Динамические системы, вып. 23 (2007), 39–46

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 531.38

Об одном классе асимптотически-прецессионнных движений сферического гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил

Е. К. Щетинина
Донецкий национальный университет
экономики и торговли им. М.Туган-Барановского
Донецк 83050.*E-mail: math@iamm.ac.donetsk.ua*

Аннотация. Рассматривается задача о движении сферического гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, описываемая дифференциальными уравнениями Кирхгофа. Получены явные зависимости основных переменных от времени и показано, что изучаемая прецессия первого типа описывается периодическими функциями времени. На основании теории систем автономных дифференциальных уравнений исследована система уравнений в вариациях, выписано уравнение Хилла и построена фундаментальная матрица. С помощью первого метода Ляпунова получено решение системы нелинейных дифференциальных уравнений в виде рядов Ляпунова с одной произвольной постоянной, определяющее асимптотически-прецессионные движения гиростата в случае, когда предельное движение является полурегулярной прецессией первого типа.

1. Введение

Прецессионные движения, характерным свойством которых является постоянство угла между двумя осями l_1 и l_2 (ось l_1 неизменно связана с гиростатом, ось l_2 неподвижна в пространстве), находят широкое применение в приложениях. В этой работе описаны классы прецессионных движений как в классической задаче о движении тяжелого твердого тела, так и в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, которая описывается уравнениями Кирхгофа-Пуассона [1, 2]. Обзор результатов, полученных в исследовании прецессионных движений, дан в работе [3]. Одним из важных направлений в динамике твердого тела является направление, посвященное исследованию асимптотических движений гиростата, предельным движением которых служат прецессионные движения. Эффективным методом в изучении таких движений является первый метод Ляпунова [4]. На его основе в работе [5] разработана методика исследования условий существования асимптотически-прецессионных движений гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил и изучены некоторые классы асимптотически-прецессионных движений. В работе [6] рассмотрены асимптотически-прецессионные движения сферического гиростата в случае, когда предельное движение является либо регулярной прецессией, либо полурегулярной прецессией второго типа. Данная работа посвящена изучению асимптотически-прецессионных движений сферического гиростата, предельным движением которых служит полурегулярная прецессия первого типа [7].

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в случае, когда эллипсоид инерции является сферой. Обозначим через μ_0 момент инерции относительно главной оси гиростата. Тогда уравнения движения Кирхгофа-Пуассона таковы

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{\mu_0}\left[\boldsymbol{\omega} \times (B\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\lambda}) + \boldsymbol{\nu} \times (C\boldsymbol{\nu} - \mathrm{s})\right], \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{2}$$

Здесь введены обозначения: $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости гиростата; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силовых полей; $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – гиростатический момент, характеризующий движение носимых тел; $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс; $B = (B_{ij})$, $C = (C_{ij})$ – постоянные симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменным обозначает относительную производную по времени t.

Уравнения (1), (2) имеют первые интегралы

$$\begin{aligned} &\mu_0\boldsymbol{\omega}^2 - 2(\mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\nu}) + (C\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}) = 2E, \qquad \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1,\\ &(\mu_0\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda})\cdot\boldsymbol{\nu} - (B\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu})/2 = k. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь E и k – произвольные постоянные. Следуя работе [3] направим по оси l_1 единичный вектор $\mathbf{a}$, а ось l_2 направим по вектору вертикали $\boldsymbol{\nu}$. Тогда для прецессионных движений гиростата выполняется инвариантное соотношение $\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nu} = a_0$, где a_0 – постоянная. Пусть $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$, тогда для компонент векторов $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\omega}$ имеем значения

$$\begin{aligned} &\nu_1 = a_0'\sin\varphi, \qquad \nu_2 = a_0'\cos\varphi, \qquad \nu_3 = a_0,\\ &\omega_1 = a_0'\dot{\psi}\sin\varphi, \qquad \omega_2 = a_0'\dot{\psi}\cos\varphi, \qquad \omega_3 = a_0\dot{\psi} + \dot{\varphi}. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $a_0 = \cos\theta_0$, $a_0' = \sin\theta_0$, где θ_0 – угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\boldsymbol{\nu}$.

