*Динамические системы, вып. 24 (2008), 49–59*

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 513.88

# Про зображення алгебр зі співвідношеннями типу Темперлі-Ліба, комутації, ортогональності та одним додатковим співвідношенням

**С. В. Іванов, Ю. П. Москальова**
Таврійський національний університет ім. В.І. Вернадського,
Сімферополь 95007. *E-mail: serg_h-g@mail.ru*, *yulmosk@mail.ru*

**Анотація.** У роботі досліджено алебри, породжені твірними зі співвідношеннями типу Темперлі-Ліба, комутації, ортогональності та одним додатковим співвідношенням, асоційовані з графами Кокстера. Для цих алгебр доведено співпадіння єдиного нетривіального незвідного $*$-зображення (чотири випадки) з $*$-зображенням алгебр без додаткового співвідношення.

## 1. Вступ

Робота присвячена дослідженню алгебр, асоційованих з графами Кокстера $\mathbf{\Gamma}$, породжених системою твірних, та їх $*$-зображень. Графом Кокстера $\mathbf{\Gamma}$ називають скінченний неорієнтований граф $\mathbf{\Gamma} = (V, R)$ без кратних ребер і петель, де $V = 1, ..., n, n = |\mathbf{\Gamma}|$ – множина вершин, $R$ – множина ребер $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$, де $i, j \in V, i \neq j$, всі ребра $R$ якого поділяються на декілька типів

$$R = \bigsqcup_{m=3}^{\infty} R_m,$$

де $R_m$ – множина ребер графа, позначених числами $m$. Ми будемо вважати, що $m < \infty$. Для зручності, коли $R = R_3$, відповідний граф будемо позначати $\Gamma$. У цьому випадку ми маємо алгебру, асоційовану з графом $\Gamma$, та породжену системою твірних $\{p_i\}$, $p_i = p_i^2 = p_i^*$, для яких виконуються співвідношення

$$p_i p_j p_i = \tau_{ij} p_i, p_j p_i p_j = \tau_{ij} p_j, \tag{1.1}$$

де $i$ та $j$ – вершини графа $\Gamma$, які з'єднані ребром, а $\tau_{ij} \in \mathbb{C}$ – число, яким помічено це ребро.

Вперше співвідношення виду (1.1) з'явилися у 1971 році у роботі Темперлі та Ліба [1] при дослідженні двомірної моделі льоду та моделі Поттса. При відповідних граничних умовах функція розподілу для моделі льоду така сама, як і для критичної моделі Поттса, якщо зробити у останній заміну змінних.

$*$-зображення алгебри, породженої двома твірними елементами без додаткових умов $\mathcal{P}_2 = \mathbb{C}\langle p_1, p_2 | p_i = p_i^2 = p_i^*, i = 1, 2\rangle$ є добре вивченими. Але дослідження $*$-зображень алгебри з трьома твірними ортопроекторами $\mathcal{P}_3$ без додаткових співвідношень є вже надзвичайно складною задачею. Як наслідок, існує велика кількість конкретних алгебр, породжених ортопроекторами з додатковими співвідношеннями, дослідження яких використовує різноманітні методи та прийоми.

Алгебри зі співвідношенням $q_j p q_j = \tau q_j$, $j = \overline{1,n}$ разом з лінійними співвідношеннями та їх $*$-зображення вивчались у роботах київських математиків С. А. Кругляка, В. Л. Островського, Н.Д. Поповой, С. В. Поповича, В. І. Рабановича, Ю. С. Самойленко, О.В. Стрільця та інших (див. [2, 3, 4, 5, 6, 7]).

У дійсній роботі ми досліджуємо алгебри $A_{\mathbf{\Gamma},\tau,1\perp}$, породжені твірними зі співвідношеннями типу Темперлі-Ліба, комутації, ортогональності та одним додатковим співвідношенням, асоційовані з графами Кокстера $\mathbf{\Gamma}$. Для цих алгебр доведено співпадіння єдиного нетривіального незвідного $*$-зображення (чотири випадки) з $*$-зображенням алгебр $A_{\Gamma,\tau,\perp}$.

