

УДК 517.9: 534.1

Динамический хаос в системе "бак с жидкостью – электродвигатель"

А.Ю. Швец

НТУУ "Киевский политехнический институт
Киев 03057. E-mail: alex.shvets@bigmir.net

Аннотация. Рассмотрены колебания свободной поверхности жидкости в баке, возбуждаемые электродвигателем ограниченной мощности. В случае параметрического резонанса системы доказано существование в ней нескольких типов хаотических аттракторов. Построены и детально проанализированы фазовые портреты, сечения и отображения Пуанкаре, а также Фурье-спектры аттракторов системы. Описаны сценарии перехода от регулярных движений к хаотическим.

1. Введение

Исследованию колебаний свободной поверхности жидкости в жестких баках посвящено значительное количество работ, как теоретических, так и экспериментальных, среди которых можно отметить работы: [1, 2, 3, 4, 5]. В некоторых из вышеприведенных работ имеется детальная библиография по колебаниям баков с жидкостью. Такое внимание к этим задачам обусловлено, помимо исследовательского интереса, большим приложением получаемых результатов во многих областях современной техники. Громадное количество современных машин и механизмов в качестве неотъемлемого элемента конструкций содержит различные баки с жидкостями.

подавляющее большинство работ по изучению колебаний бака с жидкостью посвящено исследованию регулярной динамики поверхностных волн жидкости и рассматривается в постановке, так называемого, идеального возбуждения. При такой постановке задачи предполагается, что источник возбуждения колебаний имеет неограниченную мощность. Поэтому обратным влиянием колебательной системы, в данном случае бака с жидкостью, на источник возбуждения колебаний пренебрегают. Однако, на практике, чаще всего встречается ситуация, при которой мощность потребляемая колебательной нагрузкой сравнима, по величине, с мощностью возбудителя колебаний. В таких случаях применение "идеальных" математических моделей может привести к грубым ошибкам в описании динамики, как колебательной нагрузки, так и источника возбуждения колебаний. Так

может быть полностью утеряна информация о реально существующем в системе детерминированном хаосе [6, 7]. Заметим, что одним из путей возникновения детерминированного хаоса как раз и является нелинейное взаимодействие между колебательной системой (баком с жидкостью) и устройством возбуждения колебаний (электродвигателем).

Настоящая работа посвящена исследованию взаимодействия бака с жидкостью с возбуждающим его колебания электродвигателем ограниченной мощности. Особое внимание будет уделено поиску динамического хаоса в такой системе.

2. Математическая модель системы "бак с жидкостью – электродвигатель"

Рассмотрим случай вертикального возбуждения электродвигателем ограниченной мощности платформы цилиндрического бака, частично заполненного жидкостью. Схематически такая механическая система представлена на рис. 1а. Вал электродвигателя через кривошипно-шатунный механизм соединен с платформой, на которой закреплен жесткий цилиндрический бак радиуса R , частично заполненный жидкостью. Когда кривошип a поворачивается на угол Ψ , платформа получает перемещение вида $v(t) = a \cos \Psi(t)$. Для описания колебаний свободной поверхности жидкости введем цилиндрическую систему координат $Ox\theta$ с началом на оси бака, на невозмущенной поверхности жидкости. Тогда уравнение рельефа свободной поверхности жидкости запишем в виде $x = \eta(r, \theta, t)$. Предположим, что жидкость невязкая и несжимаемая с плотностью ρ и заполняет цилиндрический бак сечения S до глубины $x = -d$.

Отыскивать функцию рельефа поверхности жидкости будем в виде разложения по собственным модам [1]:

$$\eta(r, \theta, t) = \sum_{i,j} [q_{ij}^c(t)k_{ij}(r) \cos i\theta + q_{ij}^s(t)k_{ij}(r) \sin i\theta], \quad (2.1)$$

где q_{ij}^c, q_{ij}^s – неизвестные амплитуды нормальных мод; $k_{ij}(r) \cos i\theta$ и $k_{ij}(r) \sin i\theta$ – собственные моды в линейной аппроксимации задачи о колебаниях идеальной жидкости в цилиндрической оболочке. Тогда, как показано в работах [8, 9], для $\Psi(t)$ можно получить следующее уравнение Лагранжа:

$$\begin{aligned} I\ddot{\Psi} = & -2m_0a^2\dot{\Psi}^2 \sin \Psi \cos \Psi - m_0a^2\ddot{\Psi} \sin^2 \Psi + a\rho S(\dot{\Psi}^2 \sin \Psi - \\ & - \ddot{\Psi} \cos \Psi) \sum_{i,j} q_{ij}^{c,s} q_{ij}^{c,s} - 2a\rho S\dot{\Psi} \cos \Psi \sum_{i,j} q_{ij}^{c,s} \dot{q}_{ij}^{c,s} + \Phi(\Psi) - H(\Psi). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь m_0 – масса бака с жидкостью; $\Phi(\Psi)$ – движущий момент электродвигателя; $H(\Psi)$ – момент внутренних сил сопротивления вращению вала электродвигателя [1, 8, 9].

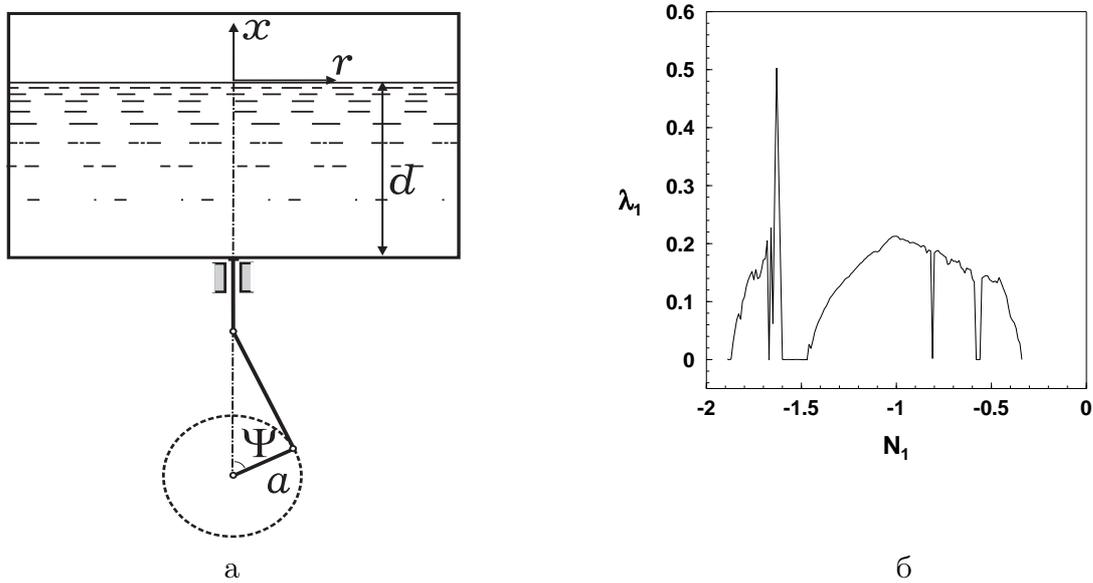


Рис. 1. Схема системы (а); зависимость максимального ляпуновского показателя λ_1 от параметра N_1 (б).

