Динамические системы, вып. 28 (2010), 48–62

УДК 517.9

Про узагальнені розв'язки однієї задачі векторної оптимізації на транспортних мережах

Т. А. Божанова, П. І. Когут

Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара,
Дніпропетровськ 49050. *E-mail: p.kogut@i.ua, tamara-bozhanova@ukr.net*

Анотація. У даній роботі розглядається гідродинамічна модель для транспортного потоку на мережі. У припущенні, що такий потік є керованим процесом, ставиться задача його оптимізації у векторній формі. Розглянуто випадок, коли цільове відображення діє в лебегів простір та є напівнеперервним зверху на області визначення. Залучаючи ідеологію регуляризації за Тихоновим, введено поняття узагальненого розв'язку задачі векторної оптимізації на мережі. Використовуючи той факт, що множина ефективних розв'язків такої задачі є не порожньою та залучаючи процедуру скаляризації, доведено існування узагальнених розв'язків розглянутої задачі векторної оптимізації.

Ключові слова: транспортний потік на мережі, гідродинамічна модель, векторна оптимізація на мережі, узагальнені розв'язки.

1. Вступ

На сьогодні проблема керування транспортними потоками на мережах стає все більш актуальною. Тому існує досить обширна література, присвячена різним аспектам моделювання таких процесів (див. [1, 5, 6, 7, 8, 15]), знаходженню необхідних умов оптимальності та методів побудови оптимальних законів регулювання транспортних потоків зі скалярними показниками вартості (див. [3, 11, 12]).

У даній роботі головним об'єктом дослідження виступає гідродинамічна модель транспортного потоку на мережі, в основі якої лежить система нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних першого порядку. При цьому вважається, що мережа складається зі скінченної сукупності доріг, які з'єднані певними вузлами (точками сполучення). Припускається, що транспортний потік у вузлах мережі є керованим процесом, де у якості факторів керування виступають елементи матриці розподілу руху, яка відображає переваги водіїв у вузлах мережі.

На відміну від нині існуючих результатів (див.,напр., [3, 11, 12]), будемо вважати, що якість керування транспортним потоком на мережі визначається нескалярним відображенням у нормований простір $L_2(\Omega)$, упорядкований за конусом Λ додатних елементів. За цих припущень доведено, що поставлена задача векторної оптимізації транспортних потоків на мережі допускає існування так званих ефективних розв'язків (див. [9, 2]). Використовуючи загальновідомий метод побудови розв'язків задач векторної оптимізації, а саме застосовуючи процедуру скаляризації, доведемо існування узагальнених розв'язків задачі векторної оптимізації для транспортного потоку на мережі.

2. Основні поняття та позначення

У цьому параграфі наведемо ключові поняття та означення, які будуть необхідні у подальшому. Зокрема, це торкається поняття слабкого розв'язку задачі Коші, поняття ефективного супремума множини відносно слабкої топології простору $L_2(\Omega)$ за конусом додатних елементів Λ та поняття нижньої секвенційної границі відображення.

2.1. Гідродинамічна модель транспортного потоку на мережі

Розглянемо мережу доріг $\Omega = (\mathcal{I}, \mathcal{J})$, де $\mathcal{I}$ — скінченна сукупність ребер, які відповідають дорогам транспортної мережі та є відрізками $I_i = [a_i, b_i] \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, \mathbb{N}$, $\mathcal{J}$ — сукупність вершин, які відповідають вузлам даної мережі. На кожній окремій дорозі рух транспортних засобів підкоряється гідродинамічному закону збереження, який представлений нелінійним диференціальним рівнянням у частинних похідних першого порядку :

$$\partial_t \rho_i(t,\ x) + \partial_x f_i(\rho_i(t,x)) = 0, \ \ \forall\ x \in (a_i,\ b_i),\ \forall\ t \in (0, T], \tag{2.1}$$

$$\rho_i(0,\ x) = \bar{\rho}_i(x), \quad \forall\ x \in [a_i,\ b_i], \tag{2.2}$$

де $\rho_i = \rho_i(t,x) \in [0, \rho_{max,i}]$, $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ — щільність машин на дорозі I_i, $\rho_{max,i}$ — максимально можлива щільність на дорозі I_i, яка відповідає появі затору на даній ділянці мережі; $f_i(\rho) = \rho_i \upsilon_i(\rho)$ — транспортний потік (кількість машин, проїжджаючих за одиницю часу); $\upsilon_i(\rho)$ — швидкість транспортного потоку на дорозі I_i. Будемо вважати, що $\upsilon_i(\rho)$ — неперервно диференційовна, спадна функція аргумента ρ. Нехай для функцій потоку f_i виконуються наступні умови:

$$\begin{cases} f_i \text{ неперервно диференційовані на } \ [0,\ \rho_{max,\,i}], \\ f_i(0) = f_i(\rho_{max,\,i}) = 0, \\ f_i \text{ — строго угнуті функції}, \\ \exists\ \sigma \in (0, \rho_{max,i}) : f_i'(\sigma_i) = 0 \text{ та } (\rho - \sigma_i) f_i'(\rho) < 0,\ \forall\ \rho \neq \sigma_i. \end{cases} \tag{2.3}$$

Відомо, що для існування єдиного розв'язку задачі Коші (2.1)-(2.3) необхідно ввести ряд допоміжних умов, однією з яких є умова ентропійності Кружкова (див. [1, 10, 7, 14]).

Означення 1. Нехай J — вузол з n вхідними дорогами $I_1, \dots, I_n$ з кінцями b_i $(i \in \{1, \dots, n\})$ у вузлі та m вихідними дорогами $I_{n+1}, \dots, I_{n+m}$ з кінцями

a_i $(i \in \{n+1,\dots,n+m\})$ у тому ж вузлі. Нехай є заданими функції $\bar{\rho}_i \in L^\infty(I_i) \cap BV(I_i)$, $i \in \{1,\dots,N\}$. Будемо казати, що сукупність функцій

$$\rho = (\rho_1,\dots,\rho_N) : \prod_{i=1}^{N}([0,\ T] \times I_i) \to R^N,$$

де $\rho_i \in C([0,T];\ L^1_{loc}(I_i))$, $\ i \in \{1,\dots,N\}$, є допустимим розв'язком задачі (2.1)-(2.3), якщо:

(а): $\rho_i : [0,\ T] \times I_i \to R$ є слабким ентропійним розв'язком задачі (2.1) на I_i, тобто

$$\int_0^T \int_{a_i}^{b_i} (\rho_i \partial_t \varphi + f_i(\rho_i)\partial_x \varphi) dx dt = 0, \tag{2.4}$$

$$\int_0^T \int_{a_i}^{b_i} (|\rho_i - k|\partial_t \tilde{\varphi} + \operatorname{sgn}(\rho_i - k)(f_i(\rho_i) - f_i(k))\partial_x \tilde{\varphi})\, dx dt \geq 0 \tag{2.5}$$