## 2. Алгебри зі співвідношеннями типу Темперлі-Ліба

Розглянемо результати, які було отримано для алгебр, асоційованих з графами та породжених системою твірних з співвідношеннями типу Темперлі-Ліба.

Нехай $\Gamma$ – довільний скінченне неорієнтований граф без кратних ребер та петель. $V\Gamma$ та $E\Gamma \subset V\Gamma \times V\Gamma$ – множини відповідно вершин та ребер графа $\Gamma$. Нехай $\tau : E\Gamma \to (0;1)$ – деяка розстановка чисел на ребрах графа $\Gamma$. Довільним чином ототожнимо вершини графа з числами $0, ..., \mid V\Gamma \mid -1$. Позначимо $\tau(i,j) = \tau_{ij} = \tau_{ji}$.

**Означення 1.** Алгеброю $A_{\Gamma,\tau,\perp}$ є алгебра з одиницею над полем комплексних чисел, породжену ідемпотентами $\{p_i,\ i \in V\Gamma\}$, з співвідношеннями:

$$\begin{cases} p_i p_j p_i = \tau_{ij} p_i, p_j p_i p_j = \tau_{ij} p_j, & \text{якщо } \{i,j\} \in E\Gamma; \\ p_i p_j = p_j p_i = 0, & \text{інакше }. \end{cases}$$

У подальшому ми будемо розглядати $A_{\Gamma,\tau,\perp}$ як $*$-алгебру, маючи на увазі наступну інволюцію:

$$(p_{i_1} p_{i_2} ... p_{i_k})^* = p_{i_k} p_{i_{k-1}} ... p_{i_1}.$$

Для таких алгебр у випадку, коли числа $\tau_{ij}$ дорівнюють одне оддному, зображення розглядались у роботі [8] для гарфа, який є ланцюгом, та у роботі [9] для графа, який є циклом.

Будемо вважати, що $\Gamma$ – граф не більше ніж з одним циклом. Розглянемо теорему, яку наведено у роботі [10], яка довозляє робити висновки про ранги твірних елементів алгебри $A_{\Gamma,\tau,\perp}$.

**Теорема 1.** *Якщо $A_{\Gamma,\tau,\perp}$ має нетривіальні незвідні зображення, то ранги всіх твірних-проекторів у них дорівнюють 1.*

Обгрунтування цієї теореми суттєво використовує наступну лему.

**Лема 1.** *Алгебра $A_{\Gamma,\tau,\perp}$ не має бескінеченовимірних незвідних зображень у гільбертовому просторі.*

Нехай кількість вершин у графі $\mid V\Gamma \mid = n$. Розглянемо самоспряжену матрицю $A = A(\Gamma,\tau) = \{A_{i,j}\}_{i,j=0}^{n-1}$, де $A_{i,j} = 0$, якщо вершини $i$ та $j$ дерева $\Gamma$ не з'єднані ребром, та $A_{i,j} = \sqrt{\tau_{ij}}$ навпаки.

**Теорема 2.** *Нехай $\Gamma$ – дерево. Нетривіальне зображення алгебри $A_{\Gamma,\tau,\perp}$ існує тоді і тільки тоді, коли матриця $A(\Gamma,\tau)$ є невід'ємно визначенною. Незвідне нетривіальне зображення $A_{\Gamma,\tau,\perp}$ едине з точністю до унітарної еквівалентності, та його розмірність дорівнює рангу матриці $A(\Gamma,\tau)$.*

У роботі [11] приведено та обгрунтовано два алгоритми, які дозволяють будувати незвідні зображення алгебри $A_{\Gamma,\tau,\perp}$, асоційованої з скінченним неорієнтованим деревом $\Gamma$. Перший виконує розмітку дерева. При цьому вершини дерева отримують мітки $a_i$ з допомогою яких другий алгоритм будує формули зображення. Розмітка дерева $\Gamma$ буде виконана корректно, якщо під час роботи алгоритму будуть отримані мітки $a_i > 0$, а остання мітка $a_j \geq 0$.