Предположим, что реализуются условия основного параметрического резонанса, когда скорость вращения вала $\dot{\Psi}(t)$ в установившихся режимах двигателя близка к $2\omega_1$, где ω_1 – собственная частота основного тона колебаний свободной поверхности жидкости, которая соответствует модам $q_{11}^c(t)k_{11}(r)\cos\theta$ и $q_{11}^s(t)k_{11}(r)\sin\theta$. Обозначим через g ускорение силы тяжести и введем в рассмотрение малый положительный параметр

$$\varepsilon = \omega_1 \sqrt{\frac{a}{g}}. \quad (2.3)$$

Также предположим, что

$$\dot{\Psi} - 2\omega_1 = \varepsilon^2 \omega_1 \beta. \quad (2.4)$$

Колебания свободной поверхности жидкости аппроксимируем колебаниями по основным и вторичным модам, амплитуды которых определяем в виде [8, 9, 10]:

$$\begin{aligned} q_{11}^c(t) &= \varepsilon v \left[p_1(\tau) \cos \frac{\Psi}{2} + q_1(\tau) \sin \frac{\Psi}{2} \right]; \\ q_{11}^s(t) &= \varepsilon v \left[p_2(\tau) \cos \frac{\Psi}{2} + q_2(\tau) \sin \frac{\Psi}{2} \right]; \\ q_{01}(t) &= \varepsilon^2 v \left[A_{01}(\tau) \cos \Psi + B_{01}(\tau) \sin \Psi + C_{01}(\tau) \right]; \\ q_{21}^{c,s}(t) &= \varepsilon^2 v \left[A_{21}^{c,s}(\tau) \cos \Psi + B_{21}^{c,s}(\tau) \sin \Psi + C_{21}^{c,s}(\tau) \right]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь τ – медленное время, $\tau = \frac{1}{4}\varepsilon^2\Psi$, $v = \frac{R}{1.8412} \operatorname{th}\left(\frac{1.8412}{R}d\right)$. Используя метод Майлса [3, 8, 9, 10], можно выразить безразмерные амплитуды $A_{ij}^{c,s}(\tau)$, $B_{ij}^{c,s}(\tau)$, $C_{ij}^{c,s}(\tau)$ вторичных мод через амплитуды $p_1(\tau)$, $q_1(\tau)$, $p_2(\tau)$, $q_2(\tau)$. Далее, как показано в [8, 9], после применения процедуры усреднения по, явно входящему, быстрому времени $\Psi(t)$ для определения амплитуд основных мод получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{d\tau} &= \alpha p_1 - \left[\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) \right] q_1 + B(p_1q_2 - p_2q_1)p_2 + 2q_1; \\ \frac{dq_1}{d\tau} &= \alpha q_1 + \left[\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) \right] p_1 + B(p_1q_2 - p_2q_1)q_2 + 2p_1; \\ \frac{d\beta}{d\tau} &= N_3 + N_1\beta - \mu_1q_1; \\ \frac{dp_2}{d\tau} &= \alpha p_2 - \left[\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) \right] q_2 - B(p_1q_2 - p_2q_1)p_1 + 2q_2; \\ \frac{dq_2}{d\tau} &= \alpha q_2 + \left[\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) \right] p_2 - B(p_1q_2 - p_2q_1)q_1 + 2p_2. \end{aligned} \quad (2.6)$$

В системе уравнений (2.6) приняты следующие обозначения: $\alpha = -\frac{\delta}{\omega_1}$ – коэффициент дополнительных сил демпфирования $\varepsilon^2\delta\dot{q}_{ij}^{c,s}$ колебаний жидкости [3, 10]; N_0, N_1 – постоянные линейной статической характеристики электродвигателя; $N_3 = \frac{1}{\omega_1} \left(N_0 + 2N_1\omega_1 \right)$; $\mu_1 = \frac{\rho S v R^2}{(1.8412)^2(2I + m_0 a^2)\omega_1^2}$; I – момент инерции двигателя; A и B – константы, величины которых зависят от диаметра бака и глубины заполнения его жидкостью [3].

Система уравнений (2.6) использовалась в качестве основной математической модели при исследовании динамики колебаний бака с жидкостью, возбуждаемого электродвигателем ограниченной мощности. Математическая модель для частного случая идеального возбуждения легко может быть получена из системы (2.6). В случае идеального возбуждения третье уравнение системы (2.6) следует отбросить, а в оставшихся положить $\beta = \text{const}$. Как установлено в работах [1, 11], система с идеальным возбуждением не имеет хаотических режимов установившихся колебаний при параметрическом резонансе. Покажем, что учет неидеальности возбуждения позволяет обнаружить хаос в этой детерминированной динамической системе.

3. Исследование возникновения динамического хаоса

В систему уравнений (2.6) входит семь параметров $(\alpha, A, B, N_1, N_3, \mu_1)$, которые определяют ее поведение при установившихся режимах. Определим тип данной динамической системы. С этой целью найдем дивергенцию Δ системы (2.6).

Очевидно, что дивергенция системы в фазовом пространстве равна:

$$\Delta \equiv \frac{\partial \left(\frac{dp_1}{d\tau} \right)}{\partial p_1} + \frac{\partial \left(\frac{dq_1}{d\tau} \right)}{\partial q_1} + \frac{\partial \left(\frac{d\beta}{d\tau} \right)}{\partial \beta} + \frac{\partial \left(\frac{dp_2}{d\tau} \right)}{\partial p_2} + \frac{\partial \left(\frac{dq_2}{d\tau} \right)}{\partial q_2} = \quad (3.1)$$

$$= 4\alpha + N_1.$$

Как видно из (3.1), дивергенция системы постоянна и зависит от коэффициента сил вязкого демпфирования α и параметра N_1 , который характеризует угол наклона статической характеристики электродвигателя [8]. Для реальных физических систем эти параметры всегда будут отрицательными. Следовательно, система уравнений (2.6) является диссипативной. Это означает, что любой начальный фазовый объем системы стремится к нулю при неограниченном возрастании времени. То есть, любое начальное подмножество изображающих точек, которое имеет ненулевой фазовый объем, с течением времени, концентрируется на одном или нескольких аттракторах. Причем, эти аттракторы имеют нулевой фазовый объем [12]. Как мы увидим далее, аттракторы системы (2.6) могут быть как регулярными, так и хаотическими.

Основной целью дальнейшего исследования является изучение возможных типов аттракторов системы уравнений (2.6), причем главное внимание уделяется поиску хаотических аттракторов. Так как данная система является достаточно сложной нелинейной системой уравнений, то для построения ее аттракторов применяется целый комплекс численных методов и алгоритмов. В пространстве параметров $(\alpha, A, B, N_1, N_3, \mu_1)$ этой системы уравнений были проведены численные расчеты для определения областей существования хаотических решений и для исследования процесса перехода от регулярных решений к хаотическим. Методика проведения таких численных расчетов детально описана в работах [6, 7].

Предположим, что бак заполнен жидкостью до глубины $h > 3R$, тогда, как показано в работе в [2]:

$$A = 1.112; \quad B = -1.531. \quad (3.2)$$

Далее пусть:

$$\alpha = -0.8; \quad N_3 = -0.25; \quad \mu_1 = 4.5. \quad (3.3)$$

В качестве бифуркационного параметра рассматривался параметр N_1 , определяющий угол наклона статической характеристики электродвигателя. Этот параметр зависит от типа электродвигателя применяемого для возбуждения колебаний. Начальные условия, при проведении численных расчетов, варьировались в окрестности начала координат фазового пространства системы уравнений (2.6).