для довільної гладкої функції $\varphi : [0,T] \times I_i \to R$ з компактним носієм на множині $(0,T) \times (a_i,\ b_i)$ для $k \in R$ та для довільної гладкої додатної функції $\tilde{\varphi} : [0,T] \times I_i \to R$ з компактним носієм на $(0,T) \times (a_i,\ b_i)$, при цьому $\varphi_i(\cdot,\ b_i) = \varphi_j(\cdot,\ a_j)$, $\frac{\partial \varphi_i}{\partial\ x}(\cdot,\ b_i) = \frac{\partial \varphi_j}{\partial\ x}(\cdot,\ a_j)$, $i \in \{1,\dots,n\}$, $j \in \{n+1,\dots,n+m\}$;

(б): $\rho_i(0,\ \cdot) = \bar{\rho}_i$ на I_i для $\forall\ i \in \{1,\dots,N\}$;

(в): $f_j(\rho_j(\cdot,\ a_j+)) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ji} f_i(\rho_i(\cdot,\ b_i-))$ для $\ \forall\ j = n+1,\dots,n+m$;

(г): $L(J,A,\rho) := \sum_{i=1}^n f_i(\rho_i(\cdot, b_i-))$ досягає максимального значення на парі (A,ρ) при обмеженнях (а)-(в), де $A(J) \in R^{n\times m}$ — матриця розподілу руху у вузлі.

Зауважимо також, що задача Коші (2.1)-(2.2) не є в загальному випадку коректною за Адамаром. Це означає відсутність неперервної залежності її розв'язків від початкових умов (див. [10]). Тому, в якості факторів керування, які впливають на поведінку таких задач, будемо обирати не початкові умови (з якими немає неперервної залежності), а елементи матриці розподілу транспортного потоку A у вузлах мережі.

2.2. Деякі положення про частково впорядкований простір $L^2(\Omega)$

Нехай Ω — деяка транспортна мережа. Пов'яжемо з цією множиною дійсний простір $L^2(\Omega)$. Надалі позначення $y \in L^2(\Omega)$ означає, що $y = (y_1,\dots,y_N)$ та $y_k \in L^2(I_k)$ для $k = 1,\dots,N$. Будемо вважати, що $L^2(\Omega)$, як топологічний простір, наділений слабкою топологією. Для підмножини $S \subset L^2(\Omega)$ позначимо через $\mathrm{int}_\omega S$ та $\mathrm{cl}_\omega S$ відповідно її внутрішність та замикання відносно слабкої топології простору $L^2(\Omega)$. Також припустимо, що $L^2(\Omega)$ є частково впорядкованим за конусом додатних елементів Λ, де

$$\Lambda = \left\{ f \in L^2(\Omega);\ \ f(x) \geq 0 \quad \text{майже скрізь на}\ \ \Omega \right\}. \tag{2.6}$$

Тоді для елементів $y, z \in L^2(\Omega)$ будемо записувати $y \leq_\Lambda z$ усякий раз, коли $z \in y + \Lambda$, і $y <_\Lambda z$, якщо $z - y \in \Lambda \setminus \{0\}$. Будемо казати, що послідовність $\{y_k\}_{k=1}^\infty \subset L^2(\Omega)$ є не зростаючою та використовувати позначення $y_k \downarrow$ усякий раз, коли для всіх $k \in N$ маємо: $y_{k+1} \leq_\Lambda y_k$. Також будемо казати, що послідовність $\{y_k\}_{k=1}^\infty \subset L^2(\Omega)$ є обмеженою знизу, якщо існує елемент $y^* \in L^2(\Omega)$ такий, що $y^* \leq_\Lambda y_k$ для $\forall\, k \in N$.

Для того, щоб означити "оптимальні"елементи для підмножини S частково упорядкованого простору $L^2(\Omega)$ скористаємося наступним поняттям:

Означення 2. [13] Елемент $y^* \in S \subset L^2(\Omega)$ будемо називати максимальним елементом множини S, якщо не існує $y \in S$ такого, що $y \geq_\Lambda y^*,\ y \neq y^*$, тобто

$$S \cup (y^* + \Lambda) = y^*.$$

Позначимо через $Max_\Lambda(S)$ сукупність усіх максимальних елементів множини S. Введемо два додаткові елементи $-\infty_\Lambda$ і $+\infty_\Lambda$ у $L^2(\Omega)$. Припустимо, що ці елементи задовольняють наступні умови:

$$1)\ -\infty_\Lambda \leq y \leq\ +\infty_\Lambda,\ \forall\, y \in L^2(\Omega);\quad 2)\ +\infty_\Lambda + (-\infty_\Lambda) = 0.$$

Позначимо через Y^* частково розширений нормований простір: $Y^* = L^2(\Omega) \cup \{-\infty_\Lambda\}$, припускаючи, що

$$\|-\infty_\Lambda\|_{L^2(\Omega)} = +\infty \ \text{ i }\ y + \lambda(-\infty_\Lambda) = -\infty,\ \forall\, y \in L^2(\Omega),\ \forall\, \lambda \in R_+.$$

Означення 3. Будемо казати, що множина E є ефективним супремумом множини $S \subset L^2(\Omega)$ відносно слабкої топології простору $L^2(\Omega)$ за конусом Λ (або скорочено (Λ, ω)-супремумом), якщо E є сукупністю усіх максимальних елементів множини $cl_\omega S$ у випадку, коли ця множина непорожня, і $E = +\infty_\Lambda$ інакше.

Надалі, $(\Lambda,\ \omega)$-супремум для множини E будемо позначати як $Sup^{\Lambda,\,\omega}S$. Таким чином, з огляду на попереднє означення, маємо:

$$Sup^{\,\Lambda,\,\omega}S := \begin{cases} Max_\Lambda(cl_\omega S), & Max_\Lambda(cl_\omega S) \neq \emptyset, \\ +\infty_\Lambda, & Max_\Lambda(cl_\omega S) = \emptyset. \end{cases}$$

Нехай X_∂ — непорожня підмножина банахового простору X та $I : X_\partial \to L^2(\Omega)$ — деяке відображення. Зауважимо, що відображення $I : X_\partial \to L^2(\Omega)$ можна пов'язати з його розширенням $\hat{I} : X \to Y^*$ на весь простір X, де

$$\hat{I} = \begin{cases} I(x), & x \in X_\partial \\ -\infty_\Lambda, & x \notin X_\partial. \end{cases} \tag{2.7}$$

Будемо казати, що відображення $I : X_\partial \to Y^*$ є обмеженим зверху, якщо існує елемент $z \in L^2(\Omega)$ такий, що $z \geq_\Lambda I(x)$ для всіх $x \in X_\partial$.