Условия существования прецессий (4) для уравнений (1), (2) с интегралами (3) в работе [8] сведено к исследованию решений уравнений

$$\mu_0(a_0\dot{\varphi} + \dot{\psi}) = k - (\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\nu}) + (B\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu})/2, \tag{5}$$

$$\mu_0(\dot\varphi^2 + 2a_0\dot\varphi\dot\psi + \dot\psi^2) = 2E + 2(\mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\nu}) - (C\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}), \tag{6}$$

$$\begin{gathered} 3a_0'^2\mu_0\dot\varphi\dot\psi + \mu_0 a_0(\dot\varphi^2 + 2a_0\dot\varphi\dot\psi + \dot\psi^2) + \dot\varphi\big[a_0(\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{a}) - a_0(B\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}) + \\ + (\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\nu}) - 2k\big] + \dot\psi\big[(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}) + a_0(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\nu}) - (B\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nu}) - 2a_0k\big] + \\ + a_0(\mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\nu}) - (C\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nu}) + 2a_0E = 0. \end{gathered} \tag{7}$$

Уравнению (7) в силу соотношения (6) можно придать вид

$$\begin{gathered} 3a_0'^2\mu_0\dot\varphi\dot\psi + \dot\varphi\big[a_0(\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{a}) - a_0(B\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}) + (\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\nu}) - 2k\big] + \\ + \dot\psi\big[(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}) + a_0(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\nu}) - (B\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nu}) - 2a_0k\big] + \\ + 4a_0E + 3a_0(\mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\nu}) - (C\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nu}) - a_0(C\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}) = 0. \end{gathered} \tag{8}$$

Рассмотрим случай полурегулярной прецессии первого типа, для чего положим в уравнениях (5), (6), (8) $\dot\psi = m$, где m – постоянная. Если дополнительно к указанному условию считать $a_0 = 0$ $(\theta_0 = \pi/2)$, то получим следующие условия существования полурегулярной прецессии первого типа

$$\begin{array}{llll} B_{23} = B_{12} = 0, & B_{22} = B_{11}, & C_{23} = C_{12} = 0, & C_{13} = -mB_{13}, \\ \lambda_1 = \lambda_2 = 0, & s_3 = -m\lambda_3, & m = -B_{11}/\mu_0, & k = 3\mu_0 m/2. \end{array} \tag{9}$$

Зависимость $\dot\varphi$ от угла собственного вращения найдем из формулы (6)

$$\dot\varphi^2(\varphi) = (c_2\cos 2\varphi + c_1\cos\varphi + c_1'\sin\varphi - \mu_0 m^2)/\mu_0, \tag{10}$$

где

$$c_2 = (C_{11} - C_{22})/2, \quad c_1 = 2s_2, \quad c_1' = 2s_1, \quad c_0 = 2E - (C_{11} + C_{22})/2. \tag{11}$$

Отметим, что в этом решении постоянная интеграла энергии принимает произвольное значение. Зависимости $\nu_i(t)$, $\omega_i(t)$ можно найти из соотношений (11), подставив в них $\dot\psi = m$ и $\dot\varphi$ из формулы (10).

Прецессию (9), (10) можно охарактеризовать как суперпозицию двух вращений: равномерное вращение со скоростью m вокруг вертикали и вращение относительно горизонтальной оси со скоростью $\dot\varphi$.

В данной статье ставится задача изучения условий существования движений, которые при $t \to \infty$ стремятся к указанной выше прецессии.