Основным практическим критерием существования хаоса в динамической системе является наличие у нее хотя-бы одного положительного ляпуновского характеристического показателя [12]. На рис. 1б приведена зависимость максимального ляпуновского характеристического показателя λ_1 от значений параметра N_1 .

Как видно из этого рисунка, интервал $N_1 \in (-2.1, -0.3)$ практически полностью покрывается подинтервалами, в которых максимальный ляпуновский показатель имеет положительное значение. Следовательно, в этих подинтервалах положительности максимального ляпуновского показателя, в системе (2.6) существуют хаотические аттракторы.

Исследуем типы хаотических аттракторов системы (2.6) и изучим сценарии перехода от регулярных аттракторов к хаотическим. Размерность фазового пространства система (2.6) равна пяти. Поэтому наглядное геометрическое изучение пятимерных фазовых портретов и четырехмерных сечений Пуанкаре ее аттракторов возможно только в каких-либо проекциях. Заметим, что в силу симметрии системы по переменным p_1, q_1 и p_2, q_2 проекции ее фазовых портретов в установившихся режимах, как регулярных, так и хаотических, обладают одной интересной особенностью. Проекция фазового портрета на плоскость p_1, q_1 совпадает с проекцией на плоскость p_2, q_2 с точностью до постоянного множителя. Как правило мы будем использовать двумерную проекцию на плоскость p_1, q_1 . Напомним, что эти фазовые координаты отвечают колебаниям по первой основной моде.

В окрестности точки $N_1 = -2.1$ в системе существует устойчивый предельный цикл простой однотоктной структуры. Проекция фазового портрета такого цикла приведена на рис. 2а. Начиная со значения $N_1 \approx -2.03$ начинается бесконечный каскад бифуркаций удвоения периода исходного цикла. На рис. 2б–г приведены первые три бифуркации этого каскада. Последовательно наблюдается возникновение двух-, четырех- и восьмитактных предельных циклов. Данный каскад бифуркаций удвоения завершается в критической точке $N_1 \approx -1.86$ возникновением хаотического аттрактора. На рис. 3 приведены, построенные при $N_1 = -1.85$, различные проекции фазового портрета возникшего хаотического аттрактора, его сечение Пуанкаре плоскостью $\beta = -1.7$ и отображение Пуанкаре по переменной q_1 .

Возникший в системе, по сценарию Фейгенбаума, хаотический аттрактор имеет спиральную структуру. В проекции p_1, q_1 этот аттрактор обладает двухтактной структурой состоящей из двух "лент" с двумя внутренними "дырами". Следует подчеркнуть, что такие хаотические аттракторы обладают некоторой, иногда довольно значительной, похожестью фазового портрета на фазовые портреты циклов большой тактности, при бифуркациях которых рождаются эти хаотические аттракторы. Однако здесь имеется одно принципиальное отличие. Предельные циклы, несмотря на их как угодно большую тактность, отличаются регулярным возвращением траектории в любую точку цикла через время строго равное периоду цикла. В случае же хаотического аттрактора картина совершенно иная. Траектория обязательно бесконечное число раз возвращается в любую, как угодно малую, окрестность аттрактора, но время таких возвратов непредсказуемо. Моменты времени этих возвратов образуют некоторую хаотическую последовательность [12].

Сечение Пуанкаре хаотического является квазиленточным. Точки этого сечения хаотически группируются вдоль некоторых одномерных кривых. Число точек в сечении будет возрастать при увеличении времени численного интегрирования

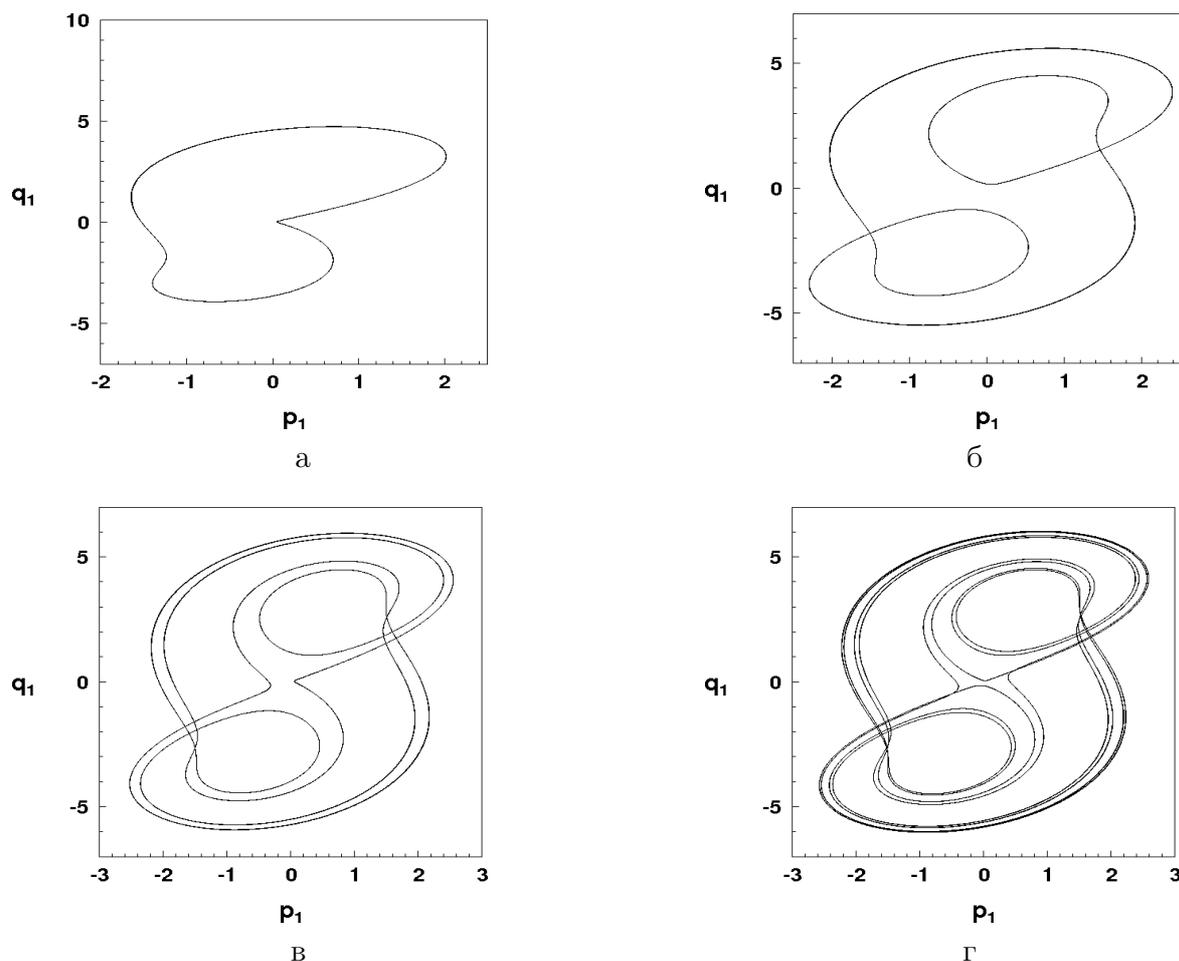


Рис. 2. Проекция фазовых портретов предельного цикла при $N_1 = -2.1$ (а) и первых трех его бифуркаций удвоения периода (б–г).

системы. Отображение Пуанкаре также может быть достаточно точно аппроксимировано одномерными кривыми. В дальнейшем при построении сечений Пуанкаре мы всегда будем использовать, в качестве секущей, плоскость $\beta = -1.7$.