Означення 4. Підмножину $A \in L^2(\Omega)$ будемо називати ефективним супремумом відображення

$$I : X_\partial \to L^2(\Omega)$$

відносно слабкої топології простору $L^2(\Omega)$ і позначати $Sup\,^{\Lambda,\,\omega}_{x\in X_\partial}\; I(x)$, якщо A є (Λ,ω)-супремумом образу $I(X_\partial)$ із X_∂ на $L^2(\Omega)$, тобто,

$$Sup\,^{\Lambda,\,\omega}_{x\in X_\partial}\; I(x) = Sup^{\Lambda,\,\omega}\left\{I(x) :\ \forall\ x \in X_\partial\right\}.$$

Зауваження 1. Якщо $a \in Sup\,^{\Lambda,\,\omega}_{x\in X_\partial}\; I(x)$, то

$$cl_\omega\left\{I(x) : \forall\ x \in X_\partial\right\} \cap (a+\Lambda) = \{a\}$$

при умові, що $Max_\Lambda[cl_\omega\left\{I(x) : \forall\ x \in X_\partial\right\}]$ є непорожньою множиною.

Нехай $\{y_k\}_{k=1}^\infty$ послідовність у просторі $L^2(\Omega)$. Позначимо через $L^\omega\left\{y_k\right\}$ множину всіх її точок згущення відносно слабкої топології простору $L^2(\Omega)$, тобто $y \in L^\omega\left\{y_k\right\}$, якщо існує підпослідовність $\{y_{k_i}\}_{i=1}^\infty \subset \{y_k\}_{k=1}^\infty$ така, що $y_{k_i} \rightharpoonup y$ у $L^2(\Omega)$ при $i \to \infty$. Якщо ця множина не обмежена зверху, тобто $Sup\,^{\Lambda,\,\omega}L^\omega\left\{y_k\right\} = +\infty_\Lambda$, то припускаємо, що $\{+\infty_\Lambda\} \in L^\omega\left\{y_k\right\}$. Зафіксуємо елемент $x_0 \in X_\partial$. Для довільного відображення $I : X_\partial \to L^2(\Omega)$ введемо до розгляду наступні множини:

$$L^{\sigma\times\omega}\left(I, x_0\right) := \bigcup_{\{x_k\}_{k=1}^\infty \in\ \mathfrak{M}_\sigma(x_0)} L^\omega\left\{\hat{I}(x_k)\right\}, \tag{2.8}$$

$$L^{\sigma\times\omega}_{max}\left(I, x_0\right) := L^{\sigma\times\omega}\left(I, x_0\right) \cap Sup^{\Lambda,\,\omega}_{x\in X_\partial} I(x), \tag{2.9}$$

де $\mathfrak{M}_\sigma(x_0)$ — це множина всіх послідовностей $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset X$ таких, що $x_k \to x_0$ відносно σ–топології простору X.

Означення 5. Будемо казати, шо підмножина $A \subset L^2(\Omega) \cup \{\pm\infty_\Lambda\}$ є Λ– нижньою секвенційною границею відображення $I : X_\partial \to L^2(\Omega)$ у точці $x_0 \in X_\partial$ відносно топології $\sigma \times \omega$ на добутку просторів $X \times L^2(\Omega)$ і використовувати позначення $A = \limsup^{\Lambda,\,\omega}_{x \overset{\sigma}{\to} x_0} I(x)$, якщо

$$\limsup^{\Lambda,\,\omega}_{x \overset{\sigma}{\to} x_0} I(x) := \begin{cases} L^{\sigma\times\omega}_{max}\left(I,\ x_0\right), & L^{\sigma\times\omega}_{max}\left(I, x_0\right) \neq \emptyset, \\ Sup\,^{\Lambda,\,\omega}L^{\sigma\times\omega}(I, x_0), & L^{\sigma\times\omega}_{max}\left(I, x_0\right) = \emptyset. \end{cases} \tag{2.10}$$

Зауваження 2. У скалярному випадку $(I : X_\partial \to R)$ множини

$$Sup^{\Lambda,\,\omega}_{x\in X_\partial} I(x) \text{ та } Sup\,^{\Lambda,\,\omega}L^{\sigma\times\omega}(I, x_0)$$

містять тільки один елемент. Тому, якщо $L^{\sigma\times\omega}_{max}\left(I, x_0\right) \neq \emptyset$, то маємо:

$$\begin{aligned} L^{\sigma\times\omega}_{\max}\left(I, x_0\right) &= L^{\sigma\times\omega}\left(I, x_0\right) \cap \mathrm{Sup}^{\Lambda,\,\omega}_{x\in X_\partial} I(x) = \\ &= Sup\,^{\Lambda,\,\omega}L^{\sigma\times\omega}(I, x_0) \cap Sup^{\Lambda,\,\omega}_{x\in X_\partial} I(x) = Sup\,^{\Lambda,\,\omega}L^{\sigma\times\omega}(I, x_0). \end{aligned}$$

Отже, в цьому випадку (2.10) є класичним означенням нижньої границі.

3. Постановка задачі векторної оптимізації для транспортного потоку на мережі

Оскільки для транспортного потоку на мережі існує можливість залучення факторів керування, які впливають на щільність транспортних потоків, то надалі транспортний потік будемо трактувати як об'єкт керування. У цьому випадку необхідно формалізувати фізичні та математичні значення факторів керування та пов'язати з ними відповідний стан такого об'єкту керування.

Для простоти обмежимося випадком мережі $\Omega = (\mathcal{I},\ \mathcal{J})$, яка включає вузли $J \in \mathcal{J}$ лише двох видів: $J \in J^{1,\,2}$ та $J \in J^{2,\,1}$. Перший вид вузла ($J \in J^{1,\,2}$) має одну вхідну дорогу m з кінцем b_m у вузлі та дві вихідні дороги $r,\ s$ з кінцями $a_r,\ a_s$ у вузлі, відповідно. Згідно з підходом Coclite, Garavello& Piccoli [7, 10], у такому вузлі матриця розподілу потоку набуває вигляду $A(J) = [\alpha_m,\ 1-\alpha_m]^t$, де $0 \le \alpha_m \le 1$. Отже, у такому вузлі дійсний параметр $\alpha_m \in (0,\ 1)$ можна взяти за фактор керування.

Другий вид вузлів ($J \in J^{2,\,1}$) складається з двох вхідних доріг p та q з кінцями b_p і b_q у вузлі та однієї вихідної дорогою r з кінцем a_r у вузлі. Для вузлів такого виду існує правило (див. [2]), яке описує у процентному співвідношенні кількість машин, що проїжджають із окремої вхідної дороги через ці вузли мережі. Більше того, це правило виконується для кожного вузла $J \in J^{2,\,1}$, і тому в таких вузлах транспортний потік вже не є керованим.

Припустимо, що мережа $\Omega = (\mathcal{I}, \mathcal{J})$ має строго N доріг і $\mathcal{J} = J^{1,\,2} \cup J^{2,\,1}$, де множина $J^{1,\,2}$ містить K вузлів першого виду, а множина $J^{2,\,1}$ — M вузлів другого виду. Таким чином, маємо мережу з K параметрами керування $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_K)$ та M заданими параметрами $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_{\mathcal{M}})$, $0 < \zeta_l < 1$ $l \in \{1, \dots, \mathcal{M}\}$. При цьому, на кожній дорозі $I_i = [a_i,\ b_i] \in \mathcal{I}$ швидкість $\upsilon = \upsilon(\rho)$ задовольняє такі вимоги:

$$\upsilon(\rho) \text{— неперервно-спадна функція на відрізку } [0, \max_{1\le i\le N} \rho_{max,i}] \tag{3.1}$$

$$0 \le \upsilon(\rho_i) \le \upsilon_{i,max}, \quad \forall\, i \in \{1, \dots, N\}\,, \tag{3.2}$$

де $\upsilon_{i,max} \in L^2(I_i)$ $(1 \le i \le N)$ відомі функції.