Якщо $\Sigma_\Gamma$ – множина розстановок $\tau$, для яких існують нетривіальні незвідні зображення $*$-алгебри $A_{\Gamma,\tau,\perp}$, а $\Omega_\Gamma$ – множина розстановок $\tau$, для яких існують коректні розмітки дерева $\Gamma$, то має місце наступна теорема.

**Теорема 3.** *Якщо $\Gamma$ – дерево, то для $*$-алгебри $A_{\Gamma,\tau,\perp}$ має місце рівність $\Omega_\Gamma = \Sigma_\Gamma$.*

З доказу теореми отримано

**Наслідок 1.** *Якщо для дерева $\Gamma$ виконана коректна розмітка, то розмірність зображення алгебри $A_{\Gamma,\tau,\perp}$ або дорівнює $n$, якщо остання мітка $a_j > 0$, або дорівнює $n-1$, якщо $a_j = 0$. Інші розмірності неможливі.*

Мітки $a_i$ також використовуються як індікатори існування зображення $*$-алгебри. Так у роботі [12] було отримано формули зображень для $*$-алгебр $A_{\Gamma,\tau,\perp}$, асоційованих з простими діаграмами Динкіна та простими розширеними діаграмами Динкіна $\widetilde{D}_n, \widetilde{E}_6, \widetilde{E}_7, \widetilde{E}_8$ з різними параметрами $\tau$. Також у роботі отримано опис параметрів для $*$-алгебр $A_{\Gamma,\tau,\perp}$ з двома параметрами $\tau_1$ та $\tau_2$, асоційованих з простими та простими розширеними діаграмами Динкіна $\widetilde{D}_n, \widetilde{E}_6, \widetilde{E}_7, \widetilde{E}_8$.

Нехай $\Gamma$, як і раніше, є деяким скінченним неорієнтованим деревом без кратних ребер та петель. Кількість вершин $\mid V\Gamma \mid = n$, множини ребер – $\mid E\Gamma \mid = n-1$. Довільним чином занумеруємо вершини графа числами $i = \overline{1,n}$ та виконаємо розташування чисел на ребрах $\tau : E\Gamma \to (0;1)$. При цьому кожне ребро графа з вершинами $i$ та $j$ отримає мітку $\tau_{ij} = \tau_{ji}$.

Усі несуміжні вершини дерева $\Gamma$, крім двох, з'єднаємо пунктирними ребрами. Не обмежуючи спільність міркувань, будемо вважати, що несуміжні вершини, які не з'єднані пунктирним ребром, мають мітки $k$ та $m$. Розглянемо алгебру $A_{\Gamma,\tau,1\perp}$.

**Означення 2.** Алгеброю $A_{\Gamma,\tau,1\perp}$ назвемо асоціативну алгебру з одиницею над полем комплексних чисел, породжену ідемпотентами $p_i$, $i \in V\Gamma$, зі співвідношеннями:

$$\begin{cases} p_ip_jp_i = \tau_{ij}p_i, p_jp_ip_j = \tau_{ij}p_j, & \text{якщо } \{i,j\} \in E\Gamma; \\ p_ip_j = p_jp_i, & \text{якщо } \{i,j\} \overline{\in} E\Gamma, \text{ та } \{i,j\} \neq \{k,m\}; \\ p_kp_m = p_mp_k = 0. \end{cases}$$

Відповідно $*$-алгеброю $A_{\Gamma,\tau,1\perp}$ назвемо алгебру $A_{\Gamma,\tau,1\perp}$ з інволюцією

$$(p_{i_1}p_{i_2}...p_{i_k})^* = p_{i_k}p_{i_{k-1}}...p_{i_1}.$$

Таким чином, пунктирні ребра графа відповідають співвідношенням комутації між відповідними ідемпотентами, а несуміжність та відсутність пунктирного ребра відповідає співвідношенню ортогональності.

У роботі [13] доведено наступну теорему.