На рис. 4а–г приведены Фурье–спектры, однотоктного предельного цикла, первых двух бифуркаций удвоения периода и, возникшего по сценарию Фейгенбаума, хаотического аттрактора. На этих рисунках по осям координат отложены, соответственно, частота w и логарифм модуля комплексной амплитуды Sp преобразования Фурье по одной из временных реализаций фазовых переменных. Как хорошо видно из приведенных рисунков, Фурье–спектры предельных циклов являются дискретными. Легко заметить последовательное увеличение числа пиков этих спектров на приведенных рисунках. Приведенный на рис. 4г спектр хаотического аттрактора является непрерывным.

Хаотические аттракторы подобные приведенному на рис. 3 существуют при изменении N_1 на интервале, $-1.86 < N_1 \leq -1.8$. Затем, в результате внут-

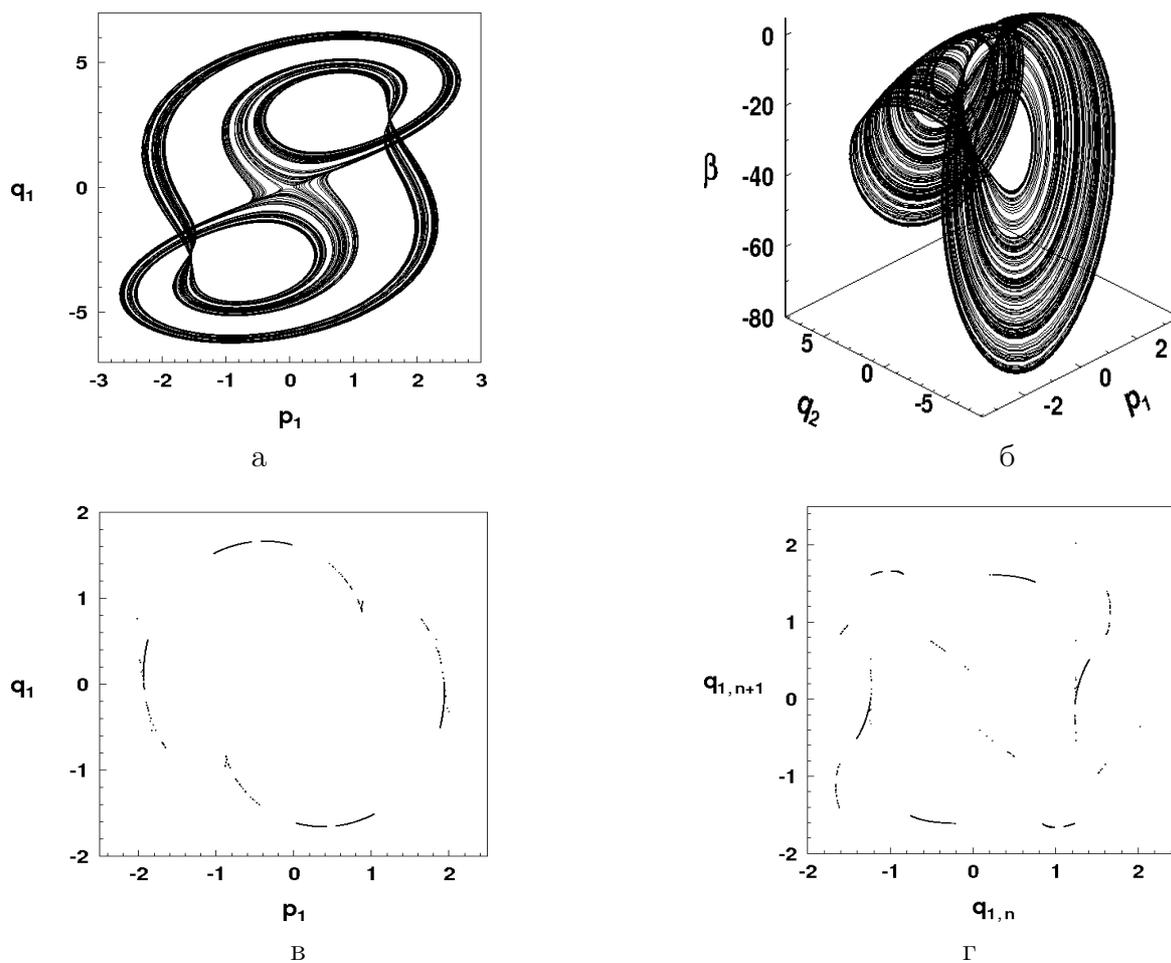


Рис. 3. Проекция фазового портрета хаотического аттрактора при $N_1 = -1.85$ (а-б), его сечение (в) и отображение Пуанкаре (г).

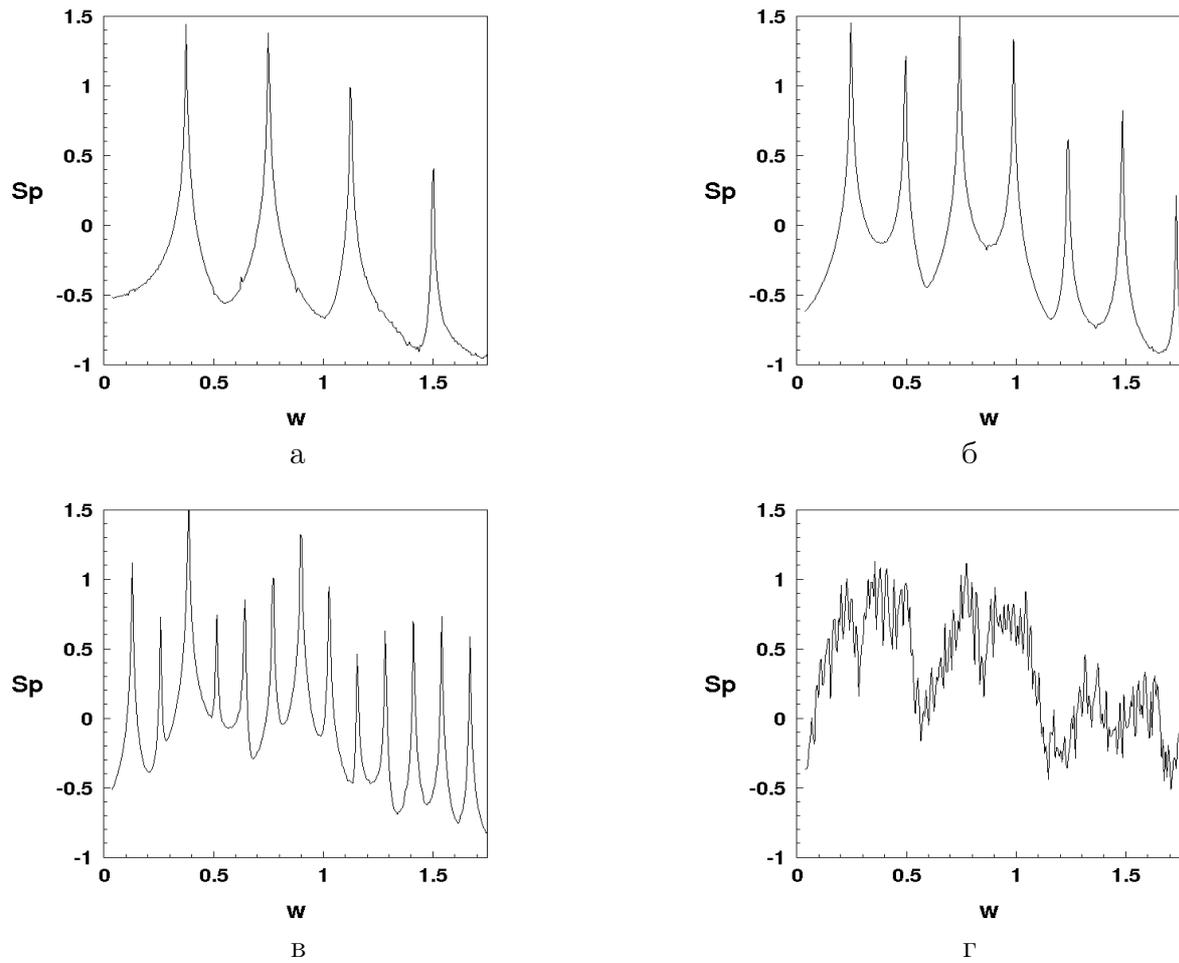


Рис. 4. Фурье-спектры предельного цикла при $N_1 = -2.04$ (а), первых двух его бифуркаций удвоения периода (б-в) и хаотического аттрактора при $N_1 = -1.85$.