Введемо до розгляду наступні позначення:

1. $\mathcal{A} = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_K) |\ \beta \le \alpha_i \le 1-\beta,\ i = 1, \dots, K\} \subset R^K$ — множина параметрів керування, де $\beta \in (0,\ 1/2)$ досить мале додатне число;

2. $X = R^K \times C(0,\ T;\ L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega))$ — простір допустимих пар $(\alpha,\ \rho)$;

3. $P\ :\ R^K \times C(0,\ T;\ L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)) \to L^2(\Omega)$ $(1 < p < +\infty)$ — цільове відображення;

4. $\Lambda = \{g \in L^2(\Omega) : g(x) \ge 0$ майже скрізь на $\Omega\}$ — конус додатних елементів у просторі $L^2(\Omega)$.

Відомо (див. [2]), що для $\forall\, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_K) \in \mathcal{A}$ задача

$$\int_0^T \int_{a_i}^{b_i} (\rho_i \partial_t \varphi + f_i(\rho_i) \partial_x \varphi) dx dt = 0,\ \forall\, \varphi \in C_0^\infty((0,T) \times (a_i,\ b_i)),\ \forall\, I_i \in \mathcal{I}, \tag{3.3}$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^T \int_{a_i}^{b_i} (|\rho_i - k|\partial_t \tilde{\varphi} + \mathrm{sgn}(\rho_i - k)(f_i(\rho_i) - f_i(k))\partial_x \tilde{\varphi})\, dxdt \geq 0, \\ \forall\, d \in R,\ \forall\, \tilde{\varphi} \in C_0^\infty((0,T) \times (a_i,\, b_i)),\ \tilde{\varphi} \geq 0,\ \forall\, i \in \{1, \ldots, N\}, \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\rho_i(0, \cdot) = \bar{\rho}_i \text{ на } I_i \text{ для } \forall\, i \in \{1, \ldots, N\}, \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} f_r(\rho_r(\cdot,\, a_r^+)) = \alpha_k f_m(\rho_m(\cdot,\, b_m^-)) \text{ та } f_s(\rho_s(\cdot,\, a_s^+)) = (1 - \alpha_k) f_m(\rho_m(\cdot,\, b_m^-)), \\ \text{для } \forall\, J_k \in J^{1,\,2} \text{ з однією вхідною дорогою } m \text{ з кінцем } b_m \text{ у вузлі } J_k \\ \text{та вихідними дорогами } r,\ s \text{ з кінцями } a_r,\ a_s \text{ у } J_k,\ \forall\, k \in \{1, \ldots, K\}, \end{cases} \tag{3.6}$$

$$\begin{cases} f_r(\rho_r(\cdot,\, a_r^+)) = \zeta_l f_p(\rho_p(\cdot,\, b_p^-)) + (1 - \zeta_l) f_q(\rho_q(\cdot,\, b_q^-)) \\ \text{для } \forall\, J_l \in J^{2,\,1} \text{ з двома вхідними дорогами } p,\ q \text{ з кінцями } b_p,\ b_q\ J_l \\ \text{та однією вихідною дорогою } r \text{ з кінцем } a_r \text{ у } J_l,\ \forall\, l \in \{1, \ldots, M\}, \end{cases} \tag{3.7}$$

$$\begin{cases} L(J,\, \alpha,\, \rho) := \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i(\rho_i(\cdot,\, b_i^+)) \text{ досягає максимального значення при} \\ \text{обмеженнях (3.3)-(3.7) } \forall\, J \in \mathcal{J}, \text{ де } n = 1, \text{ якщо } J \in J^{1,\,2}, \\ \text{і } n = 2, \text{ якщо } J \in J^{2,\,1} \end{cases} \tag{3.8}$$

має єдиний розв'язок

$$\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_N) : \prod_{i=1}^{N}([0,\, T] \times I_i) \to R^N \text{ у просторі } C(0,T;\ L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega))$$

такий, що

$$Tot.\ V_{I_i}(\rho_i(t,\, \cdot)) \leq Tot.\ V_{I_i}(\bar{\rho}_i), \quad i \in \{1, \ldots, N\},$$

де $\bar{\rho} = \{\bar{\rho}_i \in L^\infty(I_i) \cap BV(I_i)\}_{i=1}^N$ — початковий розподіл щільності потоку машин.

Пов'яжемо з задачею (3.3)-(3.8) наступну задачу векторної оптимізації:

$$\text{реалізувати } Sup^{\Lambda,\,\omega} \{P(\alpha,\, \rho)\} \tag{3.9}$$

для всіх $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_K) \in R^K$ та $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_N) \in C(0,T;\ L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega))$ за умов (3.3)-(3.8) та (3.1)-(3.2).

Означення 6. Будемо казати, що задача (3.9) є регулярною, якщо для заданої сукупності функцій потоку $f = (f_1, \ldots, f_N)$ з властивостями (2.3) існує принаймні одна пара

$$(\alpha,\, \rho) \in \mathcal{A} \times C(0,T;\ L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)),$$

де $\rho = \rho(\alpha)$ — відповідний розв'язок задачі (3.3)-(3.8) такий, що ρ задовольняє умови (3.1)-(3.2), і $P(\alpha,\, \rho) >_\Lambda z$ для деякого елемента $z \in L^2(\Omega)$. У цьому випадку пару $(\alpha,\, \rho)$ будемо називати допустимою.

Позначимо через Ξ множину всіх допустимих пар задачі (3.3)-(3.9). Очевидно, що $\Xi \subset \mathcal{A} \times C(0,T;\ L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega))$. Надалі, будемо пов'язувати цю задачу з четвіркою $< \Xi,\ P,\ \Lambda,\ \omega >$, де ω є слабкою топологією простору керувань $L^2(\Omega)$.