3. Уравнения в вариациях. Уравнение Хилла

Будем считать, что уравнение (10) определяет периодическую функцию $\varphi(t)$. Это возможно, например, тогда, когда параметры в условиях (11) удовлетворяют равенствам $C_{22} = C_{11}$, $s_2 = 0$. Тогда из уравнения (10) вытекает

$$\begin{gathered} \dot\psi = -a_0\eta_0 \mathrm{dn}(k_*, \tau), \quad \dot\varphi^2 = A_0 + B_0\sin\varphi, \\ A_0 = (2E - C_{11} - \mu_0 m^2)/\mu_0, \quad B_0 = 2s_1/\mu_0. \end{gathered} \tag{12}$$

Будем предполагать, что параметры A_0 и B_0 в (12) удовлетворяют условиям $0 < B_0 < A_0$. Вводя обозначения

$$\eta_0 = \sqrt{A_0 + B_0}, \quad k_*^2 = 2B_0/(A_0 + B_0), \quad \tau = \eta_0 t/2 \tag{13}$$

и применяя теорию эллиптических функций, из уравнения (12) в силу обозначений (13) получим

$$\dot\varphi = \eta_0 \mathrm{dn}(k_*, \tau),\ \sin\varphi = -2\mathrm{sn}(k_*, \tau)\mathrm{cn}(k_*, \tau),\ \cos\varphi = \mathrm{cn}^2(k_*, \tau) - \mathrm{sn}^2(k_*, \tau), \tag{14}$$

где k_* – модуль эллиптических функций. Таким образом, изучаемая прецессия (12) описывается периодическими функциями времени (период равен $8K_0/\eta_0$, где K_0 – полный эллиптический интеграл первого рода). Это позволяет использовать первый метод Ляпунова применительно к исследованию асимптотически-периодических решений дифференциальных уравнений.

Следуя работе [5], обозначим исследуемую прецессию через $\boldsymbol{\omega}^* = \boldsymbol{\omega}^*(t)$, $\boldsymbol{\nu}^* = \boldsymbol{\nu}^*(t)$ и положим в уравнениях Кирхгофа (1)

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^* + \boldsymbol{\Omega}, \qquad \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}^* + \boldsymbol{\gamma}. \tag{15}$$

Тогда из (1) имеем

$$\begin{gathered}\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{1}{\mu_0}[(\boldsymbol{\lambda} - B\boldsymbol{\nu}^*) \times \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega} \times B\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\omega}^* \times B\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{s} \times \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\nu}^* \times C\boldsymbol{\gamma} - \\ - C\boldsymbol{\nu}^* \times \boldsymbol{\gamma} + C\boldsymbol{\nu}^* \times \boldsymbol{\nu}^*], \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\nu}^* \times \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\Omega}.\end{gathered} \tag{16}$$

В силу первого метода Ляпунова [4] при исследовании асимптотических движений ($\boldsymbol{\Omega} \to \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\gamma} \to \mathbf{0}$) достаточно рассмотреть линейную систему, вытекающую из (16)

$$\begin{gathered}\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{1}{\mu_0}[(\boldsymbol{\lambda} - B\boldsymbol{\nu}^*) \times \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}^* \times B\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{s} \times \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\nu}^* \times C\boldsymbol{\gamma} - C\boldsymbol{\nu}^* \times \boldsymbol{\gamma}], \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\nu}^* \times \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\gamma}.\end{gathered} \tag{17}$$

Система уравнений в вариациях (17) допускает первые интегралы

$$\begin{gathered}\mu_0(\boldsymbol{\omega}^* \cdot \boldsymbol{\Omega}) + (C\boldsymbol{\nu}^* - \mathbf{s}) \cdot \boldsymbol{\gamma} = c_1, \quad \boldsymbol{\nu}^* \cdot \boldsymbol{\gamma} = c_2, \\ \mu_0(\boldsymbol{\nu}^* \cdot \boldsymbol{\Omega}) + (\mu_0\boldsymbol{\omega}^* - B\boldsymbol{\nu}^* + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\gamma} = c_3.\end{gathered} \tag{18}$$

Так как по предположению $\boldsymbol{\nu}^*(t)$, $\boldsymbol{\omega}^*(t)$ – периодические функции, то в силу существования у системы (17) первых интегралов (18) четыре характеристичных числа системы (17) равны нулю. Для существования асимптотических решений уравнений (17) необходимо исследовать знаки оставшихся двух характеристичных чисел системы (17).

