Динамические системы, вып. 25 (2008), 51–64

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 517.977

Синтез инерционных управлений для аффинных систем с одномерным управлением

В. И. Коробов[*,], В. А. Скорик[*]**

[*] Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина,
Харьков 61077. *E-mail:* {*vkorobov,skoryk*}*@univer.kharkov.ua*
[**] Institute of Mathematics, Szczecin University,
Szczecin 70-451, Poland. *E-mail: korobow@univ.szczecin.pl*

Аннотация. Рассмотрена задача допустимого синтеза позиционного управления для аффинных систем с одномерным управлением с наперед заданными геометрическими ограничениями на управление и его производные до произвольного заданного порядка. Исследования проводятся на основе метода функции управляемости. Показано, что каждая неотрицательная монотонно невозрастающая на неотрицательной полуоси функция, имеющая не менее, чем n (n – размерность системы) точек убывания, удовлетворяющая некоторому условию, порождает семейство управлений, каждое из которых переводит произвольную точку из некоторой окрестности начала координат в начало координат за конечное время и удовлетворяет заданным ограничениям. На время движения даются точные оценки снизу и сверху. Результаты проиллюстрированы примером.

Ключевые слова: нелинейная управляемая система, допустимый синтез, метод функции управляемости, инерционное управление.

1. Введение

В связи с исследованием управляемости и стабилизации нелинейных систем в работе [3] был введен класс нелинейных систем, получивших название *треугольные системы*. В этой работе предложен конструктивный метод отображения таких систем на линейные при помощи замены переменных и замены управления, что впоследствии стало предметом многочисленных обобщений [2, 10, 13, др.]. Важной особенностью исходного подхода [3] являются минимальные требования к гладкости правых частей отображаемых систем, в то время как в существующей в настоящее время теории нелинейных систем общего вида задача отображаемости, как и многие другие вопросы, традиционно изучаются в бесконечно-дифференцируемом случае.

Дальнейшее развитие теории треугольных систем, а также применения идей и техники треугольных систем к исследованию отображаемости их на линейные системы получено в работе [12] для треугольных систем и в работах [11, 15] для нелинейных систем с заданной минимальной степенью гладкости правых частей. А именно, описаны классы систем, которые отображаются на линейные системы только с помощью замены переменных (класса $C^2(\mathbb{Q})$ с невырожденным якобианом), что позволяет сохранить ограничения на управление, и, как правило, является важным при решении задач управления. Так, в работе [15] дан критерий линеаризуемости в области $\mathbb{Q}$ управляемых нелинейных систем класса $C^1(\mathbb{Q})$. Показано, что нелинейная система

$$\dot{x} = g(x,u), \quad x \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R},\ g(x,u) \in C^1(\mathbb{Q}\times\mathbb{R}), \tag{1.1}$$

является локально линеаризуемой в области $\mathbb{Q}$ тогда и только тогда, если выполнены следующие условия:

(A) $g(x,u) = a(x) + b(x)u$, где $a(x), b(x) \in C^1(\mathbb{Q})$;

(B1) вектор функции $\mathrm{ad}_a^0 b(x),\ \ldots,\ \mathrm{ad}_a^n b(x)$ существуют и принадлежат классу $C^1(\mathbb{Q})$, где все скобки Ли $\mathrm{ad}_a^k b(x)$ векторных полей $a(x)$, $b(x)$ определяются как $\mathrm{ad}_a^0 b(x){=}b(x)$, $\mathrm{ad}_a^{k+1} b(x){=}[a(x), \mathrm{ad}_a^k b(x)]{=}a_x(x)\mathrm{ad}_a^k b(x){-}\left(\mathrm{ad}_a^k b(x)\right)_x a(x)$ для $k \geq 0$;

(B2) $\mathrm{rang}(b(x), \mathrm{ad}_a b(x), \ldots, \mathrm{ad}_a^{n-1} b(x)) = n$, $x \in \mathbb{Q}$;

(B3) $[\mathrm{ad}_a^k b(x), \mathrm{ad}_a^i b(x)] = 0$ для всех $0 \leq i,k \leq n$ и $\mathrm{ad}_a^n b(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i \mathrm{ad}_a^{i-1} b(x)$ для $x \in \mathbb{Q}$;

(B4) существует функция $\varphi^0(x) : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $\varphi^0(x) \in C^2(\mathbb{Q})$, такая что

$$\varphi_x^0(x)\mathrm{ad}_a^k b(x) = 0, \quad k = 0, \ldots, n-2,\ x \in \mathbb{Q}, \tag{1.2}$$

$$\varphi_x^0(x)\mathrm{ad}_a^{n-1} b(x) \neq 0,\ x \in \mathbb{Q}. \tag{1.3}$$

В данной работе приведено конструктивное решение задачи допустимого синтеза инерционных управлений для нелинейных систем вида (1.1) с нулевой точкой покоя, удовлетворяющих этим условиям, т.е. задачи построения управления $u = u(x)$, которое переводит произвольную начальную точку x_0 из некоторой окрестности $\mathrm{Q} \subset \mathbb{Q}$ начала координат в начало координат по траектории $x(t) \in \mathrm{Q}$ системы $\dot{x} = g(x, u(x))$ за конечное время $T(x_0)$, и такого, что

$$|u^{(k)}(x)| \leq d_k, \quad k = 0, 1, \ldots, l, \quad x \in \mathrm{Q}, \tag{1.4}$$

где $u^{(k)}(x)$ – производная k-го порядка в силу системы $\dot{x} = g(x, u(x))$. Исследования проведены на основе метода функции управляемости [4]–[6]. Построено множество управлений, каждое из которых решает задачу синтеза управлений и вместе со своими производными до произвольного заданного порядка удовлетворяет заданным ограничениям. На время движения даются точные оценки снизу и сверху. Результаты проиллюстрированы модельным примером.

Данная работа является развитием результатов работ [7, 8, 14]. В отличие от результатов этих работ, рассматривается решение задачи синтеза инерционных управлений для нелинейных систем не по первому приближению. Рассматривается класс нелинейных систем — аффинных систем. Развитие результатов работы

[7] состоит в решении задачи синтеза инерционных управлений, а в сравнении с работами [8, 14] здесь дается построение инерционных управлений, которые порождаются не одной функцией, а некоторым классом функций. Это расширяет класс управлений, решающих задачу синтеза инерционных управлений.

2. Решение задачи синтеза инерционных управлений

Рассмотрим задачу допустимого синтеза инерционных управлений для системы

$$\dot{x} = a(x) + b(x)u, \quad x \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}^n, \ u \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

где область $\mathbb{Q}$ — окрестность начала координат, функции $a(x), b(x) \in C^1(\mathbb{Q})$, удовлетворяют условиям (B1)–(B3) и $a(0) = 0$.