Означення 7. Допустиму пару $(\alpha^{eff},\ \rho^{eff}) \in \Xi$ будемо називати $(\Lambda,\ \omega)$-ефективним розв'язком задачі (3.1)-(3.9), якщо пара $(\alpha^{eff},\ \rho^{eff})$ реалізує $(\Lambda,\ \omega)$-супремум відображення $P : \Xi \to L^2(\Omega)$, тобто

$$P(\alpha^{eff},\ \rho^{eff}) \in \mathrm{Sup}^{\Lambda,\,\omega}_{(\alpha,\,\rho)\in\,\Xi} P(\alpha,\ \rho) = \mathrm{Sup}^{\Lambda,\,\omega} \left\{P(\alpha,\ \rho)\ :\ \forall\,(\alpha,\ \rho) \in \Xi\right\}.$$

Позначимо через $\mathrm{Eff}_\omega(\Xi;\ P;\ \Lambda)$ множину всіх $(\Lambda,\ \omega)$-ефективних розв'язків задачі векторної оптимізації (3.1)–(3.9), тобто

$$\mathrm{Eff}_\omega(\Xi;\ P;\ \Lambda) = \left\{(\alpha^{eff},\ \rho^{eff}) \in \Xi\ :\ P(\alpha^{eff},\ \rho^{eff}) \in \mathrm{Sup}^{\Lambda,\,\omega}_{(\alpha,\,\rho)\in\,\Xi} P(\alpha,\ \rho)\right\}.$$

Наведемо основні результати, які торкаються розв'язності означеної вище задачі, взявши за основу роботу [2].

Теорема 1. *Нехай* $\left\{(\alpha^k,\ \rho^k) \in \Xi\right\}_{k=1}^{\infty}$ *— довільна послідовність допустимих пар у задачі (3.3)-(3.8). Тоді знайдеться пара* $(\alpha^*,\ \rho^*) \in Y$ *і підпослідовність даної послідовності (для якої збережемо попередні позначення) такі, що*

$$(\alpha^*,\ \rho^*) \in \Xi,\ \ (\alpha^k,\ \rho^k) \xrightarrow{\tau} (\alpha^*,\ \rho^*),$$

тобто множина Ξ *є секвенційно компактною відносно* τ*-збіжності, де* τ *— це топологія на* $Y = R^K \times L^2(0,T;\ BV(\Omega))$.

Наслідок 1. *Якщо* $\alpha \in \mathcal{A}$, *то відображення* $\alpha \mapsto \rho(\alpha)$ *є неперервним відносно топології поточкової збіжності в* R^K *та слабкої топології простору* $L^2(0,T;\ BV(\Omega))$.

Нехай $\hat{P} : [R^K \times C(0,T;\ BV(\Omega))] \to Y^*$ — деяке розширення відображення $P : \Xi \to L^2(\Omega)$ на весь простір $R^K \times L^2(0,T;\ BV(\Omega))$. Тут через Y^* позначено частково розширений простір Банаха $L^2(\Omega) \cup \{-\infty_\Lambda\}$.

Означення 8. Будемо казати, що відображення $P : \Xi \to L^2(\Omega)$ є $(\Lambda,\ \tau\times\omega)$-напівнеперервним зверху ($(\Lambda,\ \tau\times\omega)$-нн.зв.) у точці $(\alpha^0,\ \rho^0) \in \Xi$, якщо

$$P(\alpha^0,\ \rho^0) \in \limsup^{\Lambda,\,\omega}_{(\alpha,\,\rho)\xrightarrow{\tau}(\alpha^0,\,\rho^0)} \hat{P}(\alpha,\ \rho)$$

Відображення P є $(\Lambda,\ \tau\times\omega)$-нн.зв. на множині Ξ, якщо P є $(\Lambda,\ \tau\times\omega)$-нн.зв. на кожній парі з Ξ.

Той факт, що множина Ξ допустимих пар задачі є секвенційно компактною в заданій топології τ, дає підстави гарантувати розв'язність широкого класу оптимізаційних задач для транспортних потоків на мережах. Отже, має місце наступна теорема, яка торкається існування ефективних розв'язків задачі векторної оптимізації (3.9) (її доведення можна знайти в [2]).

Теорема 2. *Припустимо, що задача векторної оптимізації (3.9) є регулярною. Нехай задано* $(\Lambda,\tau\times\omega)$*-нн.зв. відображення* $P : \Xi \to L^2(\Omega)$. *Тоді задача векторної оптимізації (3.9) має непорожню підмножину* $(\Lambda,\ \omega)$*-ефективних розв'язків.*

Оскільки загальновідомим методом побудови розв'язків задач векторної оптимізації є залучення процедури їх скаляризації, то метою даної роботи є аналіз такого підходу на прикладі найпростішої схеми скаляризації, яка грунтується на ідеї побудови відповідних згорток. Наведемо деякі опорні означення та теореми.

Означення 9. Будемо казати, що $\lambda \in L^2(\Omega)$ є квазі-внутрішньою точкою конуса додатних елементів Λ, якщо $\lambda(x) \geq 0$ майже скрізь на Ω та для всіх $b \in \Lambda \setminus \{0\}$

$$\int_\Omega b(x)\lambda(x)dx \ > 0.$$

Позначимо через $\Lambda^\sharp$ множину всіх квазі-внутрішніх точок конуса Λ. Очевидно, що

$$\Lambda^\sharp = \left\{\lambda \in L^2(\Omega) : \lambda(x) > 0 \text{ майже скрізь на } \Omega\right\}.$$

Пов'яжемо з задачею векторної оптимізації (3.9) наступну скалярну задачу мінімізації:

$$\begin{cases} P_\lambda(\alpha, \rho) = \displaystyle\int_\Omega P(\alpha, \rho)\lambda(x)dx \ \to sup, \\ \text{за умови, що } (\alpha, \rho) \in \Xi \subset R^K \times C(0, T; BV(\Omega)), \end{cases} \tag{3.10}$$

де λ — елемент конуса (2.6). Надалі функціонал P_λ називатимемо λ-згорткою відображення P.

Теорема 3. *Нехай $P : \Xi \to L^2(\Omega)$ — заданий оператор. Припустимо, що існує пара $(\alpha^0, \rho^0) \in \Xi$ та елемент $\lambda \in \Lambda^\sharp$ такі, що*

$$(\alpha^0, \rho^0) \in Arg \max_{(\alpha,\rho)\in\Xi} \int_\Omega P(\alpha, \rho)\lambda(x)dx.$$

Тоді (α^0, ρ^0) є (Λ, ω)-ефективним розв'язком задачі векторної оптимізації (3.9).

Наслідок 2. *За умови виконання припущень теореми 3, маємо*

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda^\sharp} Arg \max_{(\alpha,\rho)\in\Xi} \int_\Omega P(\alpha, \rho)\lambda(x)dx \subseteq Eff_\omega(\Xi; P; \Lambda). \tag{3.11}$$

Зауважимо, що цільовий оператор у теоремі 3 у загальному випадку не є $(\Lambda, \tau \times \omega)$-напівнеперервним зверху. Таким чином, постає питання про розв'язність відповідної скалярної задачі мінімізації (3.10) з $\lambda \in \Lambda^\sharp$. Згідно з прямим методом варіаційного числення, задача умовної мінімізації (3.10) має непорожню множину розв'язків за умови, що Ξ є τ-компактною підмножиною і

$$P_\lambda(\cdot, \cdot) = \int_\Omega P(\cdot, \cdot)dx : \Xi \to \bar{R}$$

є власною τ–нн.зв. функцією. Однак, характерною особливістю задачі векторної оптимізації (3.9) є той факт, що з $(\Lambda, \tau \times \omega)$-напівнеперервним зверху оператором