Следуя [5], введем переменные

$$\begin{aligned} &u_1 = \mu_0(\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{a}), \quad u_2 = \mu_0(\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\nu}^*), \quad u_3 = \mu_0(\boldsymbol{\Omega}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\nu}^*)),\\ &u_4 = \boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{a}, \quad u_5 = \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nu}^*, \quad u_6 = \boldsymbol{\gamma}\cdot(\mathbf{a}\times\boldsymbol{\nu}^*). \end{aligned} \tag{19}$$

Замена (19) не изменяет характеристичных чисел системы (17). В переменных (19) интегралы (18) имеют вид

$$\begin{aligned} &\dot\varphi u_1 + \dot\psi u_2 - (a_0')^{-2}[(\boldsymbol{\tau}_4\cdot\boldsymbol{\tau}_1)u_4 + (\boldsymbol{\tau}_4\cdot\boldsymbol{\tau}_2)u_4 + (\boldsymbol{\tau}_4\cdot\boldsymbol{\tau}_3)u_6 = c_1, \quad u_5 = c_2,\\ &u_2 + (\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\tau}_1)u_4 + (\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\tau}_2)u_5 + (\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\tau}_3)u_6 = c_3, \end{aligned} \tag{20}$$

где

$$\begin{aligned} &\mathbf{b} = (a_0')^{-2}[\mu_0(\dot\varphi\mathbf{a} + \dot\psi\boldsymbol{\nu}^*) + \boldsymbol{\tau}_5], \quad \boldsymbol{\tau}_1 = \mathbf{a} - a_0\boldsymbol{\nu}^*, \quad \boldsymbol{\tau}_2 = \boldsymbol{\nu}^* - a_0\mathbf{a},\\ &\boldsymbol{\tau}_3 = \mathbf{a}\times\boldsymbol{\nu}^*, \quad \boldsymbol{\tau}_4 = \mathbf{s} - C\boldsymbol{\nu}^*, \quad \boldsymbol{\tau}_5 = \boldsymbol{\lambda} - B\boldsymbol{\nu}^*. \end{aligned} \tag{21}$$

Обратное к (19) преобразование имеет вид

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{a_0'^2\mu_0}(u_1\boldsymbol{\tau}_1 + u_2\boldsymbol{\tau}_2 + u_3\boldsymbol{\tau}_3), \quad \boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{a_0'^2}(u_4\boldsymbol{\tau}_1 + u_5\boldsymbol{\tau}_2 + u_6\boldsymbol{\tau}_3). \tag{22}$$

Следуя методике, изложенной в работе [5], положим

$$\mathbf{x} = m(t)\mathbf{u}, \tag{23}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)^T$, а $m(t) = (m_{ij}(t))$. Здесь

$$\begin{aligned} &m_{11} = m_{12} = m_{14} = m_{15} = m_{16} = 0, \ \ m_{13} = 1,\\ &m_{21} = m_{22} = m_{23} = m_{25} = m_{26} = 0, \ \ m_{24} = 1,\\ &m_{31} = m_{32} = m_{33} = m_{34} = m_{35} = 0, \ \ m_{36} = 1,\\ &m_{41} = \dot\varphi, \ \ m_{42} = \dot\psi, \ \ m_{43} = 0, \ \ m_{44} = -(a_0')^{-2}(\boldsymbol{\tau}_4\cdot\boldsymbol{\tau}_1),\\ &m_{45} = -(a_0')^{-2}(\boldsymbol{\tau}_4\cdot\boldsymbol{\tau}_2), \ \ m_{46} = -(a_0')^{-2}(\boldsymbol{\tau}_4\cdot\boldsymbol{\tau}_3)\\ &m_{51} = m_{52} = m_{53} = m_{54} = m_{56} = 0, \ \ m_{55} = 1,\\ &m_{61} = m_{63} = 0, \ \ m_{62} = 1, \ \ m_{64} = (\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\tau}_1), \ \ m_{65} = (\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\tau}_2), \ \ m_{66} = (\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\tau}_3). \end{aligned} \tag{24}$$