**Теорема 4.** *Нехай $\Gamma$ – дерево. Якщо у $\Gamma$ відстань між всякою парою висячих вершин більше двох, то $*$-алгебри $A_{\Gamma,\tau,\perp}$ та $A_{\Gamma,\tau,1\perp}$ співпадають.*

Розглянемо довільне скінченне неорієнтоване дерево $\mathbf{\Gamma}$ без кратних ребер та петель, $\mid V\mathbf{\Gamma} \mid = n$, $\mid E\mathbf{\Gamma} \mid = n-1$. Довільним чином занумеруємо вершини графа числами $i = \overline{1,n}$ та виконаємо розташування чисел на ребрах $\tau : E\mathbf{\Gamma} \to (0;1)$. З усіх вершин графа $\mathbf{\Gamma}$ оберемо дві довільні суміжні вершини. Не порушуючи спільність міркувань, будемо вважати, що ці вершини мають мітки 1 та 2. Ребро між цими вершинами позначимо цифрою 4. Тобто для множини ребер дерева $\mathbf{\Gamma}$ виконується рівність $R = R_3 \bigsqcup R_4$, де $\mid R_4 \mid = 1$. Розглянемо наступну алгебру.

**Означення 3.** Алгеброю $A_{\mathbf{\Gamma},\tau,\perp}$ назвемо асоціативну алгебру з одиницею над полем комплексних чисел, породжену ідемпотентами $p_i$, $i \in V\mathbf{\Gamma}$, зі співвідношеннями:

$$\begin{cases} p_ip_jp_i = \tau_{ij}p_i, p_jp_ip_j = \tau_{ij}p_j, & \text{якщо } \{i,j\} \in E\mathbf{\Gamma} \text{ та } \{i,j\} \neq \{1,2\}; \\ p_ip_j = p_jp_i = 0, & \text{якщо } \{i,j\} \overline{\in} E\mathbf{\Gamma}; \\ (p_1p_2)^2 = \tau_{12}p_1p_2, (p_2p_1)^2 = \tau_{12}p_2p_1. \end{cases}$$

Позначимо через $e$ ребро дерева $\mathbf{\Gamma}$, яке є інцедентним до вершин 1 та 2, тобто $e = \{1,2\}$. Оскільки $\mathbf{\Gamma}$ – дерево, то при видаленні ребра $e$ ми отримаємо дві компоненти зв'язності $\Gamma_1$ та $\Gamma_2$, які теж є деревами. Таким чином $\mathbf{\Gamma} - e = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$. Нехай $\mid V\Gamma_1 \mid = n_1$ та $\mid V\Gamma_2 \mid = n_2$. При цьому $n_1 + n_2 = n$.

Нехай $\pi : A_{\mathbf{\Gamma},\tau,\perp} \to L(H)$ – незвідне зображення $*$-алгебри $A_{\mathbf{\Gamma},\tau,\perp}$, позначимо $\pi(p_i) = P_i$. Для даної алгебри, з урахуванням введених позначень, у роботі [14] доведено наступну теорему.

**Теорема 5.** *Нехай $\mathbf{\Gamma}$ – дерево, а $\pi$ – незвідне зображення $*$-алгебри $A_{\mathbf{\Gamma},\tau,\perp}$. Тоді можливий лише один з наступних чотирьох випадків:*

*1) Якщо для деякого $i$, $i \in V\Gamma_1$ має місце $P_i = 0$, то для довільного $j \in V\Gamma_1$ має місце $P_j = 0$, а інші ортопроектори співпадають з ортопроекторами зображення алгебри $A_{\Gamma_2,\tau,\perp}$.*

*2) Якщо для деякого $i$, $i \in V\Gamma_2$ має місце $P_i = 0$, то для довільного $j \in V\Gamma_2$ має місце $P_j = 0$, а інші ортопроектори співпадають з ортопроекторами зображення алгебри $A_{\Gamma_1,\tau,\perp}$.*

*3) Якщо для деякого $i$, $i \in V\Gamma_1$ та деякого $j$, $j \in V\Gamma_2$ має місце $P_i = P_j = 0$, то зображення $\pi$ є тривіальним.*

*4) Якщо усі ортопроектори $P_i \neq 0$, то $\pi$ є зображенням $*$-алгебри $A_{\Gamma,\tau,\perp}$.*

Позначимо через $p_{1,m}$ добуток $m$ переміжних співмножників $p_1$ та $p_2$, який починається з $p_1$, та через $p_{2,m}$ аналогічний добуток, який починається з $p_2$.