$P : \Xi \to L^2(\Omega)$, який не є ні нн. зв., ні квазі-нн.зв., можна пов'язати скалярну задачу мінімізації (3.10), для якої відповідний функціонал вартості $P_\lambda : \Xi \to R$, взагалі кажучи, не є τ–нн.зв. на Ξ. Дійсно, нехай (α^0, ρ^0) — пара з множини Ξ, на якій оператор P не є квазі-нн.зв. Тоді існує принаймні один елемент $a^* \in cl_\omega(P(\Xi))$ такий, що

$$a^* \in \limsup{}^{\Lambda,\omega}_{(\alpha,\rho)\xrightarrow{\tau}(\alpha^0,\rho^0)} P(\alpha,\rho),\ P(\alpha^0,\rho^0) \in \limsup{}^{\Lambda,\omega}_{(\alpha,\rho)\xrightarrow{\tau}(\alpha^0,\rho^0)} P(\alpha,\rho) \tag{3.12}$$

$$\text{та } a^* \neq P(\alpha^0,\rho^0).$$

Нехай послідовність $(\alpha^k, \rho^k)_{k=1}^\infty \subset \Xi$ така, що $(\alpha^k, \rho^k) \xrightarrow{\tau} (\alpha^0, \rho^0)$ у просторі Y та $P(\alpha^k, \rho^k) \rightharpoonup a^*$ в $L^2(\Omega)$. Так як $a^* \not\leq_\Lambda P(\alpha^0, \rho^0)$, то звідси випливає, що $P(\alpha^0, \rho^0) - a^* \notin \Lambda$, і тому існує вектор $\lambda \in \Lambda$ такий, що

$$\int_\Omega (P(\alpha^0,\rho^0) - a^*)\lambda^*(x)dx < 0.$$

Як результат, маємо:

$$\liminf_{k\to\infty} P_{\lambda^*}(\alpha^k,\rho^k) = \lim_{k\to\infty}\int_\Omega P(\alpha^k,\rho^k)\lambda^*(x)dx =$$

$$= \int_\Omega a^*(x)\lambda^*(x)dx\ >\ \int_\Omega P(\alpha^0,\rho^0)\lambda^*(x)dx = P_{\lambda^*}(\alpha^0,\rho^0).$$

Таким чином, P_{λ^*} не є τ–нн.зв. на парі $\alpha^0, \rho^0)$. Цей факт приводить до наступного поняття.

Означення 10. Нехай задано відображення $P : \Xi \to L^2(\Omega)$. Конус виду

$$\Lambda_P^\tau := \{\lambda \in \Lambda :\ P_\lambda \text{ є } \tau\text{-нн.зв. на } \Xi\}$$

будемо називати конусом τ-напівнеперервності для відображення P.

В зв'язку з цим, теорему 3 можна посилити наступним чином.

Теорема 4. *Нехай $P : \Xi \to L^2(\Omega)$ є $(\Lambda, \tau \times \omega)$-напівнеперервним зверху відображенням. Припустимо, що задача векторної оптимізації (3.9) є регулярною та $\Lambda_P^\tau \setminus \{0\} \neq \emptyset$. Тоді*

$$Arg\max_{(\alpha,\rho)\in\Xi}\int_\Omega P(\alpha,\rho)\lambda(x)dx \cap Eff_\omega(\Xi; P; \Lambda) \neq \emptyset \tag{3.13}$$

4. Узагальнені розв'язки задачі векторної оптимізації

Нехай λ довільний елемент конуса Λ. Позначимо через

$$Sol(\Xi; P_\lambda) := \underset{(\alpha,\rho)\in\,\Xi}{Argmax}\; P_\lambda(\alpha,\rho)$$

множину розв'язків скалярної задачі (3.10). Нагадаємо, що скалярна задача (3.10) називається коректно обумовленою, якщо з кожної максимізаційної послідовності $(\alpha^k,\rho^k)_{k=1}^\infty \subset \Xi$ (тобто такої, що $P_\lambda(\alpha^k,\rho^k) \to \sup_{(\alpha,\rho)\in\Xi} P_\lambda(\alpha,\rho)$) можна вилучити підпослідовність, яка τ-збігається до деякої пари з множини $Sol(\Xi; P_\lambda)$. Нагадаємо також узагальнення означеного вище поняття, а саме: задачу (3.10) будемо називати коректно поставленою, якщо кожна максимізаційна послідовність з множини $\Xi \setminus Sol(\Xi; P_\lambda)$ має τ-граничну точку в множині $Sol(\Xi; P_\lambda)$. Однак, у загальному випадку, задача (3.10) може не бути коректно обумовленою (множина її розв'язків може бути порожньою) чи коректно поставленою.

У багатьох прикладних задачах є сенс послаблювати необхідні умови, яким повинні задовольняти ефективні розв'язки задачі векторної оптимізації (3.9). Зокрема, припустимо, що цільове відображення досягає свого ефективного супремума на множині Ξ з деякою похибкою. З іншої сторони, множина (Λ,ω)-ефективних розв'язків такої задачі може бути порожньою, тобто ефективний супремум цільового відображення є недосяжним на множині Ξ. Разом з цим, недосяжність супремума не означає, що задача векторної оптимізації не має сенсу, оскільки її ефективний супремум існує, а тому може бути наближений з деякою точністю.

Означення 11. Будемо казати, що послідовність $(\alpha^k,\rho^k)_{k=1}^\infty \subset \Xi$ є максимізаційною для задачі векторної оптимізації (3.9), якщо $P_\lambda(\alpha^k,\rho^k) \rightharpoonup \xi$ в $L^2(\Omega)$, де ξ елемент з множини $Sup^{\Lambda,\omega}_{(\alpha,\rho)\in\,\Xi} P(\alpha,\rho)$.

Означення 12. Будемо казати, що задача векторної оптимізації (3.9) є коректно поставленою відносно τ-топології на Y, якщо вона є розв'язною, і кожна максимізаційна послідовність $(\alpha^k,\rho^k)_{k=1}^\infty \subset \Xi$ має τ-збіжну підпослідовність до деякої пари $Eff_\omega(\Xi; P; \Lambda)$. У цьому випадку максимізаційну послідовність називають максимізаційною послідовністю за Тихоновим. Будемо казати, що задача векторної оптимізації (3.9) є коректно поставленою за Тихоновим відносно τ-топології на Y, якщо вона є розв'язною, і кожна максимізаційна послідовність з множини $\Xi \setminus Eff_\omega(\Xi; P; \Lambda)$ має τ-граничну пару в множині $Eff_\omega(\Xi; P; \Lambda)$.

Зауважимо, що маючи максимізаційну послідовність за Тихоновим, можна гарантувати близькість між відповідними значеннями цільового відображення і його ефективним супремумом та близкість його наближення до одного з (Λ,ω)-ефективних розв'язків задачі. Проте, навіть в простих прикладних задачах побудова максимізаційних послідовностей за Тихоновим та відповідних наближених розв'язків Тихонова є зазвичай досить складною, а інколи й не розв'язною задачею. У зв'язку з цим доцільно послабити умови на наближені розв'язки задачі векторної оптимізації (3.9).