С помощью преобразования (22), замены (23) и обозначений (20), (21), (24) из уравнений (17) получим

$$\dot x_1 = \sum_{i=1}^{6} h_{1i}(t)x_i, \quad \dot x_2 = \sum_{i=1}^{6} h_{2i}(t)x_i, \quad \dot x_3 = \sum_{i=1}^{6} h_{3i}(t)x_i, \tag{25}$$

$$\dot x_4 = 0, \quad \dot x_5 = 0, \quad \dot x_6 = 0. \tag{26}$$

Очевидно, из уравнений (26) в силу (20) следует, что $x_4 = c_1$, $x_5 = c_2$, $x_6 = c_3$. По предположению предельное движение описывается периодическими функциями времени. Следовательно, характеристичные числа уравнений (25) (26) совпадают с характеристичными числами системы третьего порядка

$$\begin{aligned} \dot x_1 &= h_{11}(t)x_1 + h_{12}(t)x_2 + h_{13}(t)x_3,\\ \dot x_2 &= h_{21}(t)x_1 + h_{22}(t)x_2 + h_{23}(t)x_3,\\ \dot x_3 &= h_{31}(t)x_1 + h_{32}(t)x_2 + h_{33}(t)x_3, \end{aligned} \tag{27}$$

где $h_{11} = 0$, $h_{12}(t) = [\dot\varphi^2(\boldsymbol\tau^2 \cdot B\boldsymbol\tau_1) - \dot\varphi\dot\psi(\boldsymbol\tau_1 \cdot B\boldsymbol\tau_1) - \dot\varphi(\boldsymbol\tau_1 \cdot C\boldsymbol\tau_1) - a_0'^2\dot\varphi(\boldsymbol\nu^* \cdot \boldsymbol\tau_4)+ +G_1(\boldsymbol g_2 \cdot \boldsymbol\tau_1) - G_2(\boldsymbol g_1 \cdot \boldsymbol\tau_1)]/a_0'^2\dot\varphi$, $h_{13}(t) = [\dot\varphi^2(\boldsymbol\tau_2 \cdot B\boldsymbol\tau_3) - \dot\varphi\dot\psi(\boldsymbol\tau_1 \cdot B\boldsymbol\tau_3) - \dot\varphi(\boldsymbol\tau_1 \cdot C\boldsymbol\tau_3)- -G_1(\boldsymbol g_2 \cdot \boldsymbol\tau_3) - G_2(\boldsymbol g_1 \cdot \boldsymbol\tau_3)]/a_0'^2\dot\varphi$, $h_{21}(t) = 1/\mu_0$, $h_{22}(t) = 0$, $h_{23}(t) = -\dot\psi$, $h_{31}(t) = 0$, $h_{32}(t) = \dot\psi - [(\boldsymbol\tau_1 \cdot \boldsymbol\tau_4) + a_0'^2(a_0\dot\varphi + \dot\psi)(\boldsymbol b \cdot \boldsymbol\tau_1)]/a_0'^2\dot\varphi\mu_0$, $h_{33}(t) = -[(\boldsymbol\tau_3 \cdot \boldsymbol\tau_4) + a_0'^2(a_0\dot\varphi + \dot\psi)(\boldsymbol\tau_3 \cdot \cdot \boldsymbol\tau_5)]/a_0'^2\dot\varphi\mu_0$. Здесь обозначено $\boldsymbol g_1 = \dot\varphi \boldsymbol b$, $\boldsymbol g_2 = \dot\psi \boldsymbol b + \boldsymbol\tau_4/a_0'^2$, $G_1 = a_0'^2[\dot\psi + \boldsymbol\tau_1 \cdot (\boldsymbol\tau_3 \times \boldsymbol b)/\mu_0]$, $G_2 = a_0'^2[\boldsymbol\tau_2 \cdot (\boldsymbol\tau_3 \times \boldsymbol b)/\mu_0 - a_0\dot\psi]$.