Якщо ребро між вершинами 1 та 2 графа $\mathbf{\Gamma}$ позначити цифрою $m, m \geq 4$, тобто якщо для множини ребер дерева $\mathbf{\Gamma}$ виконується рівність $R = R_3 \bigsqcup R_m$, де $\mid R_m \mid = 1$, то можна ввести у розгляд наступну алгебру.

**Означення 4.** Алгеброю $A_{\mathbf{\Gamma},\tau,\perp}$ назвемо асоціативну алгебру з одиницею над полем комплексних чисел, породжену ідемпотентами $p_i$, $i \in V\mathbf{\Gamma}$, зі співвідношеннями:

$$\begin{cases} p_ip_jp_i = \tau_{ij}p_i, p_jp_ip_j = \tau_{ij}p_j, & \text{якщо } \{i,j\} \in E\mathbf{\Gamma} \text{ и } \{i,j\} \neq \{1,2\}; \\ p_ip_j = p_jp_i = 0, & \text{якщо } \{i,j\}\overline{\in}E\mathbf{\Gamma}; \\ p_{1,m} = \tau_{12}p_{1,m-2}, p_{2,m} = \tau_{12}p_{2,m-2}. \end{cases}$$

Для даної алгебри у роботі [14] отримано аналогічні результати.

**Теорема 6.** *Нехай $\mathbf{\Gamma}$ – дерево, а $\pi$ – незвідне зображення $*$-алгебри $A_{\mathbf{\Gamma},\tau,\perp}$. Тоді можливий лише один з наступних випадків:*

*1) Якщо для деякого $i \in V\Gamma_1$ маємо $P_i = 0$, то для довільного $j \in V\Gamma_1$ має місце $P_j = 0$, а інші ортопроектори співпадають з ортопроекторами зображення алгебри $A_{\Gamma_2,\tau,\perp}$.*

*2) Якщо для деякого $i \in V\Gamma_2$ маємо $P_i = 0$, то для довільного $j \in V\Gamma_2$ має місце $P_j = 0$, а інші ортопроектори співпадають з ортопроекторами зображення алгебри $A_{\Gamma_1,\tau,\perp}$.*

*3) Якщо для деякого $i \in V\Gamma_1$ та для деякого $j \in V\Gamma_2$ маємо $P_i = P_j = 0$, то зображення $\pi$ є тривіальним.*

*4) Якщо усі ортопроектори $P_i \neq 0$, то $\pi$ є $*$-зображенням алгебри $A_{\Gamma,\tau,\perp}$.*

## 3. Зображення алгебри $A_{\mathbf{\Gamma},\tau,1\perp}$, пов'язаної з графом Кокстера $\mathbf{\Gamma}$, $R = R_3 \bigsqcup R_m$, $|R_m| = 1$, $m \geq 4$, зі співвідношеннями комутації та одним співвідношенням ортогональності

Розглянемо довільне скінченне неорієнтоване дерево $\mathbf{\Gamma}$ без кратних ребер та петель, $\mid V\mathbf{\Gamma} \mid = n$, $\mid E\mathbf{\Gamma} \mid = n-1$. Довільним чином занумеруємо вершини графа числами $i = \overline{1,n}$ та виконаємо розташування чисел на ребрах $\tau : E\mathbf{\Gamma} \to (0;1)$. Вважаємо, що $\mathbf{\Gamma}$ є графом Кокстера, та $R = R_3 \bigsqcup R_4$, $|R_4| = 1$. Між усіми парами несуміжних вершин, крім однеї пари, проведемо пунктирні ребра. Нехай пара несуміжних вершин, які не з'єднані пунктирним ребром, має мітки $k$ та $u$. Оберемо дві суміжні вешини та на ребрі, яке з'єднує ці вершини, поставимо число 4. Не порушуючи спільність міркувань, вважаємо, що ці вершини мають мітки 1 та 2.