Следуя работе [15], пусть $\varphi^0(x) \in C^2(\mathbb{Q})$ ($\varphi^0(0) = 0$) – скалярная функция, являющаяся нетривиальным решением системы (1.2) дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, удовлетворяющая условию (1.3). Пусть $c(\tau) \in C^1(\varphi^0(\mathbb{Q}))$ – скалярная функция, не обращающаяся в нуль на образе $\varphi^0(\mathbb{Q})$, такая, что $\varphi^0_x(x)\mathrm{ad}_a^{n-1}b(x) = c(\varphi^0(x))$ для $x \in \mathbb{Q}$. Определим функцию $\Phi(\tau) = \int d\tau/c(\tau)$ при $\tau \in \varphi^0(\mathbb{Q})$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \Phi(\varphi^0(x)) \in C^2(\mathbb{Q})$ и замену переменных $z = N(x) \in C^2(\mathbb{Q})$ вида $N_1(x) = \varphi(x)$, $N_2(x) = L_a\varphi(x)$, $\ldots$, $N_n(x) = L_a^{n-1}\varphi(x)$, где $L_a^k\varphi(x)$ – производная Ли k-го порядка по направлению векторного поля $a(x)$ функции $\varphi(x)$. Тогда система (2.1) отображается [15] на линейную систему вида

$$\dot{z} = A_0 z + b_0(p\,z + u), \tag{2.2}$$

где A_0 – $(n\times n)$-матрица, у которой элементы первой наддиагонали равны единице, а все остальные элементы равны нулю, b_0 – n-й орт пространства $\mathbb{R}^n$, p – n-мерная вектор-строка, компонентами которой являются коэффициенты характеристического полинома матрицы $A_0 + b_0 p$.

Пусть $f(s)$ – произвольная неотрицательная монотонно невозрастающая на полуоси $[0, +\infty)$ функция, имеющая не менее, чем n точек убывания, удовлетворяющая условию $\int\limits_0^\infty s^{2n-1} f(s)ds < \infty$.

Для каждой такой функции $f(s)$ рассмотрим семейство $\left\{F_{f,\alpha}^{-1}(\Theta)\right\}_{1\le\alpha<\infty}$ положительно определенных матриц $F_{f,\alpha}^{-1}(\Theta) = \int\limits_0^\infty f\left(t/\Theta^{1/\alpha}\right) e^{-A_0 t} b_0 b_0^* e^{-A_0^* t} dt$. Поскольку

$$\Theta^{1/\alpha} e^{-A_0 s \Theta^{1/\alpha}} b_0 b_0^* e^{-A_0^* s \Theta^{1/\alpha}} = D_\alpha^{-1}(\Theta) e^{-A_0 s} b_0 b_0^* e^{-A_0^* s} D_\alpha^{-1}(\Theta), \tag{2.3}$$

где $D_\alpha(\Theta) = \mathrm{diag}\left(\Theta^{-\frac{2n-2k+1}{2\alpha}}\right)_{k=1}^n$, то для $F_{f,\alpha}^{-1}(\Theta)$ получаем представление

$$F_{f,\alpha}^{-1}(\Theta) = D_\alpha^{-1}(\Theta) F_f^{-1} D_\alpha^{-1}(\Theta), \tag{2.4}$$

где матрица $F_f^{-1} = \int\limits_0^\infty f(s) e^{-A_0 s} b_0 b_0^* e^{-A_0^* s} ds$. Следовательно, матрица $F_{f,\alpha}(\Theta)$ представима в виде

$$F_{f,\alpha}(\Theta) = D_\alpha(\Theta) F_f D_\alpha(\Theta). \tag{2.5}$$

2.1. Определение функции управляемости

Пусть $a_0 > 0$ – пока произвольное число, которое будет определено далее. Рассмотрим функцию

$$\Phi_\alpha(\Theta, x) = 2a_0\Theta - (F_{f,\alpha}(\Theta)N(x), N(x)), \quad x \in \mathbb{Q}, \quad \alpha \geq 1. \tag{2.6}$$

Выберем число $\overline{\Theta} > 0$, положим $R_\alpha = \delta\left(2a_0\overline{\Theta}/\|F_{f,\alpha}(\overline{\Theta})\|\right)^{1/2}$, где число $\delta \in (0,1)$ таково, что $\{z = N(x) : \|z\| \leq R_\alpha\} \subset N(\mathbb{Q})$, и рассмотрим множество $\mathrm{Q}_\alpha^1 = \{x \in \mathbb{Q} : \ \|N(x)\| \leq R_\alpha\}$. Тогда неравенство $\Phi_\alpha(\overline{\Theta}, x) > 0$ выполняется для всех $x \in \mathrm{Q}_\alpha^1$. Для фиксированного $\alpha \geq 1$ определим функцию управляемости $\Theta_\alpha(x)$ из уравнения

$$\Phi_\alpha(\Theta, x) = 0, \quad x \in \mathrm{Q}_\alpha^1 \setminus \{0\}. \tag{2.7}$$

Лемма 1. *Для каждого конечного числа $\alpha \geq 1$ уравнение (2.7) определяет единственную положительную непрерывно дифференцируемую в $\mathrm{Q}_\alpha^1 \setminus \{0\}$ функцию $\Theta = \Theta_\alpha(x)$ и вместе с равенством $\Theta_\alpha(0) = 0$ непрерывную в области Q_α^1. Для числа c_α, удовлетворяющего условию*

$$0 < c_\alpha \leq \sigma\delta^2\overline{\Theta}/\left(\|F_{f,\alpha}(\overline{\Theta})\|\|F_{f,\alpha}^{-1}(\overline{\Theta})\|\right), \quad \sigma \in (0,1), \tag{2.8}$$

множество $\mathrm{Q}_\alpha = \{x : \ \Theta_\alpha(x) \leq c_\alpha\}$ является ограниченным и $\mathrm{Q}_\alpha \subset \mathrm{int}\ \mathrm{Q}_\alpha^1$.

Доказательство. Из (2.6) в силу неравенства

$$(F_{f,\alpha}(\Theta)N(x), N(x)) \geq \|N(x)\|^2/\|F_{f,\alpha}^{-1}(\Theta)\|, \quad x \in \mathrm{Q}_\alpha^1 \setminus \{0\}, \tag{2.9}$$

и представления (2.4) имеем $\lim\limits_{\Theta\to+0} \Phi_\alpha(\Theta, x) = -\infty$, $x \in \mathrm{Q}_\alpha^1 \setminus \{0\}$. Тогда так как $\Phi_\alpha(\Theta, x)$ является возрастающей по Θ функцией для всех $x \in \mathrm{Q}_\alpha^1 \setminus \{0\}$, причем $\Phi_\alpha(\overline{\Theta}, x) > 0$, то уравнение (2.7) имеет единственное положительное решение $\Theta_\alpha(x)$, $x \in \mathrm{Q}_\alpha^1 \setminus \{0\}$. Поскольку $\Phi_\alpha(\Theta, x)$ непрерывно дифференцируемая функция по Θ и по x и $\partial\Phi_\alpha(\Theta, x)/\partial\Theta \neq 0$, то по теореме о неявной функции $\Theta_\alpha(x)$ является непрерывно дифференцируемой в области $\mathrm{Q}_\alpha^1 \setminus \{0\}$ функцией. Непрерывность $\Theta_\alpha(x)$ в нуле вытекает из неравенства $\Theta_\alpha(x) \leq (N_{\max}^2\|F_f\|\|x\|^2/(2a_0))^{\alpha/(\alpha+2n-1)}$, где $N_{\max} = \max\limits_{x\in\mathrm{Q}_\alpha^1}\|N_x(x)\|$.