Для определения характеристичных чисел системы (27) в работах [5, 6] использована сопряженная система. С ее помощью в работе [5] получено уравнение Хилла, на основании которого можно определить ненулевые характеристичные числа системы (27). В данной работе это уравнение найдем другим методом. Запишем систему (27)

$$\dot x_1 = h_{12}(t)x_2 + h_{13}(t)x_3, \quad \dot x_2 = x_1/\mu_0 - \dot\psi x_3, \quad \dot x_3 = h_{32}(t)x_2 + h_{33}(t)x_3. \tag{28}$$

На основании теории систем автономных дифференциальных уравнений уравнения (28) допускают частное решение

$$x_1^*(t) = -a_0'^2\mu_0\dot\varphi\dot\psi, \quad x_2^*(t) = 0, \quad x_3^*(t) - a_0'^2\dot\varphi. \tag{29}$$

Подставим выражения (29) в систему (28). Тогда получим условия

$$h_{13}(t) = \frac{\mu_0}{\dot\varphi}(\ddot\varphi\dot\psi + \ddot\psi\dot\varphi), \quad h_{33}(t) = \frac{\ddot\varphi}{\dot\psi}. \tag{30}$$

Для получения уравнения Хилла выразим $x_1 = \mu_0\dot x_2 + \dot\psi\mu_0 x_3$ из второго уравнения системы (28) и подставим в первое уравнение этой системы. Учитывая выражения (30), получим уравнение

$$\mu_0\ddot x_2 + (\mu_0\dot\psi h_{32}(t) - h_{12}(t))x_2 = 0.$$

В развернутом виде имеем

$$\begin{aligned}
&a_0'^2\dot\varphi\mu_0^2\ddot x_2 + \{a_0'^2\mu_0^2\dot\varphi^3 - \mu_0\dot\psi^2(\boldsymbol\lambda \cdot \mathbf a - B\mathbf a \cdot \boldsymbol\nu^* - a_0(\boldsymbol\lambda \cdot \boldsymbol\nu^*) + a_0(B\boldsymbol\nu^* \cdot \boldsymbol\nu^*))-\\
&- \mu_0\dot\varphi^2(3(B\mathbf a \cdot \boldsymbol\nu^*) - a_0(B\mathbf a \cdot \mathbf a) - 2a_0(B\boldsymbol\nu^* \cdot \boldsymbol\nu^*) - (1 + a_0'^2)(\mathbf a \cdot \boldsymbol\lambda) + a_0(\boldsymbol\lambda \cdot \boldsymbol\nu^*))+\\
&+ \mu_0\dot\varphi\dot\psi((a_0^2 - a_0'^2)(B\boldsymbol\nu^* \cdot \boldsymbol\nu^*) - 2a_0(B\mathbf a \cdot \boldsymbol\nu^*) + (B\mathbf a \cdot \mathbf a) + a_0'^2(\boldsymbol\lambda \cdot \boldsymbol\nu^*))-\\
&- \dot\psi[\mu_0(\mathbf s \cdot \mathbf a - C\mathbf a \cdot \boldsymbol\nu^* - a_0(\mathbf s \cdot \boldsymbol\nu^*) + a_0(C\boldsymbol\nu^* \cdot \boldsymbol\nu^*)) - (\boldsymbol\lambda \cdot \boldsymbol\nu^* - B\boldsymbol\nu^* \cdot \boldsymbol\nu^*)(\boldsymbol\lambda \cdot \mathbf a-\\
&- B\mathbf a \cdot \boldsymbol\nu^* - a_0(\boldsymbol\lambda \cdot \boldsymbol\nu^*) + a_0(B\boldsymbol\nu^* \cdot \boldsymbol\nu^*))] + \dot\varphi[\mu_0(C\mathbf a \cdot \mathbf a) + (2a_0^2-\\
&- a_0'^2)\mu_0(C\boldsymbol\nu^* \cdot \boldsymbol\nu^*) + a_0\mu_0(\mathbf s \cdot \mathbf a) - 3a_0\mu_0(C\mathbf a \cdot \boldsymbol\nu^*) + (a_0'^2 - a_0^2)\mu_0(\mathbf s \cdot \boldsymbol\nu^*)+\\
&+ (\mathbf a \cdot \boldsymbol\lambda - B\mathbf a \cdot \boldsymbol\nu^*)(\mathbf a \cdot \boldsymbol\lambda - B\mathbf a \cdot \boldsymbol\nu^* - a_0(\boldsymbol\lambda \cdot \boldsymbol\nu^*) + a_0(B\boldsymbol\nu^* \cdot \boldsymbol\nu^*))]-\\
&- (\boldsymbol\lambda \cdot \boldsymbol\nu^* - B\boldsymbol\nu^* \cdot \boldsymbol\nu^*)(\mathbf a \cdot \mathbf s - C\mathbf a \cdot \boldsymbol\nu^* - a_0(\mathbf s \cdot \boldsymbol\nu^*) + a_0(C\boldsymbol\nu^* \cdot \boldsymbol\nu^*))\}x_2 = 0.
\end{aligned} \tag{31}$$

