\|x(0)\right\|_{\tau,\beta}\right]e^{-\theta(\beta,\gamma)t}, \quad t \ge 0,$$

где $\theta(\beta,\gamma)$ имеет вид

$$\theta(\beta,\gamma)=\min\left\{\frac{\lambda_{\min}\left(S\left[g,\gamma\right]\right)-\left(1-e^{-\beta\tau}\right)g}{1+d^2}+\gamma,\beta\right\}.$$

$\square$

Замечание 1. Можно проверить, что неравенства (3.1) всегда имеют ненулевое решение. Поэтому это требование из условий теоремы можно исключить.

Список цитируемых источников

1. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М., Наука, 1970 – 240 с.
2. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М., Мир, 1984. – 421 с.
3. *Анашкин О.В.* Достаточные условия устойчивости и неустойчивости одного класса нелинейных функционально-дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения, Т.34, №7, 1998. – С.867-876.
4. *Кореневский Д.Г.* Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии. – К., Наукова думка, 1989. – 208 с.
5. *Кожаметов А.Т., Хусаінов Д.Я., Шатирко А.В.* Використання методу функціоналів Ляпунова-Красовського в задачах стабілізації // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки, в.3, 2005. – С.298-304.
6. *Хусаинов Д.Я., Иванов А.Ф., Кожаметов А.Т.* Оценки сходимости решений линейных стационарных систем дифференциально-разностных уравнений с постоянным запаздыванием // Дифференциальные уравнения, Т.41, №8, 2005. – С.1137-1140.

Получено 10.10.2006