В силу неравенства (2.9) и того, что $(F_{f,\alpha}(\Theta)N(x), N(x))$ является убывающей по Θ функцией, имеем $\mathrm{Q}_\alpha^1 \supset \left\{x \in \mathbb{Q} : \ \Theta_\alpha(x) \leq R_\alpha^2/(2a_0\|F_{f,\alpha}^{-1}(\overline{\Theta})\|)\right\}$. Отсюда для c_α из (2.8) следует справедливость включения $\mathrm{Q}_\alpha \subset \mathrm{int}\mathrm{Q}_\alpha^1$. □

Зададим управление $u_{f,\alpha}(x)$ в области $\mathrm{Q}_\alpha^1 \setminus \{0\}$ формулой

$$u_{f,\alpha}(x) = -\frac{1}{2}f(0)b_0^*F_{f,\alpha}(\Theta_\alpha(x))N(x) - p\,N(x). \tag{2.10}$$

Ограниченность этого управления и его производных будет показана далее.

Лемма 2. *Производная функции $\Theta_\alpha(x)$ $(1 \le \alpha < \infty)$ в силу системы*

$$\dot{x} = a(x) + b(x)u_{f,\alpha}(x) \tag{2.11}$$

в области $\mathrm{Q}^1_\alpha \setminus \{0\}$ удовлетворяет неравенствам

$$-\lambda^\alpha_{\max}\Theta_\alpha^{1-1/\alpha}(x) \le \dot{\Theta}_\alpha(x) \le -\lambda^\alpha_{\min}\Theta_\alpha^{1-1/\alpha}(x), \qquad \lambda^\alpha_{\max} > \lambda^\alpha_{\min} > 0, \tag{2.12}$$

причем время движения $T_\alpha(x_0)$ из произвольной точки $x_0 \in \mathrm{Q}_\alpha \setminus \{0\}$ в начало координат удовлетворяет оценкам

$$\frac{\alpha}{\lambda^\alpha_{\max}}\,\Theta_\alpha^{1/\alpha}(x_0) \le T_\alpha(x_0) \le \frac{\alpha}{\lambda^\alpha_{\min}}\,\Theta_\alpha^{1/\alpha}(x_0). \tag{2.13}$$

Доказательство. Обозначим $y = D_\alpha(\Theta_\alpha(x))N(x)$, $P_0 = -\frac{1}{2}f(0)b_0^*F_f$. На основании (2.5) равенство (2.7) при $\Theta = \Theta_\alpha(x)$ и управление (2.10) принимают вид

$$2a_0\Theta_\alpha(x) - (F_f\, y, y) = 0, \tag{2.14}$$

$$u_{f,\alpha}(x) = \Theta_\alpha^{-1/(2\alpha)}(x)P_0y - p\,N(x). \tag{2.15}$$

Вычислим производную y в силу системы (2.11) с $u_{f,\alpha}(x)$ вида (2.15). Поскольку в силу равенства (2.2) имеем

$$\dot{N}(x) = A_0N(x) + \Theta_\alpha^{-1/(2\alpha)}(x)b_0P_0y, \tag{2.16}$$

то на основании равенства $D_\alpha(\Theta)\left(A_0D_\alpha^{-1}(\Theta) + b_0P_0\Theta^{-1/(2\alpha)}\right) = A_1\Theta^{-1/\alpha}$, где $A_1 = (A_0 + b_0P_0)$, получаем

$$\dot{y} = \left(\dot{\Theta}_\alpha(x)\Theta_\alpha^{-1}(x)H^\alpha + A_1\Theta_\alpha^{-1/\alpha}(x)\right)y, \tag{2.17}$$

где $H^\alpha = \mathrm{diag}\left(-\frac{2n-2k+1}{2\alpha}\right)_{k=1}^n$. Из равенства (2.14) в силу равенства (2.17) имеем

$$\dot{\Theta}_\alpha(x) = -\frac{(W_fy, y)}{(F_f^\alpha y, y)}\,\Theta_\alpha^{1-1/\alpha}(x), \tag{2.18}$$

где $W_f = -(F_fA_1 + A_1^*F_f)$, $F_f^\alpha = F_f - H^\alpha F_f - F_fH^\alpha$.

Покажем, что W_f является положительно определенной матрицей. Действительно, поскольку в силу выбора функции $f(s)$ имеем

$$A_0F_f^{-1} + F_f^{-1}A_0^* = -\int\limits_0^\infty f(s)d\left(e^{-A_0s}b_0b_0^*e^{-A_0^*s}\right) = f(0)b_0b_0^* - \widehat{F}_f,$$

где $\widehat{F}_f = \displaystyle\int_0^\infty e^{-A_0s}b_0b_0^*e^{-A_0^*s}d(-f(s))$ – положительно определенная матрица [1, 9], то получаем равенство $F_fA_0 + A_0^*F_f = f(0)F_fb_0b_0^*F_f - F_f\widehat{F}_fF_f$. Отсюда следует, что матрица $W_f = F_f\widehat{F}_fF_f$ и является положительно определенной.

Покажем, что F_f^α является положительно определенной матрицей. Так как, с одной стороны, $\frac{\partial}{\partial\Theta}F_{f,\alpha}^{-1}(\Theta) = \frac{1}{\Theta}\int\limits_0^\infty \frac{s}{\alpha}\,\Theta^{1/\alpha}e^{-A_0 s\Theta^{1/\alpha}}b_0 b_0^* e^{-A_0^* s\Theta^{1/\alpha}}d\left(-f(s)\right)$, то отсюда в силу равенства (2.3) получаем

$$\frac{\partial}{\partial\Theta}F_{f,\alpha}^{-1}(\Theta) = \frac{1}{\Theta}D_\alpha^{-1}(\Theta)\widetilde{F}_{f,\alpha}D_\alpha^{-1}(\Theta), \tag{2.19}$$

где $\widetilde{F}_{f,\alpha} = \int\limits_0^\infty \frac{s}{\alpha}\,e^{-A_0 s}b_0 b_0^* e^{-A_0^* s}d\left(-f(s)\right)$ – положительно определенная матрица [1, 9]. С другой стороны, из равенства (2.4) имеем

$$\frac{\partial}{\partial\Theta}F_{f,\alpha}^{-1}(\Theta) = \frac{1}{\Theta}D_\alpha^{-1}(\Theta)\left(-H^\alpha F_f^{-1} - F_f^{-1}H^\alpha\right)D_\alpha^{-1}(\Theta). \tag{2.20}$$

Из (2.19), (2.20) получаем равенство $-F_f H^\alpha - H^\alpha F_f = F_f\widetilde{F}_{f,\alpha}F_f$, а поэтому F_f^α – положительно определенная матрица.

Тогда из (2.18) получаем неравенства (2.12), где $\lambda_{\min}^\alpha$, $\lambda_{\max}^\alpha$ – наименьшее и наибольшее собственные значения матрицы $(F_f^\alpha)^{-1}W_f$. По теореме 1.3 [6, стр. 21] из неравенств (2.12) получаем оценки на время движения вида (2.13). □

2.2. Вычисление производных управления

Вычислим производную k-го порядка управления $u_{f,\alpha}(x)$ вида (2.15) в силу системы (2.11). Обозначим $P_i(\alpha, y) = \left(\frac{2i-1}{2\alpha}E - H^\alpha\right)\beta_\alpha(y) + A_1$, $i = 1, \ldots$, где $\beta_\alpha(y) = (W_f y, y)/(F_f^\alpha y, y)$. Тогда равенство (2.18) принимает вид $\dot{\Theta}_\alpha(x) = -\beta_\alpha(y)\Theta_\alpha^{1-1/\alpha}(x)$, в силу которого из (2.17) получаем равенство $\dot{y} = \Big(A_1 - H^\alpha\beta_\alpha(y)\Big)\Theta_\alpha^{-1/\alpha}(x)y$. На основании последнего равенства производная p-го порядка в силу системы (2.11) квадратичной формы (Vy, y) имеет вид

$$(Vy,y)^{(p)} = \sum_{s=0}^{p-1} C_{p-1}^s\Big((V_a y, y)^{(p-1-s)} + \sum_{l=0}^{p-1-s} C_{p-1-s}^l (V_h y, y)^{(p-1-s-l)}\beta_\alpha^{(l)}(y)\Big)\times$$

$$\times\Theta_\alpha^{-1/\alpha}\Big(\sum_{m=1}^{s}\frac{m!}{\alpha^m}\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_m=s-m}\zeta_{\alpha_1\ldots\alpha_m}^{(s)}\beta_\alpha^{(\alpha_1)}\ldots\beta_\alpha^{(\alpha_m)}\Theta_\alpha^{-m/\alpha}\Big), \tag{2.21}$$