Отличительной особенностью уравнения (31) является то, что оно получено для общего случая сферического гиростата и может быть использовано для исследования асимптотически-прецессионных движений сферического гиростата, когда предельное движение – прецессия любого вида (регулярная, полурегулярная, прецессия общего вида).

Запишем уравнение (31) для случая (9), (12)

$$\begin{aligned} &\mu_0^2\ddot{x}_2 + [\mu_0^2\ddot{\varphi} - \mu_0\dot{\varphi}(3B_{13}\sin\varphi - 2\lambda_3) + (\mu_0 s_1 - 2\lambda_3 B_{13})\sin\varphi + \\ &+ B_{13}^2\sin^2\varphi + \lambda_3^2 + m\mu_0(B_{33} - B_{11}) + \mu_0(C_{33} - C_{11})]x_2 = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Из соотношений (12)–(14) следует, что $\dot{\varphi}$ является ограниченной функцией времени и зависит от параметров μ_0, m, s_1, C_{11}, E. Используя это свойство, а также условие Ляпунова $p(t) \leq 0$ $(p(t) \neq 0)$ существования положительного характеристичного числа уравнения $\ddot{x}_2 + p(t)x_2 = 0$, из уравнения (32) можно сделать вывод: для больших положительных значений параметра $B_{11} - B_{33}$ уравнение (32) имеет одно положительное и одно отрицательное характеристичные числа. Общее решение уравнения (32) таково

$$x_2(t) = C_1 e^{-\lambda t}\psi_1(t) + C_2 e^{\lambda t}\psi_2(t), \tag{33}$$

где $\lambda > 0$, $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ – периодические функции времени с периодом $8K_0/\eta_0$, C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Обратимся к системе (28). В силу того, что $h_{32}(t) = 0$, $h_{33}(t) = \ddot{\varphi}/\dot{\varphi}$ из третьего уравнения системы (28) получим $x_3(t) = C_3\dot{\varphi}$, где C_3 – произвольная постоянная. Следовательно, из второго уравнения системы (28) найдем

$$x_1(t) = \mu_0[C_1 e^{-\lambda t}(\psi_1'(t) - \lambda\psi_1(t)) + C_2 e^{\lambda t}(\psi_2'(t) - \lambda\psi_2(t))] + mC_3\dot{\varphi}. \tag{34}$$