ренных бифуркаций хаотических аттракторов происходит слияние двухтактных лент аттрактора в однотоктную ленту. Данное слияние происходит при значении $N_1 \approx -1.798$. В системе возникают хаотические аттракторы подобные приведенному на рис. 5. Как видно из рис. 5а, однотоктная лента хаоса, по-прежнему, имеет две внутренних "дыры". Однако, в этом случае, возрастают амплитуды колебаний по фазовым переменным. Несколько усложняется, по сравнению с однотоктным хаосом, структура сечения и, особенно, отображения Пуанкаре. Хотя и для двухтактного хаоса сечение и отображение Пуанкаре хорошо аппроксимируются одномерными кривыми. Фурье-спектр для хаотического аттрактора при $N_1 = -1.75$ приведен на рис. 6а. По сравнению со случаем двухтактного хаоса в приведенном спектре отсутствуют завалы в области средних частот.

Хаотический аттрактор сохраняет структуру, подобную приведенной на рис. 5, при изменении параметра N_1 в пределах $-1.798 < N_1 < -1.67$. Однако при изменении N_1 в вышеуказанных пределах, при неизменности структуры проекций фазовых портретов по основным модам колебаний (однотоктные с двумя окнами), происходят их некоторые эволюции в результате внутренних бифуркационных явлений. При увеличении значений N_1 наблюдается развитие стохастичности аттракторов в том смысле, что траектории начинают все плотнее заполнять занимаемые аттракторами фазовые объемы, уменьшая площадь окон в проекциях p_1, q_1 и p_2, q_2 . При этом также наблюдается возрастание амплитуд колебаний по всем фазовым переменным и увеличение значений максимальных ляпуновских показателей. Далее, в довольно узком окне периодичности, $-1.67 < N_1 \leq -1.65$ в системе наблюдаются бифуркации возникновения и гибели целого ряда предельных циклов. Затем, при $N_1 \approx -1.64$ в системе вновь возникает хаотический аттрактор, проекции которого имеют однотоктную структуру с двумя внутренними "дырами". Но заметно возрастает (см. рис. 1б) значение максимального ляпуновского характеристического показателя, которое на интервале $N_1 \in (-1.64, -1.62)$ достигает своих наибольших значений. Следовательно, на этом интервале наблюдается наибольшая скорость разбегания близких фазовых траекторий. В окрестности точки $N_1 \approx -1.61$ хаотический аттрактор исчезает и в системе возникает устойчивый предельный цикл.

При дальнейшем увеличении значения N_1 в системе (2.6) существует достаточно "широкое" окно периодичности в хаосе (см. рис. 1б). При приближении значения N_1 к правой границе этого окна, со значения $N_1 = -1.5$, начинается каскад бифуркаций удвоения периода предельных циклов. Данный бесконечный каскад заканчивается возникновением хаотического аттрактора при $N_1 \approx -1.43$. Вновь наблюдается переход от регулярного режима к хаотическому по сценарию Фейгенбаума. Проекция фазового портрета, возникшего хаотического аттрактора, его отображение Пуанкаре и Фурье-спектр, построенные при $N_1 = -1.4$ приведены, соответственно, на рис. 6б–г. Как видно из этого рисунка, проекция фазового портрета имеет структуру двухтактной ленты с двумя внутренними "дырами" и очень напоминает проекцию фазового портрета изображенную на рис. 3а. Практически рассматриваемые геометрические структуры могут быть получены одна из другой

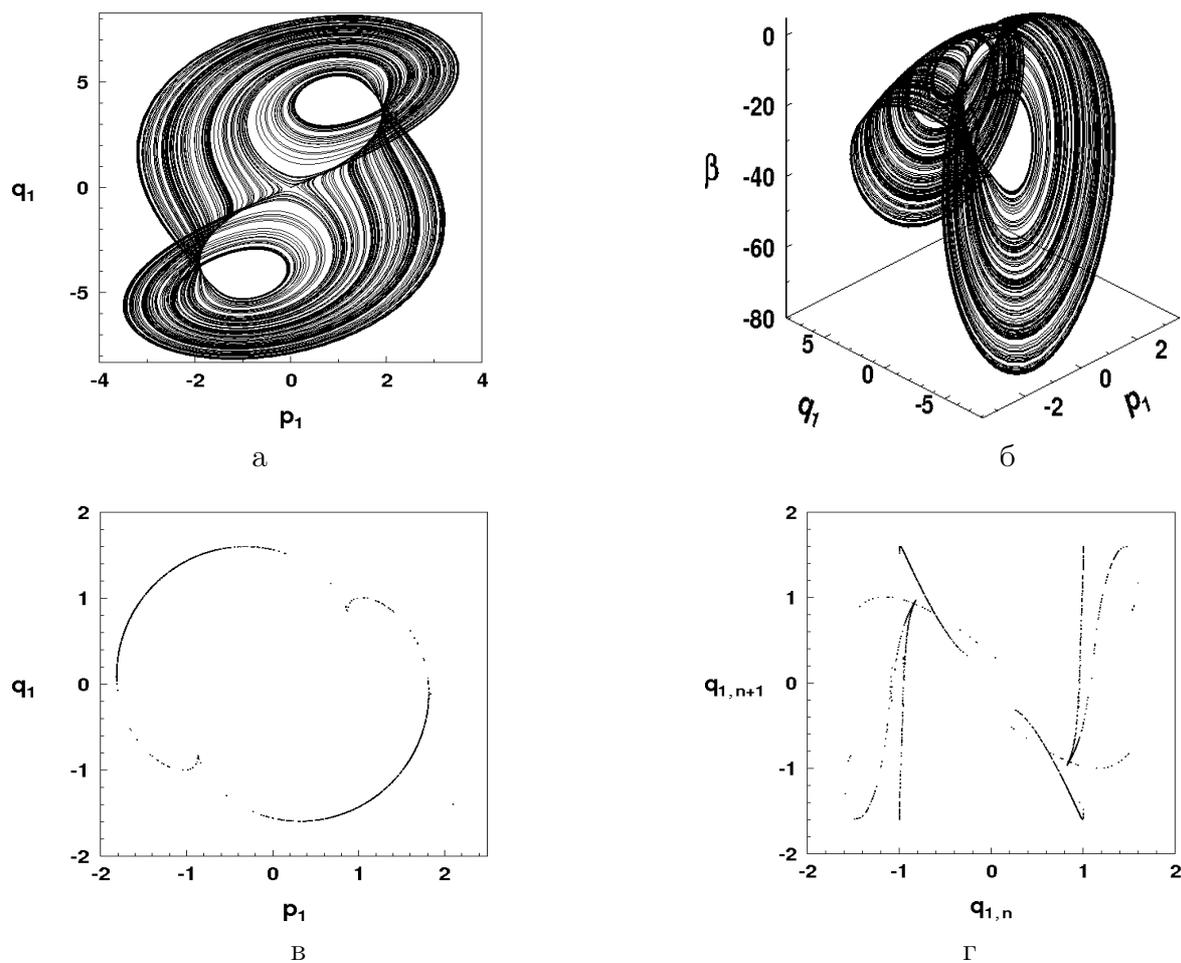


Рис. 5. Проекция фазового портрета хаотического аттрактора при $N_1 = -1.75$ (а-б), его сечение (в) и отображение Пуанкаре (г).