где $V_a = VA_1 + A_1^* V$, $V_h = -(VH^\alpha + H^\alpha V)$, $\zeta_{\alpha_1\ldots\alpha_m}^{(s)}$ – положительные числа, определяемые рекуррентными соотношениями

$$\zeta_0^{(1)} = 1, \quad \zeta_{\alpha_1\ldots\alpha_m}^{(s)} = \zeta'^{(s)}_{\alpha_1\ldots\alpha_m}, \quad \zeta_{\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}0}^{(s)} = \zeta_{\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}}^{(s-1)} + \zeta'^{(s)}_{\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}0},$$

$$\zeta'^{(s)}_{\alpha_1\ldots\alpha_m} = \zeta_{\alpha_1-1\alpha_2\ldots\alpha_m}^{(s-1)} + \ldots + \zeta_{\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}\alpha_m-1}^{(s-1)}, \ \alpha_1+\ldots+\alpha_i = s-m, \ m=1,\ldots,s, \ s=2,\ldots.$$

Здесь и далее слагаемое с отрицательным индексом равно нулю, C_k^i – биномиальные числа. Поскольку

$$\Big(\frac{1}{(F_f^\alpha y,y)}\Big)^{(i)}=\frac{1}{(F_f^\alpha y,y)}\sum_{j=1}^{i}(-1)^j\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_j=i-j}\gamma^{(i)}_{\alpha_1\ldots\alpha_j}\prod_{l=1}^{j}\frac{(F_f^\alpha y,y)^{(\alpha_l+1)}}{(F_f^\alpha y,y)},$$

где $\gamma^{(i)}_{\alpha_1\ldots\alpha_j}$ – положительные числа, определяемые рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned}&\gamma_0^{(1)}=1,\quad \gamma^{(i)}_{\alpha_1\ldots\alpha_j}={\gamma'}^{(i)}_{\alpha_1\ldots\alpha_j}, &&\alpha_1+\ldots+\alpha_j=i-j,\ j=1,\ldots,i,\ i=2,\ldots,\\ &\gamma^{(i)}_{\alpha_1\ldots\alpha_{j-1}0}=j\ \gamma^{(i-1)}_{\alpha_1\ldots\alpha_{j-1}}+{\gamma'}^{(i)}_{\alpha_1\ldots\alpha_{j-1}0}, &&{\gamma'}^{(i)}_{\alpha_1\ldots\alpha_j}=\gamma^{(i-1)}_{\alpha_1-1\alpha_2\ldots\alpha_j}+\ldots+\gamma^{(i-1)}_{\alpha_1\ldots\alpha_{j-1}\alpha_j-1},\end{aligned}$$

то для $k=1,2,\ldots$ имеем

$$\beta_\alpha^{(k)}(y)=\sum_{i=0}^{k}C_k^i\frac{(W_f y,y)^{(k-i)}}{(F_f^\alpha y,y)}\sum_{j=1}^{i}(-1)^j\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_j=i-j}\gamma^{(i)}_{\alpha_1\ldots\alpha_j}\prod_{l=1}^{j}\frac{(F_f^\alpha y,y)^{(\alpha_l+1)}}{(F_f^\alpha y,y)},\tag{2.22}$$

где производные квадратичных форм $(W_f y,y)$, $(F_f^\alpha y,y)$ вычисляются по формуле (2.21). Методом индукции устанавливается справедливость соотношений:

— на основании равенства $\Big(\Theta_\alpha^{-\frac{2i+1}{2\alpha}}y\Big)^{(1)}=P_{i+1}\Theta_\alpha^{-\frac{2i+3}{2\alpha}}y$ справедливость формулы

$$\big(\Theta_\alpha^{-\frac{1}{2\alpha}}y\big)^{(k)}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_i=k-i}\zeta^{(k)}_{\alpha_1\ldots\alpha_i}P_1^{(\alpha_1)}\ldots P_i^{(\alpha_i)}\Theta_\alpha^{-\frac{2i+1}{2\alpha}}y,\quad k=1,2,\ldots\tag{2.23}$$

где $P_i^{(\alpha_i)}(\alpha,y)=\big(\frac{2i-1}{2\alpha}E-H^\alpha\big)\,\beta_\alpha^{(\alpha_i)}(y)$, $i=1,\ldots,k$;

— на основании равенств (2.16), $A_0^n=0$ справедливость формулы

$$N^{(k)}(x)=\delta_k A_0^k N(x)+\sum_{j=0}^{m_k-1}A_0^{m_k-1-j}b_0P_0\big(\Theta_\alpha^{-\frac{1}{2\alpha}}y\big)^{(j+(1-\delta_k)(k-n))},\ k=1,\ldots\tag{2.24}$$

где $\delta_k=1$ для $k<n$, $\delta_k=0$ для $k\geq n$, $m_k=\min\{k,n\}$.

Таким образом, производная k-го порядка $u^{(k)}_{f,\alpha}(x)$ $(k=1,2,\ldots)$ управления $u_{f,\alpha}(x)$ задается формулой

$$u^{(k)}_{f,\alpha}(x)=P_0\big(\Theta_\alpha^{-\frac{1}{2\alpha}}y\big)^{(k)}-p\,N^{(k)}(x),\tag{2.25}$$

где $\big(\Theta_\alpha^{-\frac{1}{2\alpha}}y\big)^{(k)}$, $N^{(k)}(x)$ из (2.23), (2.24) соответственно.

2.3. Ограниченность управления и его производных

Покажем, что число a_0 может выбрано таким, что управление и его производные будут удовлетворять заданным ограничениям.