Таким образом, фундаментальная матрица системы (28) такова

$$X(t) = \begin{pmatrix} \mu_0 e^{-\lambda t}(\psi_1'(t) - \lambda\psi_1(t)) & \mu_0 e^{\lambda t}(\psi_2'(t) - \lambda\psi_2(t)) & m\dot{\varphi} \\ e^{-\lambda t}\psi_1(t) & e^{\lambda t}\psi_1(t) & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\varphi} \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Из (33)–(35) вытекает, что для построения рядов Ляпунова в качестве первого приближения необходимо брать первый вектор-столбец фундаментальной матрицы $X(t)$. Для нахождения общего решения системы (25), (26) необходимо воспользоваться матрицей (35). Обозначим фундаментальную матрицу системы (25), (26) через $X^*(t)$. В силу результатов первого метода Ляпунова линейная система (17) является правильной и допускает четыре нулевых характеристичных числа, одно положительное характеристичное число λ и одно отрицательное характеристичное число $(-\lambda)$. Поэтому решение уравнений (16) в переменных u_i $(i = \overline{1,6})$ таково

$$u_i(t) = \sum_{m_1=1}^{\infty} L_i^{(m_1)}(t)c^{m_1}(e^{-\lambda t})^{m_1}, \tag{36}$$

где c – произвольная постоянная, m_1 – натуральное число, $L_i^{(m_1)}$ – непрерывные функции, характеристичные числа которых не менее нуля. Ряды (36) сходятся абсолютно для малых значений c и при $t \to \infty$ $u_i(t) \to 0$ $(i = \overline{1,6})$.

Таким образом, при выполнении условий $0 < 2s_1 < 2E - C_{11} - \mu_0 m^2$, $m > 0$, $B_{11} - B_{33} > 0$ доказано существование решений нелинейных уравнений в возмущениях (16), для которых в силу соотношений (22), (36) $\mathbf{\Omega} \to \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\gamma} \to \mathbf{0}$. Решения (36) описывают асимптотически-прецессионные движения сферического гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Предельным движением для них является полурегулярная прецессия первого типа: $\dot{\psi} = m$, $\dot{\varphi} = \eta_0 \mathrm{dn}(k_*, \tau)$.

Список цитируемых источников

1. *Харламов П.В., Мозалевская Г.В., Лесина М.Е.* О различных представлениях уравнений Кирхгофа // Механика твердого тела. – 2001. – Вып. 31. – С. 3–17.
2. *Yehia H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces. II. A new form of the equations of motion of a rigid body in an ideal incompressible fluid // J. Mecan. Theor. Appl. – 1986. – V. 5, № 5. – P. 755–762.
3. *Горр Г.В.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и динамике систем связанных твердых тел // Прикл. математика и механика. – 2003. – Т. 67, вып. 4. – С. 573–587.
4. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения // Собр. соч. – М.: Изд-во АН СССР. – 1956. – Т. 2. – С. 7–263.
5. *Горр Г.В., Думбай Д.И.* Об асимптотически-прецессионных движениях гиростата в обобщенной задаче динамики // Механика твердого тела. – 1994. – Вып. 26 (I). – С. 20–28.
6. *Молочинская А.И.* Об одном классе асимптотически-прецессионных движений сферического гиростата // Вісник Донецького університету. Серія А. – 2005. – № 2. – С. 88–93.
7. *Курганский Н.В.* О полурегулярной прецессии первого типа относительно вертикали в одной задаче динамики твердого тела // Механика твердого тела. – 1988. – Вып. 20. – С. 67–71.
8. *Горр Г.В., Щетинина Е.К.* Новые классы прецессионных движений гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил // Труды ИПММ НАН Украины. – 2006. – Т. 12. – С. 36–45.

Получена 1.11.2007