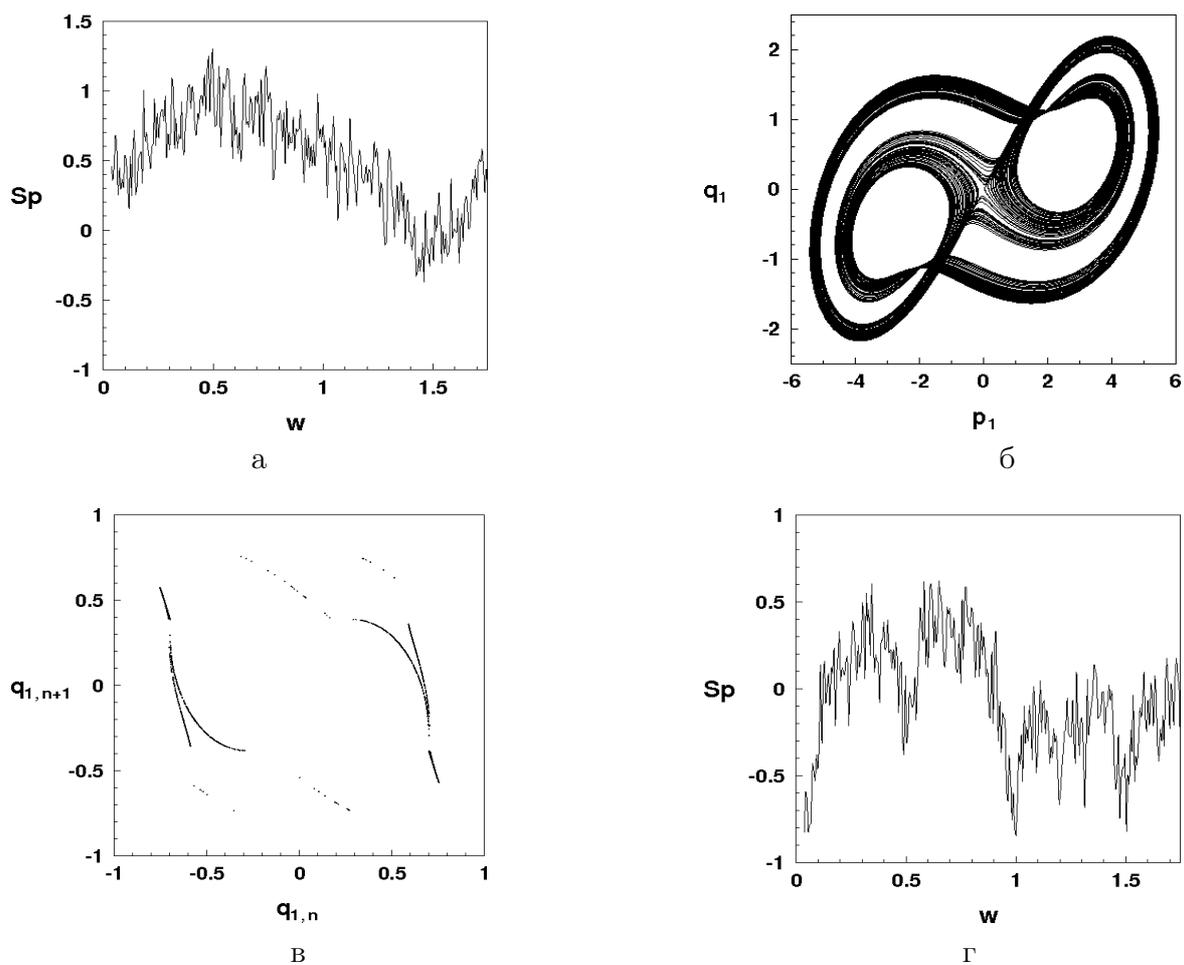


Рис. 6. Фурье-спектр хаотического аттрактора при $N_1 = -1.75$ (а); проекция фазового портрета (б), отображение Пуанкаре (в) и Фурье-спектр (г) хаотического аттрактора при $N_1 = -1.4$.

при помощи преобразования поворота. Отображение Пуанкаре (рис. 6в) имеет ленточную структуру и допускает одномерную дискретную аппроксимацию. Фурье-спектр (рис. 6г) является непрерывным с завалами в среднечастотном диапазоне, аналогично спектру хаотического аттрактора при $N_1 = -1.85$. Таким образом, налицо заметная схожесть различных характеристик хаотических аттракторов при $N_1 = -1.85$ и $N_1 = -1.4$

Двухтактные, в проекциях на координатные плоскости по амплитудам основных мод колебаний, хаотические аттракторы существуют в системе (2.6) при $-1.43 < N_1 < -1.36$. При дальнейшем увеличении N_1 , в точке $N_1 \approx -1.36$, происходит слияние двухтактной ленты хаотического аттрактора в однотоктную. На рис. 7а–г приведены проекция фазового портрета, сечение и отображение Пуанкаре и Фурье-спектр хаотического аттрактора такого типа, построенные при $N_1 = -1.25$. Здесь наблюдаются некоторые очевидные аналогии с хаотическим аттрактором приведенным на рис. 5. Отличным от предыдущего здесь является то, что по мере развития стохастичности аттрактора наблюдается уменьшение фазового объема области, занимаемой траекториями аттрактора.

Дальнейшие внутренние гомоклинические бифуркации, происходящие при продолжении увеличения значения N_1 , приводят к возникновению хаотического аттрактора имеющего сплошную структуру в проекции p_1, q_1 , то есть хаоса с наиболее развитой стохастичностью. На рис. 8 приведен аттрактор такого типа, построенный при $N_1 = -1.05$. Продолжает наблюдаться уменьшение амплитуд колебаний по основным модам траекторий аттрактора. Сечение Пуанкаре имеет ленточную структуру и качественно очень похоже на сечение в предыдущем случае. Напротив отображение Пуанкаре усложняется и начинает утрачивать ленточность своей структуры. Из Фурье-спектра аттрактора практически исчезают частотные завалы и он, оставаясь непрерывным, приобретает структуру близкую к сплошному шумовому пьедесталу. Хаотические аттракторы, подобные приведенному на рис. 8, существуют при $-1.11 \leq N_1 \leq 0.9$. При $N_1 \approx -0.89$ в системе вновь происходит возникновение хаотического аттрактора имеющего (в проекциях p_1, q_1 и p_2, q_2) однотоктную структуру с двумя "дырами". Такая структура фазового портрета хаотического аттрактора сохраняется при $N_1 \in (-0.89, -0.35)$. Хотя следует отметить, что в интервале хаоса $N_1 \in (-0.89, -0.35)$ имеются узкие окна периодичности. При $N_1 = -0.34$ хаотический аттрактор сменяется регулярным – четырёхтактным предельным циклом.