Означення 13. Будемо казати, що пара $(\alpha^*, \rho^*) \in \Xi$ є (τ, ω)-узагальненим розв'язком задачі (3.9), якщо існує послідовність $\left\{(\alpha^k, \rho^k)\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \Xi$ та елемент ξ з множини $Sup^{\Lambda,\omega}_{(\alpha,\rho)\in\Xi} P(\alpha, \rho)$ такі, що $(\alpha^k, \rho^k) \xrightarrow{\tau} (\alpha^*, \rho^*)$ в Y і $P(\alpha^k, \rho^k) \rightharpoonup \xi$ у просторі $L^2(\Omega)$.

Таким чином, задача векторної оптимізації (3.9) може мати наближений розв'язок навіть за відсутності її розв'язності. Очевидно, що кожний наближений розв'язок за Тихоновим задачі (3.9) є також (τ, ω)- узагальненим розв'язком. Проте, навіть якщо є відомим (Λ, ω)-ефективний розв'язок $((\alpha^{eff}, \rho^{eff}) \in Eff_\omega(\Xi; P; \Lambda))$, то неможна гарантувати близкість (τ, ω)-узагальненого розв'язку (α^*, ρ^*) до множини $Eff_\omega(\Xi; P; \Lambda)$ в τ-топології на Y.

Позначимо через $GenEff_{\tau,\omega}\,(\Xi; P; \Lambda)$ множину всіх (τ, ω)-узагальнених розв'язків задачі (3.9). Очевидно, що

$$Eff_\omega(\Xi; P; \Lambda) \subseteq GenEff_{\tau,\omega}\,(\Xi; P; \Lambda).$$

Проте, у загальному випадку, обернене включення

$$GenEff_{\tau,\omega}\,(\Xi; P; \Lambda) \subset Eff_\omega(\Xi; P; \Lambda)$$

не є вірним. Логічним наслідком теореми 2 є наступний результат:

Пропозиція 1. За умови виконання припущень теореми 2 оптимізаційна задача (3.9) є коректно поставленою за Тихоновим відносно τ-топології на Y, і при цьому

$$GenEff_{\tau,\omega}\,(\Xi; P; \Lambda) = Eff_\omega(\Xi; P; \Lambda).$$

Для того, щоб отримати суттєві умови, які б гарантували, що множина (τ, ω)-узагальнених розв'язків задачі (3.9) є не порожньою, скористаємося скалярним представленням цієї задачі у вигляді (3.10).

Нехай $sc^-_\tau P_\lambda : \Xi \to \mathbb{R}$ — τ-напівнеперервна зверху регуляризація функціоналу

$$P_\lambda(\alpha, \rho) = \int_\Omega P(\alpha, \rho)\lambda(x)dx \;\text{ з деяким } \lambda \in \Lambda,$$

тобто, $sc^-_\tau P_\lambda$ є найменшим τ-напівнеперервним зверху функціоналом, який задовольняє умову: $sc^-_\tau P_\lambda(\alpha, \rho) \geq P_\lambda(\alpha, \rho)$ для $\forall(\alpha, \rho) \in \Xi$. Тоді, згідно з прямим методом варіаційного числення, маємо:

Пропозиція 2. Нехай Ξ непорожня підмножина з $\mathcal{A} \times C(0, T; L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega))$. Тоді, для фіксованого $\lambda \in \Lambda$ кожна максимізаційна послідовність для скалярної задачі

$$\sup_{(\alpha,\rho)\in\Xi} sc^-_\tau P_\lambda(\alpha, \rho)$$

має τ-граничну пару, яка є максимумом $sc^-_\tau P_\lambda$ на Ξ, тобто, $Sol(\Xi; sc^-_\tau P_\lambda) \neq \emptyset$.

Теорема 5. *Припустимо, що задача векторної оптимізації (3.9) є регулярною. Нехай задано цільове відображення* $P : \Xi \to L^2(\Omega)$ *(не обов'язково* $(\Lambda, \tau \times \omega)$*-напівнеперервне зверху на* Ξ*). Тоді має місце наступне включення:*

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda^\sharp} \underset{(\alpha,\rho)\in\Xi}{Argmax}\, sc_\tau^- P_\lambda(\alpha,\rho) \subseteq GenEff_{\tau,\omega}(\Xi; P; \Lambda). \tag{4.1}$$

Доведення. Для початку зауважимо, що для конуса додатних елементів Λ в просторі $L^2(\Omega)$ маємо: $cor(\Lambda) \subset \Lambda^\sharp$ (див. [13]). Тому квазі-внутрішність $\Lambda^\sharp$ конуса Λ є не порожньою. Нехай λ довільний елемент $\Lambda^\sharp$. Тоді, згідно з твердженням 2, існує принаймні одна пара $(\alpha^*, \rho^*) \in \Xi$ така, що

$$(\alpha^*, \rho^*) \in \underset{(\alpha,\rho)\in\Xi}{} sc_\tau^- P_\lambda(\alpha,\rho). \tag{4.2}$$

Так як $sc_\tau^- P_\lambda(\alpha,\rho)$ є τ-нн.зв. границею функціоналу

$$P_\lambda(\alpha,\rho) = \int_\Omega P(\alpha,\rho)\lambda(x)dx,$$

то існує послідовність $(\alpha^k, \rho^k)_{k=1}^\infty \subset \Xi$ така, що $(\alpha^k, \rho^k) \xrightarrow{\tau} (\alpha^*, \rho^*)$ та

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega P(\alpha^k,\rho^k)\lambda(x)dx = sc_\tau^- P_\lambda(\alpha^*,\rho^*) \geq$$
$$\geq sc_\tau^- P_\lambda(\alpha,\rho) \geq \int_\Omega P(\alpha,\rho)\lambda(x)dx \;\forall(\alpha,\rho)\in\Xi. \tag{4.3}$$

Оскільки $\Lambda^\sharp \cup \{0\}$ непорожній випуклий конус в $L^2(\Omega)$ з непорожньою алгебраїчною внутрішністю, то цей конус є відтворюючим в $L^2(\Omega)$, тобто $[\Lambda^\sharp \cup 0] - [\Lambda^\sharp \cup 0] = L^2(\Omega)$ (див. [13]). Тоді, згідно з [4, 16], маємо, що в просторі $L^2(\Omega)$ впорядкований конус Λ є нормованим відносно норми топології $L^2(\Omega)$, тобто,

$$y <_\Lambda z \;\;\Rightarrow\;\; \|y\|_{L^2(\Omega)} < \|z\|_{L^2(\Omega)}. \tag{4.4}$$

Тепер, повертаючись до виразу (4.3), отримуємо: існує число $\hat{k} \in \mathbb{N}$ і елемент $\hat{y} \in L^2(\Omega)$ такі, що

$$\int_\Omega P(\alpha^k,\rho^k)\lambda(x)dx > \int_\Omega \hat{y}\lambda(x)dx \quad \forall k > \hat{k}.$$

Так як $\lambda \in \Lambda^\sharp$, це означає, що $P(\alpha^k, \rho^k) >_\Lambda \hat{y}$ для всіх $k > \hat{k}$. Використовуючи властивість (4.4), приходимо до висновку, що існує константа $C > 0$ така, що $\|P(\alpha^k,\rho^k)\|_{L^2(\Omega)} \leq C$ для всіх $k > \hat{k}$. Тому, можемо припустити, що послідовність $\left\{P(\alpha^k,\rho^k)\right\}_{k=1}^\infty$ є обмеженою в $L^2(\Omega)$. Отже, за теоремою Банаха-Алаоглу, існує елемент $\eta \in L^2(\Omega)$ і підпослідовність з послідовності $\left\{P(\alpha^k,\rho^k)\right\}_{k=1}^\infty$ (для якої збережемо той же індекс k) такі, що $P(\alpha^k,\rho^k) \rightharpoonup \eta$ в $L^2(\Omega)$ при $k \to \infty$.