Лемма 3. *Для каждого конечного числа $\alpha \geq 2l+1$ число a_0 может выбрано таким, что управление $u_{f,\alpha}(x)$ и его производные $u^{(1)}_{f,\alpha}(x), \ldots, u^{(l)}_{f,\alpha}(x)$ в силу системы (2.11) удовлетворяют ограничениям*

$$|u^{(k)}_{f,\alpha}(x)| \leq d_k, \quad x \in \mathrm{Q}_\alpha \setminus \{0\},\ k = 0, 1, \ldots, l. \tag{2.26}$$

Доказательство. Вначале методом индукции установим, что

$$|\beta^{(k)}_\alpha(y(\Theta_\alpha(x), x)| \leq \overline{\beta}_k(\alpha)\Theta_\alpha^{-k/\alpha}(x), \quad k = 1, \ldots,\ x \in \mathrm{Q}_\alpha. \tag{2.27}$$

Из (2.22) при $k{=}1$ имеем $\dot\beta_\alpha(y){=}\left((W_f y, y)^{(1)}{-}\beta_\alpha(y)(F^\alpha_f y, y)^{(1)}\right)/(F^\alpha_f y, y)$. Отсюда в силу равенства (2.21) при $p = 1$ и неравенства $\beta_\alpha(y) \leq \lambda^\alpha_{\max}$ получаем, что $|\dot\beta_\alpha(y)| \leq \overline{\beta}_1(\alpha)\Theta_\alpha^{-\frac{1}{\alpha}}$, где $\overline{\beta}_1(\alpha) = \omega^\alpha_1 + \lambda^\alpha_{\max}\phi^\alpha_1$, здесь $\omega^\alpha_1 = \max\left\{|\lambda^{W_a}_{\min}|, |\lambda^{W_a}_{\max}|\right\} + \lambda^\alpha_{\max}\max\left\{|\lambda^{W_h}_{\min}|, |\lambda^{W_h}_{\max}|\right\}$, $\phi^\alpha_1 = \max\left\{|\lambda^{F^\alpha_a}_{\min}|, |\lambda^{F^\alpha_a}_{\max}|\right\} + \lambda^\alpha_{\max}\max\left\{|\lambda^{F^\alpha_h}_{\min}|, |\lambda^{F^\alpha_h}_{\max}|\right\}$, где $\lambda^{W_a}_{\min}$, $\lambda^{W_a}_{\max}$, $\lambda^{W_h}_{\min}$, $\lambda^{W_h}_{\max}$, $\lambda^{F^\alpha_a}_{\min}$, $\lambda^{F^\alpha_a}_{\max}$, $\lambda^{F^\alpha_h}_{\min}$, $\lambda^{F^\alpha_h}_{\max}$ – наименьшие и наибольшие собственные значения матриц $(F^\alpha_f)^{-1}(W_f)_a$, $(F^\alpha_f)^{-1}(W_f)_h$, $(F^\alpha_f)^{-1}(F^\alpha_f)_a$, $(F^\alpha_f)^{-1}(F^\alpha_f)_h$ соответственно.

Предположим, что для любого y справедливы неравенства

$$|\beta^{(\nu)}_\alpha(y)| \leq \overline{\beta}_\nu(\alpha)\Theta_\alpha^{-\frac{\nu}{\alpha}}, \quad \nu = 0, \ldots, k-1. \tag{2.28}$$

Это означает, что выполнены неравенства

$$\left|\frac{(Vy, y)^{(\nu)}}{(F^\alpha_f y, y)}\right| \leq v_\nu(\alpha)\Theta_\alpha^{-\frac{\nu}{\alpha}}, \quad \nu = 0, \ldots, k-1, \tag{2.29}$$

при $V = W_f$, $V = F^\alpha_f$, $V = W_a$ и $V = W_h$, $V = (F^\alpha_f)_a \equiv F^\alpha_f A_1 + A^*_1 F^\alpha_f$, $V = (F^\alpha_f)_h \equiv -(F^\alpha_f H^\alpha + H^\alpha F^\alpha_f)$ с v_ν равным, соответственно, ω_ν, ϕ_ν, ω^a_ν, ω^h_ν, ϕ^a_ν, ϕ^h_ν. Поэтому на основании равенства (2.21) имеем

$$\left|\frac{(W_f y, y)^{(k)}}{(F^\alpha_f y, y)}\right| \leq \omega_k\Theta_\alpha^{-\frac{k}{\alpha}}, \qquad \left|\frac{(F^\alpha_f y, y)^{(k)}}{(F^\alpha_f y, y)}\right| \leq \phi_k\Theta_\alpha^{-\frac{k}{\alpha}}, \tag{2.30}$$

где

$$\omega_k = \sum_{s=0}^{k-1} C^s_{k-1}\Big(\omega^a_{k-1-s} + \sum_{l=0}^{k-1-s} C^l_{k-1-s}\omega^h_{k-1-s-l}\overline{\beta}_l\Big)\sum_{m=1}^{s}\frac{m!}{\alpha^m}\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_m=s-m}\zeta^{(s)}_{\alpha_1\ldots\alpha_m}\overline{\beta}_{\alpha_1}\ldots\overline{\beta}_{\alpha_m},$$

$$\phi_k = \sum_{s=0}^{k-1} C^s_{k-1}\Big(\phi^a_{k-1-s} + \sum_{l=0}^{k-1-s} C^l_{k-1-s}\phi^h_{k-1-s-l}\overline{\beta}_l\Big)\sum_{m=1}^{s}\frac{m!}{\alpha^m}\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_m=s-m}\zeta^{(s)}_{\alpha_1\ldots\alpha_m}\overline{\beta}_{\alpha_1}\ldots\overline{\beta}_{\alpha_m}.$$

Тогда из (2.22) в силу неравенств (2.28)–(2.30) следует неравенство (2.27), где

$$\overline{\beta}_k = \sum_{i=0}^{k} C^i_k\omega_{k-i}\sum_{j=1}^{i}\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_j=i-j}\gamma^{(i)}_{\alpha_1\ldots\alpha_j}\phi_{\alpha_1+1}\cdot\ldots\cdot\phi_{\alpha_j+1}.$$

Поскольку в силу (2.27) имеем

$$\|P_i^{(k)}(\alpha,y)\| \le \left(\frac{n+i-1}{\alpha}\,\overline{\beta}_k(\alpha)+\delta_{0k}\,\|A_1\|\right)\Theta_\alpha^{-k/\alpha}, \quad i=1,\dots,\ k=0,1,\dots,$$

где δ_{0k} – символ Кронекера, то $\|\sum\limits_{\alpha_1+\ldots+\alpha_i=k-i}\zeta_{\alpha_1\ldots\alpha_i}P_1^{(\alpha_1)}\ldots P_i^{(\alpha_i)}\| \le \sigma_{k,i}(\alpha)\Theta_\alpha^{-(k-i)/\alpha}$, где $\sigma_{k,i}(\alpha)=\sum\limits_{\alpha_1+\ldots+\alpha_i=k-i}\zeta_{\alpha_1\ldots\alpha_i}\prod\limits_{j=1}^{i}\left(\frac{n+j-1}{\alpha}\,\overline{\beta}_{\alpha_j}(\alpha)+\delta_{0\alpha_j}\|A_1\|\right)$. Поэтому из (2.23) получаем

$$\|\big(\Theta_\alpha^{-1/\alpha}(x)y\big)^{(k)}\| \le \sigma_k(\alpha)\Theta_\alpha^{-\frac{2k+1}{2\alpha}}(x)\|y\|, \quad k=0,1\dots, \tag{2.31}$$

где $\sigma_0=1$, $\sigma_k(\alpha)=\sum\limits_{i=1}^{k}\sigma_{k,i}(\alpha)$. Учитывая неравенство (2.31), из (2.24) получаем

$$\begin{aligned}\|N^{(k)}(x)\| \le \Big(\delta_k\|A_0^kD_\alpha^{-1}(\Theta_\alpha(x))\|\Theta_\alpha^{\frac{2k+1}{2\alpha}}(x)+\sum_{j=0}^{m_k-1}\|A_0^{m_k-1-j}b_0P_0\|\\ \times\,\sigma_{j+(1-\delta_k)(k-n)}\Theta_\alpha^{(k-j-(1-\delta_k)(k-n))/\alpha}(x)\Big)\Theta_\alpha^{-\frac{2k+1}{2\alpha}}(x)\|y\|.\end{aligned} \tag{2.32}$$