Как вытекает из проведенных исследований, хаотические аттракторы различных типов, существующие в системе уравнений (2.6) при $N_1 < -1.62$ во многом подобны соответствующим типам хаотических аттракторов существующих при $N_1 > -1.43$. Однако имеется еще одно, не очевидное, свойство их подобия, которое мы проиллюстрируем на примере однотоктного хаотического аттрактора. На рис. 9 приведены трехмерные проекции хаотических аттракторов, построенных при $N_1 = -1.75$ и $N_1 = -1.21$. В этих трехмерных проекциях учитывается и координата β , описывающая вращение вала электродвигателя. Как видно из рисунка, фазовые портреты этих аттракторов качественно практически идентичны. Однако

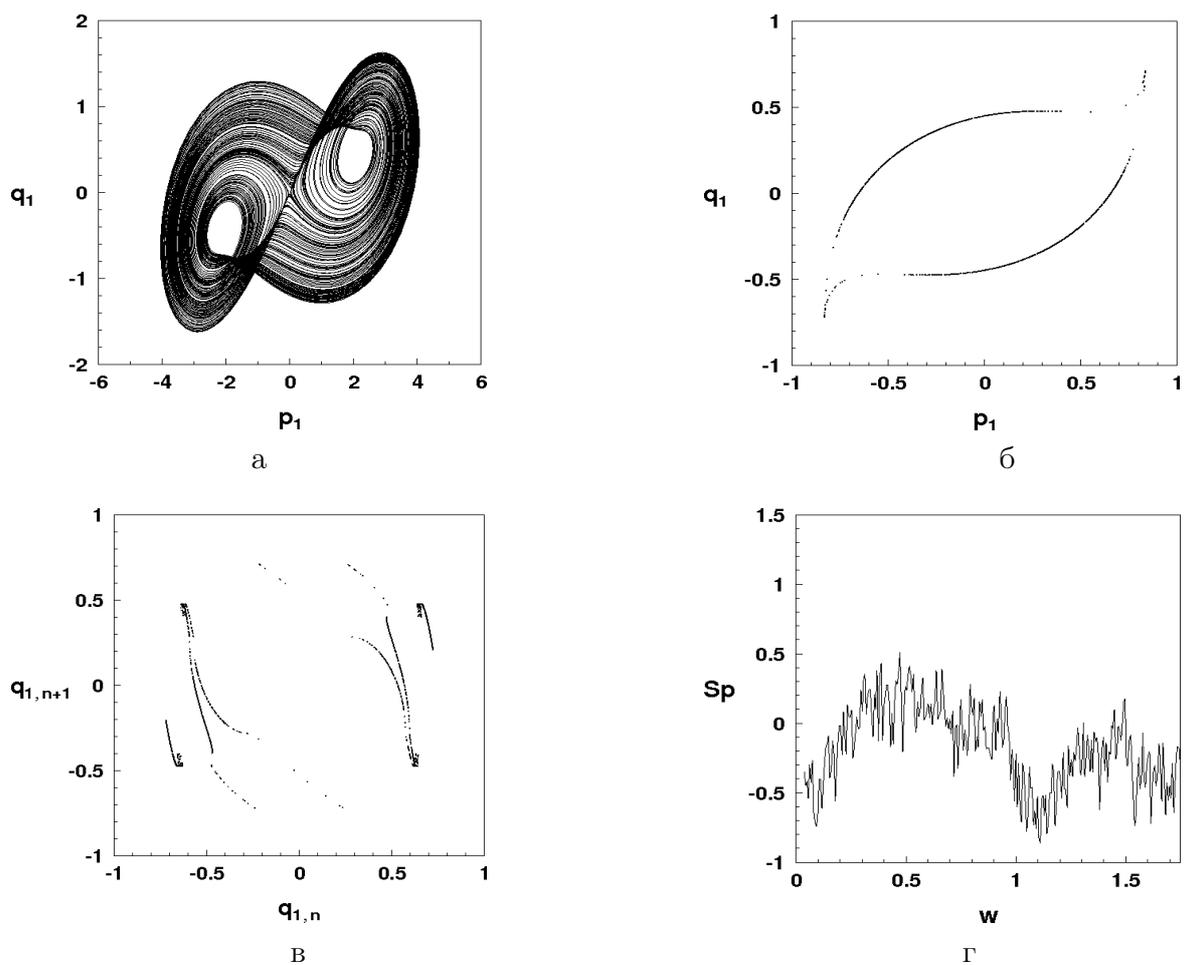


Рис. 7. Проекция фазового портрета (а), сечение (б) и отображение Пуанкаре (в) и Фурье-спектр (г) хаотического аттрактора при $N_1 = -1.25$.