Припустимо тепер, що

$$(\alpha^*, \rho^*) \notin GenEff_{\tau,\omega}(\Xi; P; \Lambda). \tag{4.5}$$

Тоді, згідно з означенням (13), $\eta \notin Sup^{\Lambda,\omega}_{(\alpha,\rho)\in\Xi} P(\alpha, \rho)$. Звідси випливає, що існує елемент $\xi \in Sup^{\Lambda,\omega}_{(\alpha,\rho)\in\Xi} P(\alpha, \rho)$ такий, що $\xi >_\Lambda \eta$. Тому $\xi - \eta \in \Lambda \setminus \{0\}$, і використовуючи той факт, що $\lambda \in \Lambda^\sharp$, приходимо до нерівності

$$\int_\Omega \eta(x)\lambda(x)dx \ < \ \int_\Omega \xi(x)\lambda(x)dx, \tag{4.6}$$

яка еквівалентна наступному

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega P(\alpha^k, \rho^k)\lambda(x)dx \ < \ \int_\Omega \xi(x)\lambda(x)dx.$$

З іншого боку, для елемента $\xi \in Sup^{\Lambda,\omega}_{(\alpha,\rho)\in\Xi} P(\alpha, \rho)$ існує послідовність

$$\left\{(\tilde{\alpha}^k, \tilde{\rho}^k)\right\}_{k=1}^\infty \subset \Xi \ \text{ така, що } \ P(\tilde{\alpha}^k, \tilde{\rho}^k) \rightharpoonup \xi \text{ в } L^2(\Omega).$$

Оскільки множина Ξ є секвенційно τ-компактною, то можемо припустити, що $(\tilde{\alpha}^k, \tilde{\rho}^k) \xrightarrow{\tau} (\tilde{\alpha}^*, \tilde{\rho}^*) \in \Xi$. Тоді, згідно з нерівностю (4.3), отримаємо:

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega P(\alpha^k, \rho^k)\lambda(x)dx \ \geq \int_\Omega P(\tilde{\alpha}^i, \tilde{\rho}^i)\lambda(x)dx, \quad \forall i \in \mathbb{N}. \tag{4.7}$$

Переходячи до границі в (4.7), отримаємо:

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega P(\alpha^k, \rho^k)\lambda(x)dx \ \geq \int_\Omega \xi(x)\lambda(x)dx.$$

Проте, це суперечить нерівності (4.6), а отже і (4.5). Таким чином, (α^*, ρ^*) є (τ, ω)-узагальненим розв'язком задачі векторної оптимізації (3.9). □

5. Висновки

У роботі розглянуто задачу векторної оптимізації транспортного потоку на мережі у припущенні, що цільовий оператор є слабко напівнеперервним зверху та з областю значень в лебеговому просторі $L^2(\Omega)$. Використовуючи той факт, що множина допустимих розв'язків є секвенційно компактною в топології τ, встановлено достатні умови існування ефективних розв'язків означеної вище задачі. Для означеного класу задач запропоновано поняття узагальнених розв'язків та наведено алгоритм їх побудови, який грунтується на ідеї скаляризації задач векторної оптимізації.

Перелік цитованих джерел

1. *Божанова Т.А.* Об одной задаче Коши на транспортных сетях // Зб.наук.праць "Питання прикладної математики і математичного моделювання". — ДНУ, 2009. — С. 51–64.

2. *Божанова Т.А.* Про існування ефективних розв'язків задачі векторної оптимізації транспортного потоку на мережі.// Вісник ДНУ, Сер.Моделювання. — 2009. —Т.17, №8 — С. 132–148.
3. *Bardos C., Leroux A.Y., Nedeles J.C.* First-order quasilinear equations with boundary conditions //Communications in Partial Differential Equations — 4(1979). — p.1017-1034.
4. *Borwein J.M.* Continuity and differentiability properties of convex operators//Proc.London Math.Soc. — 44(3)(1982). — p. 420-444.
5. *Cascone A., D'Apice C., Piccoli B., Rarita L.* Mathematical Models and Methods in Applied Sciences //SIAM Journal on Mathematical Analysis — 17(2007). —№10 — p.1587-1617.
6. *Cascone A., D'Apice C., Rarita L.* Circulation of car traffic in cingested urban areas //Preprint DIIMA— Universita degli Studi di Salerno (2006). — №22 — p.1-31.
7. *Coclite G.M., Piccoli B.* Traffic Flows on a Road Network. — SISSA, Preprint. — 2002.
8. *Coclite G.M., Garavelo M., Piccoli B.* Traffic Flow on Networks // SIAM Journal on Mathematical Analysis. — 36(2005). — p. 1862-1886.
9. *D'Apice C., Kogut P. I., Manzo R.* Efficient Controls for Traffic Flow on Networks // J. of Dynamical and Control Systems. — 16(2010), No.3. — p. 407-437.
10. *Garavelo M., Piccoli B.* Traffic Flow on Networks // AIMS Series on Appl. Math. — Vol. 1 — 2006.
11. *Gugat M., Herty M., Klar A., Leugering G.* Optimal Control for Traffic Flow Networks //Journal of optimization theory and applications. — 126(2005). — p. 589-616.
12. *Holden H., Riserbo N.H.* A mathematical model of traffic flow on a network of unidirectional roads // SIAM Journal on Mathematical Analysis. — 4(1995). — p. 999-1017.
13. *Jahn J.* Vector Optimization: Theory, Applications and Extensions. — Berlin: Springer-Verlag, 2004. — 400 p.
14. *Kruzhkov S.* First-order quasilinear equations in several independent variables // Math. USSR Sbornic. — 10(1970). — p. 217-243.
15. *Lebecque J., Khoshyaran M.* First-order macroscopic traffic models for network in the context of dynamic assignment // In Transportation Planning-State of the Art, M. Patriksson and K.A.P. Labbe, eds. — 2002.
16. *Peressini A.L.* Ordered topological vector spaces // Harpet& Row, New York. —1967.

Получена 12.02.2010