Поскольку $\|A_0^kD_\alpha^{-1}(\Theta)\|\Theta^{\frac{2k+1}{2\alpha}}=\Theta^{\frac{\gamma}{\alpha}}$, где $\gamma=n+1$ при $\Theta>1$, $\gamma=1$ при $\Theta\le 1$, и $k-j-(1-\delta_k)(k-n)\ge 1$, то из неравенства (2.32) имеем

$$\|N^{(k)}(x)\| \le \ell_k(\alpha)\Theta_\alpha^{-\frac{2k+1}{2\alpha}}(x)\|y\|, \quad x\in \mathrm{Q}_\alpha\setminus\{0\}, \tag{2.33}$$

где $\ell_k(\alpha)=\delta_k c_\alpha^{\frac{\gamma}{\alpha}}+\sum\limits_{j=0}^{m_k-1}\|A_0^{m_k-1-j}b_0P_0\|\sigma_{j+(1-\delta_k)(k-n)}(\alpha)c_\alpha^{\frac{k-j-(1-\delta_k)(k-n)}{\alpha}}$. Из равенства (2.25) в силу неравенств (2.31), (2.33) вытекает, что

$$|u_{f,\alpha}^{(k)}(x)| \le \eta_k(\alpha)\Theta_\alpha^{-\frac{2k+1}{2\alpha}}(x)\|y\|, \quad x\in \mathrm{Q}_\alpha\setminus\{0\},\ k=0,1,\dots, \tag{2.34}$$

где $\eta_k(\alpha)=\|P_0\|\sigma_k(\alpha)+\|p\|\ell_k(\alpha)$. Из равенства (2.14) вытекает неравенство $\|y\|^2\le 2a_0\Theta_\alpha(x)\|F_f^{-1}\|$, в силу которого из (2.34) для $\alpha\ge(2l+1)$ в области $\mathrm{Q}_\alpha\setminus\{0\}$ получаем неравенство

$$|u_{f,\alpha}^{(k)}(x)| \le \eta_k(\alpha)\sqrt{2a_0\|F_f^{-1}\|}\;c_\alpha^{\frac{1}{2}-\frac{2k+1}{2\alpha}}, \quad k=0,1,\dots,l. \tag{2.35}$$

Выберем число a_0 из условия

$$0<a_0\le\frac{1}{2\|F_f^{-1}\|}\min_{0\le k\le l}\frac{d_k^2}{\eta_k^2(\alpha)\,c_\alpha^{1-\frac{2k+1}{\alpha}}}. \tag{2.36}$$

Тогда из (2.35) получаем неравенства (2.26). □

Таким образом, имеем теорему, дающую решение задачи синтеза инерционных управлений для системы (2.1).

Теорема 1. *Рассмотрим систему (2.1), где область* $\mathbb{Q}$ *— окрестность начала координат, функции* $a(x), b(x) \in C^1(\mathbb{Q})$, *удовлетворяют условиям (B1)–(B3) и* $a(0) = 0$. *Пусть* $f(s)$ *— произвольная неотрицательная монотонно невозрастающая на полуоси* $[0, +\infty)$ *функция, имеющая не менее, чем* n *точек убывания, такая, что* $\int\limits_0^\infty s^{2n-1} f(s) ds < \infty$, *конечное число* $\alpha \geq 2l+1$, a_0 *удовлетворяет условию (2.36), функция управляемости* $\Theta_\alpha(x)$ *при* $x \neq 0$ *является положительным решением уравнения (2.7),* $\Theta_\alpha(0) = 0$, *область* $\mathrm{Q} = \{x : \Theta_\alpha(x) \leq c_\alpha\}$, *где* c_α *из (2.8).*

Тогда управление $u_{f,\alpha}(x)$ *вида (2.10) для системы (2.1) решает задачу синтеза инерционных управлений в области* $\mathrm{Q}_\alpha \setminus \{0\}$, *причем время движения* $T_\alpha(x_0)$ *из произвольной точки* $x_0 \in \mathrm{Q}_\alpha$ *в начало координат по траектории системы (2.1) с управлением* $u_{f,\alpha}(x)$ *удовлетворяет оценкам (2.13).*

Доказательство. Было установлено, что для каждого конечного числа $\alpha \geq 1$ уравнение (2.7) определяет единственную положительную функцию $\Theta_\alpha(x)$, непрерывно дифференцируемую в $\mathrm{Q}_\alpha^1 \setminus \{0\}$, которая при $\Theta_\alpha(0) = 0$ является непрерывной в Q_α^1, и показано, что для постоянной c_α из (2.8) область Q_α является ограниченной и $\mathrm{Q}_\alpha \subset \operatorname{int} \mathrm{Q}_\alpha^1$ (лемма 1); управление (2.10) является липшицевым в каждом множестве $K(\rho_1, \rho_2) = \{x : 0 < \rho_1 \leq \|N(x)\| \leq \rho_2 \leq R_\alpha\}$ с постоянной Липшица $L_u(\rho_1, \rho_2) \to +\infty$ при $\rho_1 \to 0$; показано, что производная функции $\Theta_\alpha(x)$ в силу системы (2.1) с этим управлением удовлетворяет неравенствам (2.12), получены точные оценки (2.13) на время движения $T_\alpha(x_0)$ из произвольной точки x_0 области $\mathrm{Q}_\alpha \setminus \{0\}$ в начало координат (лемма 2); наконец, установлено, что для каждого $\alpha \geq 2l + 1$ и числа a_0, выбранного из условия (2.36), управление и его производные в силу системы (2.1) удовлетворяют ограничениям (2.26) (лемма 3).

Тогда по теореме 1 из [4, 5] следует утверждение данной теоремы. □

Следствие 1. *Пусть в условиях теоремы 1 функция* $f(s)$ *имеет вид*

$$f(s) = f_\alpha(s) = \begin{cases} (1 - s/\alpha)^\alpha & \text{при } 0 \leq s < \alpha, \\ 0 & \text{при } s \geq \alpha. \end{cases} \tag{2.37}$$

Тогда управление (2.10) *для системы* (2.1) *решает задачу синтеза инерционных управлений в области* $\mathrm{Q}_\alpha \setminus \{0\}$ *и время движения* $T_\alpha(x_0)$ *из произвольной точки* $x_0 \in \mathrm{Q}_\alpha$ *в начало координат равно* $\alpha \Theta_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}(x_0)$.

Доказательство. Действительно, при таком выборе функции $f(s)$ из равенства (2.18) получаем, что производная функции управляемости $\Theta_\alpha(x)$ удовлетворяет равенству $\dot{\Theta}_\alpha(x) = -\Theta_\alpha^{1-\frac{1}{\alpha}}(x)$, откуда следует утверждение данного следствия. □

Пример 1. Рассмотрим задачу синтеза инерционных управлений для системы

$$\dot{x}_1 = x_3(3 + x_3^2) + u, \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_3 + \frac{x_3^3}{3}, \quad \dot{x}_3 = \frac{-9x_2 + 2x_3(3 + x_3^2) - 2u}{2(1 + x_3^2)}, \tag{2.38}$$

с ограничениями на управление вида (1.4) при $l = 2$, где $d_0 = 40$, $d_1 = 75$, $d_2 = 135$, т.е. $|u| \le 40$, $|\dot u| \le 75$, $|\ddot u| \le 135$. Здесь

$$a(x) = \begin{pmatrix} x_3(3 + x_3^2) \\ x_1 + x_3 + x_3^3/3 \\ \dfrac{-9x_2 + 2x_3(3 + x_3^2)}{2(1 + x_3^2)} \end{pmatrix}, \qquad b(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\dfrac{1}{1 + x_3^2} \end{pmatrix}.$$