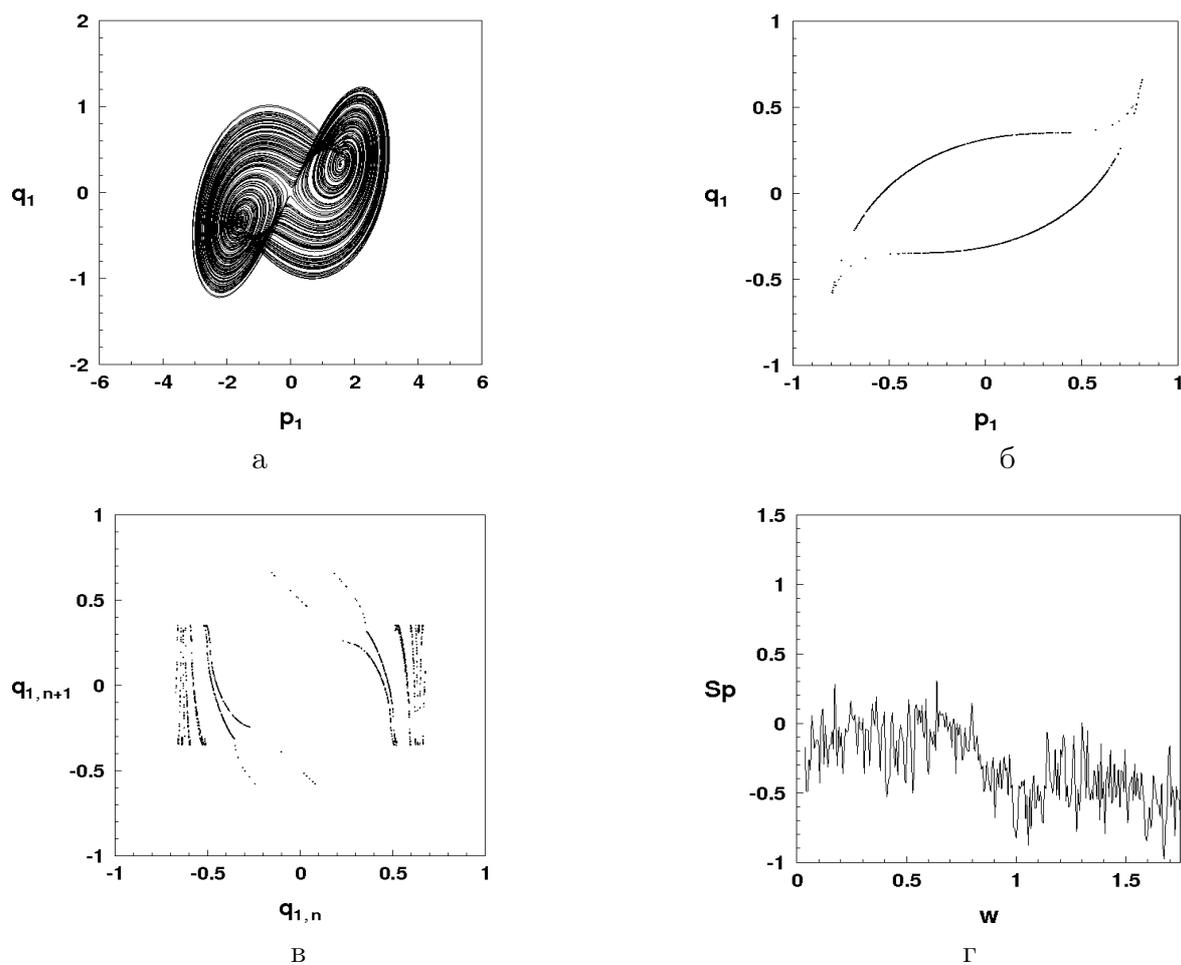


Рис. 8. Проекция фазового портрета (а), сечение (б) и отображение Пуанкаре (в) и Фурье-спектр (г) хаотического аттрактора при $N_1 = -1.05$.

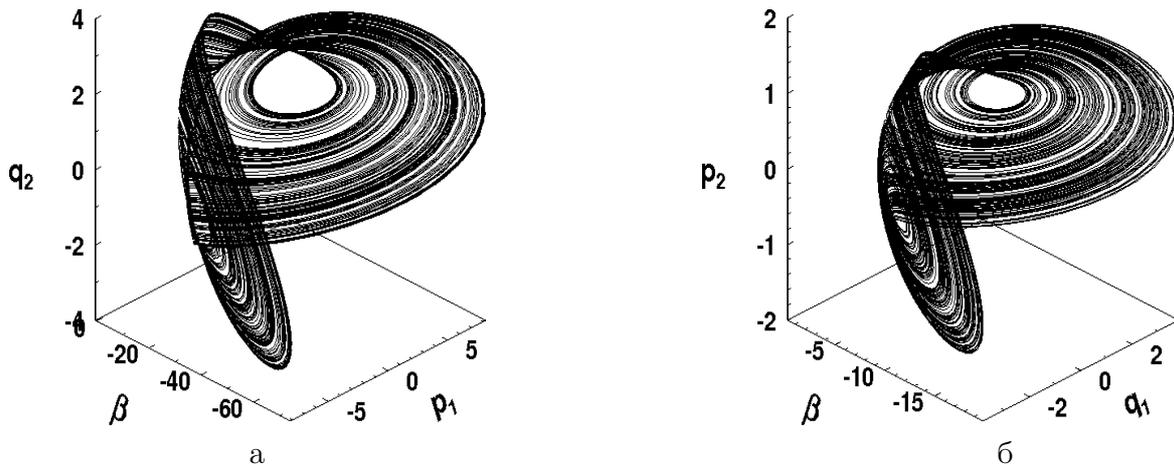


Рис. 9. Проекция фазовых портретов хаотических аттракторов при $N_1 = -1.75$ (а) и при $N_1 = -1.21$ (б).

они различны, поскольку на рисунке представлены проекции фазовых портретов на разные подпространства фазового пространства. Таким образом, наблюдается структурное подобие проекций фазовых портретов однократных хаотических аттракторов в совершенно разных фазовых подпространствах, что, очевидно, связано с симметричностью рассматриваемой задачи. Заметим, что таким подобием различных проекций фазовых портретов обладают и двухтактные хаотические аттракторы.

Следует особо подчеркнуть, что хаотические аттракторы являются типичными установившимися режимами рассматриваемой детерминированной динамической системы. Нами были найдены значительные интервалы изменения параметра N_1 , в которых существуют хаотические аттракторы.

В заключение отметим, что было проведено сравнение результатов для случаев идеального и неидеального возбуждения колебаний жидкости. Как мы уже отмечали, система уравнений для случая идеального возбуждения может быть легко получена из системы (2.6). Для случая идеального возбуждения третье уравнение в системе (2.6) следует отбросить, а в оставшихся четырех уравнениях считать β не неизвестной функцией, а заданной постоянной величиной. Так, преобразованная система была численно проинтегрирована при выполнении условий (3.3) и $N_1 \in (-2.1, -0.3)$. Значение β изменялось в интервале $\beta \in (2\beta_1, 2\beta_2)$, где β_1 и β_2 , соответственно, минимальное и максимальное значение амплитуд колебаний β в установившихся режимах случая неидеального возбуждения. Проведенное численное интегрирование позволило установить, что в случае идеального возбуждения единственными аттракторами данной системы уравнений, при так выбранных значениях параметров, являются только устойчивые положения равновесия. Этот результат подтверждает результаты работ [2, 11] об отсутствии хаотических аттракторов при идеальном возбуждении параметрических колебаний. На практике, все источники возбуждения являются неидеальными. Поэтому применение

"идеальных" расчетных моделей приводит к получению неверных результатов, так как исключается возможность обнаружения целых классов установившихся колебательных режимов, в том числе и хаотических.

Список цитируемых источников

1. *Miles J. W.* Nonlinear surface waves in closed basins // *J. Fluid Mech.* – 1976. – Vol. 75, №3. – P. 419–448.
2. *Miles J. W.* Internally resonant surface waves in circular cylinder // *J. Fluid Mech.* – 1984. – Vol. 149. – P. 1–14.
3. *Miles J. W.* Resonantly forced surface waves in circular cylinder // *J. Fluid Mech.* – 1984. – Vol. 149. – P. 15–31.
4. *Рабинович Б. И.* Введение в динамику ракет-носителей космически аппаратов.– М.: Машиностроение, 1983. – 296 с.
5. *Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Бояршина Л.Г. и др.* Нелинейная динамика осесимметричных тел, несущих жидкость.–Киев: Наук. думка, 1992.–184с.
6. *Krasnopolskaya T.S., Shvets A.Yu.* Deterministic chaos in a system generator – piezoceramic transducer // *Nonlinear Dynamics and Systems Theory.*–2006.– Vol. 6, №4.– P. 367–387.
7. *Швец А.Ю.* Детерминированный хаос сферического маятника при ограниченном возбуждении // *Укр. мат. журн.*– 2007.–Т. 59, №4.– С. 534–548.
8. *Krasnopolskaya T.S., Shvets A.Yu.* Chaotic surface waves in limited power-supply cylindrical tank vibrations // *J. Fluids & Structures.*–1994.– Vol. 8, №1.– P.1–18.
9. *Krasnopolskaya T.S., Shvets A.Yu.* Chaotic interaction between fluid vibrations in a cylindrical tank and electromotor // *Flow Induced Vibration.*– Rotterdam: A.A.Balkema, Brookfield.– 1995.–P. 269–280.
10. *Miles J. W., Henderson D.* Parametrically forced surface waves // *Annu. Rev. Fluid Mech.* – 1990. – Vol. 22. – P. 143–165.
11. *Краснопольская Т. С., Подчасов Н. Л.* Резонансы и хаос при неосесимметричных динамических процессах в гидроупругих системах // *Прикл. мех.* – 1993. –Т. 29, № 12. – С. 72–77.
12. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос.– М.: Физматлит, 2001.–295с.

Получена 30.05.2007