Для этой системы в области $\mathbb{Q} = \mathbb{R}^3$ существуют $\left\{\mathrm{ad}_a^k b(x)\right\}_{k=0}^3$, где $\mathrm{ad}_a^0 b(x) = b(x)$, $\mathrm{ad}_a^k b(x) = a_x(x)\mathrm{ad}_a^{k-1} b(x) - (\mathrm{ad}_a^{k-1} b(x))_x a(x)$, $k = 1, 2, 3$, которые имеют вид

$$\mathrm{ad}_a b(x) = -\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ \frac{3}{1+x_3^2} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{ad}_a^2 b(x) = -\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ \frac{9}{1+x_3^2} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{ad}_a^3 b(x) = -\begin{pmatrix} 27 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$\mathrm{rang}(b(x)\ \mathrm{ad}_a b(x)\ \mathrm{ad}_a^2 b(x)) = 3$, $[\mathrm{ad}_a^k b(x), \mathrm{ad}_a^i b(x)] = 0$ для всех $0 \le i, k \le 3$,

$$\mathrm{ad}_a^3 b(x) = -\frac{27}{2}\, b(x) - \frac{9}{2}\, \mathrm{ad}_a b(x)) + 3\, \mathrm{ad}_a^2 b(x),$$

функция $\varphi^0(x_1, x_2, x_3) = x_2$ удовлетворяет системе (1.2), имеющей вид

$$\frac{\partial \varphi^0(x)}{\partial x_1} - \frac{1}{1 + x_3^2}\, \frac{\partial \varphi^0(x)}{\partial x_3} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi^0(x)}{\partial x_1} + \frac{1}{1 + x_3^2}\, \frac{\partial \varphi^0(x)}{\partial x_3} = 0,$$

и $\varphi_x^0(x)\mathrm{ad}_a^2 b(x) \ne 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^3$, т.е. выполнены условия (B1)–(B4).

Поскольку функция $c(\tau) = -1/6$, то $\varphi(x) = -x_2/6$ и с помощью замены переменных $z = N(x) = (-x_2/6, -(3x_1 + 3x_3 + x_3^3)/18, 3x_2/4 - x_3(3 + x_3^2)/3)^*$ система (2.38) отображается на систему

$$\dot z_1 = z_2, \quad \dot z_2 = z_3, \quad \dot z_3 = -\frac{27}{2}\, z_1 - \frac{9}{2}\, z_2 + 3z_3 + u.$$

Согласно условиям теоремы 1, выберем функцию $f(s)$ вида (2.37), $\alpha = 5$ и далее индексы указывать не будем. Из неравенства (2.8) при $\overline{\Theta} = 2.5 \cdot 10^9$ и при близких к единице значениях σ и δ получаем $c = 1$. Согласно условию (2.36) положим $a_0 = 1$. Определим функцию управляемости $\Theta(x)$ при $x \ne 0$ как положительный корень уравнения

$$2\Theta^2 - \frac{288}{625}\, x_2^2 - \frac{128}{375}\, \Theta^{1/5} x_2(3x_1 + 3x_3 + x_3^3) - \frac{82}{1125}\, \Theta^{2/5}(3x_1 + 3x_3 + x_3^3)^2 + $$
$$+ \frac{48}{25}\, \Theta^{2/5} x_2 \left(\frac{3}{4}\, x_2 - \frac{1}{3}\, x_3(3 + x_3^2)\right) + \frac{24}{25}\, \Theta^{3/5}(3x_1 + 3x_3 + x_3^3)\left(\frac{3}{4}\, x_2 - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{3}\, x_3(3 + x_3^2)\right) - \frac{24}{5}\, \Theta^{4/5}\left(\frac{3}{4}\, x_2 - \frac{1}{3}\, x_3(3 + x_3^2)\right)^2 = 0 \tag{2.39}$$

и положим $\Theta(0) = 0$.

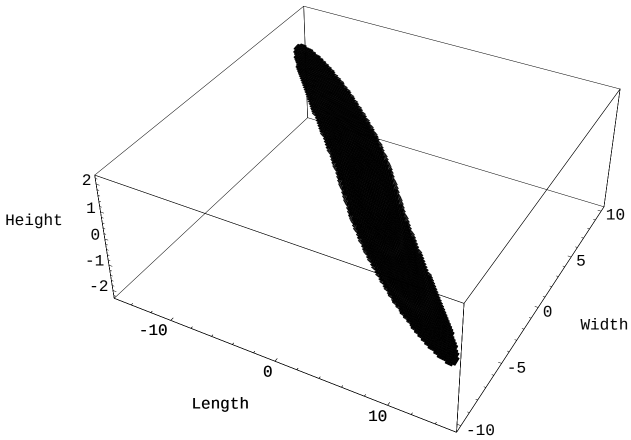

Рис. 1. Область Q.

Рассмотрим область $Q = \{x : \Theta(x) \le 1\}$, которая изображена на рис. 1. Согласно формуле (2.10) управление $u(x)$, которое для системы (2.38) решает задачу синтеза инерционных управлений в области Q, имеет вид

$$u(x) = -\frac{9}{4}\,x_2 + \frac{12x_2}{25\Theta^{3/5}} - \left(\frac{1}{4} - \frac{6}{25\Theta^{2/5}}\right)(3x_1 + 3x_3 + x_3^3) - \\ - \left(3 + \frac{12}{5\Theta^{1/5}}\right)\left(\frac{3x_2}{4} - \frac{1}{3}\,x_3(3 + x_3^2)\right),$$

и вместе с производными

$$\dot u(x) = -\frac{108x_2}{125\Theta^{4/5}} - \frac{36x_2}{25\Theta^{3/5}} - \left(\frac{3}{4} + \frac{8}{25\Theta^{3/5}} + \frac{18}{25\Theta^{2/5}}\right)(3x_1 + 3x_3 + x_3^3) + \\ + \left(\frac{9}{2} + \frac{24}{25\Theta^{2/5}} + \frac{36}{5\Theta^{1/5}}\right)\left(\frac{3x_2}{4} - \frac{1}{3}\,x_3(3 + x_3^2)\right),$$

$$\ddot u(x) = -\frac{144x_2}{625\Theta} + \frac{324x_2}{125\Theta^{4/5}} + \frac{54x_2}{25\Theta^{3/5}} - \left(\frac{156}{625\Theta^{4/5}} - \frac{24}{25\Theta^{3/5}} - \frac{27}{25\Theta^{2/5}}\right)(3x_1 + \\ + 3x_3 + x_3^3) + \left(\frac{27}{2} + \frac{96}{25\Theta^{3/5}} - \frac{72}{25\Theta^{2/5}} - \frac{54}{5\Theta^{1/5}}\right)\left(\frac{3x_2}{4} - \frac{1}{3}\,x_3(3 + x_3^2)\right)$$

(здесь $\Theta = \Theta(x)$) удовлетворяет в ней ограничениям $|u(x)| \le 40$, $|\dot u(x)| \le 75$, $|\ddot u(x)| \le 135$.

Найдем траекторию системы (2.38) из точки $x_0 = (11, -5.5, -2)^* \in Q$ в начало координат. Для этого требуется лишь один раз решить уравнение (2.39) при $x = x_0$ для нахождения положительного корня Θ_0. Имеем $\Theta_0 \approx 0.94398$ и время движения $T(x_0) \approx 4.94268$. Поскольку $\dot\theta = -\theta^{4/5}$, $\theta(0) = \Theta_0$, то $\theta(t) = ((T-t)/5)^5$. Нахождение решения $z(t) = (z_1(t), z_2(t), z_3(t))^*$ задачи Коши для системы (2.2) с управлением $u(z) = -\frac{1}{2}b_0^* F(\theta(t))z - pz$ и начальными условиями $z_{10} = -x_{20}/6$, $z_{20} = -(3x_{10} + 3x_{30} + x_{30}^3)/18$, $z_{30} = 3x_{20}/4 - x_{30}(3 + x_{30}^2)/3$ сводится к решению задачи Коши для дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами относительно функции $y(\tau) = z_1(T - e^\tau)$ вида $2y''' - 15y'' + 122y' - 360y = 0$, $y(\ln T) = z_{10}$, $y'(\ln T) = -Tz_{20}$, $y''(\ln T) - y'(\ln T) = T^2 z_{30}$. Это решение имеет вид

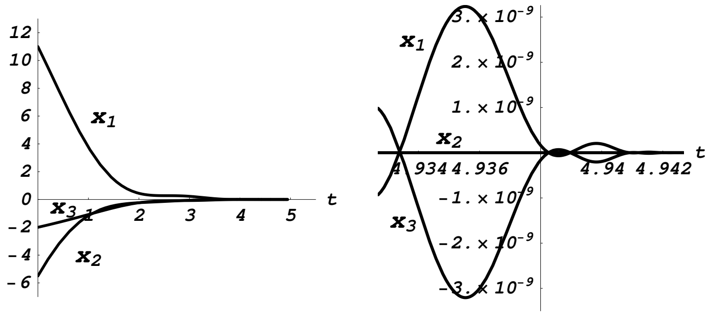

Рис. 2. Траектория $x(t)$.

$$
\begin{aligned}
z_1(t) &= (T-t)^5(c_1 + c_2\cos\gamma(t) + c_3\sin\gamma(t)),\\
z_2(t) &= (T-t)^4\left(5c_1 - (5c_2 + \sqrt{47}\,c_3)\cos\gamma(t) + (\sqrt{47}\,c_2 - 5c_3)\sin\gamma(t)\right),\\
z_3(t) &= (T-t)^3\left(20c_1 - (27c_2 - 9\sqrt{47}\,c_3)\cos\gamma(t) - (27c_3 + 9\sqrt{47}\,c_2)\sin\gamma(t)\right),
\end{aligned}
$$

где $c_1 = (72z_{10} + 9Tz_{20} + T^2z_{30})/(47T^5)$, $c_2 = \xi_1\cos(\sqrt{47}\ \ln T) - \xi_2\sin(\sqrt{47}\ \ln T)$, $c_3 = \xi_1\sin(\sqrt{47}\ \ln T) + \xi_2\cos(\sqrt{47}\ \ln T)$, $\xi_1 = -(25z_{10} + 9Tz_{20} + T^2z_{30})/(47T^5)$, $\xi_2 = -(5z_{10} + Tz_{20})/(\sqrt{47}\,T^5)$, $\gamma(t) = \sqrt{47}\ln(T-t)$. Из системы

$$
-x_2/6 = z_1, \quad (-3x_1 - 3x_3 - x_3^3)/18 = z_2, \quad 3x_2/4 - x_3(3 + x_3^2)/3 = z_3
$$

находим траекторию $x(t)$, которая имеет следующий вид

$$
x(t) = (9z_1(t)/2 - 6z_2(t) + z_3(t), -6z_1(t), w(t) - 1/w(t))^*,
$$

где $w(t) = \left(-2916z_1(t) + \sqrt{186624 + (2916z_1(t) + 648z_3(t))^2} - 648z_3(t)\right)^{1/3}/(6\sqrt[3]{2})$. Траектория, начинающаяся в точке $(11, -5.5, -2)^*$ и оканчивающаяся в нуле в момент времени T, изображена на рис. 2.

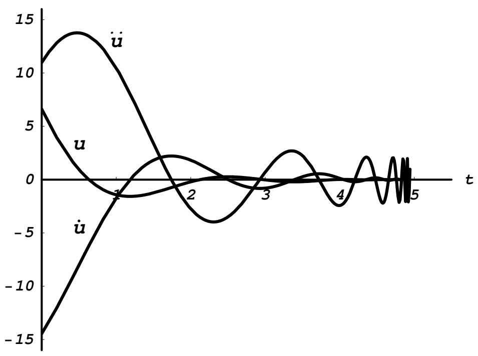

Рис. 3. Управление и его производные на траектории.

На рис. 3 изображены графики управления, его первой и второй производных на траектории. Очевидно, управление и его производные на траектории удовлетворяют заданным ограничениям.

Список цитируемых источников

1. *Ахиезер Н.И.* Классическая проблема моментов. — М.: Госиздат. физ.-мат. литературы, 1961. — 310 с.
2. *Ковалев А.М.* Нелинейные задачи управления и наблюдения в теории динамических систем. — К.: Наукова думка, 1980. — 175 с.
3. *Коробов В.И.* Управляемость, устойчивость некоторых нелинейных систем // Дифференциальные уравнения. — 1973. — Т. 9, № 4. — С. 614–619.
4. *Коробов В.И.* Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости // Математический сборник. — 1979. — Т. 109(151), № 4(8). — С. 582–606.
5. *Коробов В.И.* Решение задачи синтеза с помощью функции управляемости // Доклады АН СССР. — 1979. — Т. 248, № 5. — С. 1051–1055.
6. *Коробов В.И.* Метод функции управляемости. — М.-Ижевск: "Регулярная и хаотическая динамика", 2007. — 576 с.
7. *Коробов В.И., Скляр Г.М.* Методы построения позиционных управлений и допустимый принцип максимума // Дифференциальные уравнения. — 1990. — Т. 26, № 11. — С. 1914–1924.
8. *Коробов В.И., Скорик В.А.* Позиционный синтез ограниченных инерционных управлений для систем с одномерным управлением // Дифференциальные уравнения. — 2002. — Т. 38, № 3. — С. 319–331.
9. *Крейн М.Г., Нудельман А.А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1973. — 551 с.
10. *Кунцевич В.М., Лычак М.М.* Синтез систем автоматического управления с помощью функции Ляпунова. — М.: Наука, 1977. — 390 с.
11. *Скляр Е.В.* О классе нелинейных управляемых систем, отображающихся на линейные // Математическая физика, анализ, геометрия. – 2001. – № 2/4. – С. 205–214.
12. *Скляр Е.В.* Отображение треугольных управляемых систем на линейные без замены управления // Дифференциальные уравнения. — 2002. — Т. 38, № 1. — С. 34–43.
13. *Celikovsky S., Nijmeijer H.* Equivalence of nonlinear systems to triangular form: the singular case // Systems and Control Letters. — 1996. — No. 27. — P. 135–144.
14. *Korobov V.I., Skoryk V.A.* Synthesis of restricted inertial controls for systems with multivariate control // J. Math. Anal. Appl. — 2002. — Vol. 275, No. 1. — P. 84–107.
15. *Sklyar G.M., Sklyar K.V., Ignatovich S.Yu.* On the extension of the Korobov's class of linearizable triangular systems by nonlinear control systems of the class C^1 // Systems Control Letters. — 2005. — Vol. 54. — P. 1097–1108.

Получена 30.09.2008