**Означення 5.** Алгеброю $A_{\mathbf{\Gamma},\tau,1\perp}$ назвемо асоціативну алгебру з одиницею над полем комплексних чисел, породжену ідемпотентами $p_i$, $i \in V\mathbf{\Gamma}$, зі співвідношеннями:

$$\begin{cases} p_i p_j p_i = \tau_{ij} p_i, p_j p_i p_j = \tau_{ij} p_j, & \text{якщо } \{i,j\} \in E\mathbf{\Gamma} \text{ та } \{i,j\} \neq \{1,2\}; \\ p_i p_j = p_j p_i, & \text{якщо } \{i,j\} \overline{\in} E\mathbf{\Gamma},\ \{i,j\} \neq \{k,u\}; \\ p_k p_u = p_u p_k = 0; \\ (p_1 p_2)^2 = \tau_{12} p_1 p_2, (p_2 p_1)^2 = \tau_{12} p_2 p_1. \end{cases}$$

Відповідно $*$-алгеброю $A_{\mathbf{\Gamma},\tau,1\perp}$ назвемо алгебру $A_{\mathbf{\Gamma},\tau,1\perp}$ з інволюцією

$$(p_{i_1} p_{i_2} ... p_{i_s})^* = p_{i_s} p_{i_{s-1}} ... p_{i_1}.$$

Зазначимо, що наявність пунктирного ребра між несуміжними вершинами $i$ та $j$ дерева $\mathbf{\Gamma}$ означає, що для відповідних твірних елементів $p_i$ та $p_j$ алгебри $A_{\mathbf{\Gamma},\tau,1\perp}$ виконується співвідношення $p_i p_j = p_j p_i$.

Нехай $e$ – ребро дерева $\mathbf{\Gamma}$, яке є інцедентним до вершин 1 та 2, тобто $e = \{1,2\}$. Оскільки $\mathbf{\Gamma}$ – дерево, то при видаленні ребра $e$ ми отримаємо дві компоненти зв'язності $\Gamma_1$ та $\Gamma_2$, які теж є деревами. Таким чином $\mathbf{\Gamma} - e = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$. Тоді для алгебри $A_{\mathbf{\Gamma},\tau,1\perp}$ має місце наступна теорема.

**Теорема 7.** *Якщо $\mathbf{\Gamma}, \Gamma_1, \Gamma_2$ – дерева, у яких відстань між довільною парою висячих вершин більше ніж 2, то для алгебри $A_{\mathbf{\Gamma},\tau,1\perp}$ мають місце твердження:*

1) *Якщо вершини $k, u \in V\Gamma_1$, то для двох довільних твірних елементів $p_i$ та $p_j$ алгебри $A_{\mathbf{\Gamma},\tau,1\perp}$ таких, що $\{i,j\} \overline{\in} E\mathbf{\Gamma}$ та $i,j \in V\Gamma_1$ виконується $p_i p_j = p_j p_i = 0$.*

2) *Якщо вершини $k, u \in V\Gamma_2$, то для двох довільних твірних елементів $p_i$ та $p_j$ алгебри $A_{\mathbf{\Gamma},\tau,1\perp}$ таких, що $\{i,j\} \overline{\in} E\mathbf{\Gamma}$ та $i,j \in V\Gamma_2$ виконується $p_i p_j = p_j p_i = 0$.*

3) *Якщо вершина $k \in V\Gamma_1$, вершина $u \in V\Gamma_2$, то для двох довільних твірних елементів $p_i$ та $p_j$ алгебри $A_{\mathbf{\Gamma},\tau,1\perp}$ таких, що $\{i,j\} \overline{\in} E\mathbf{\Gamma}$ та $i \in V\Gamma_1$, $j \in V\Gamma_2$ виконується $p_i p_j = p_j p_i = 0$.*

*Доведення.* Доведемо твердження 1).

Розглянемо алгебру, породжену твірними $p_i$, $i \in V\Gamma_1$ з тими ж співвідношеннями. Це алгебра $A_{\Gamma_1,\tau,1\perp}$. Тоді за Теоремою 4 має місце рівність $A_{\Gamma_1,\tau,1\perp} = A_{\Gamma_1,\tau,\perp}$. Таким чином, твердження 1) доведено.

Твердження 2) доводиться аналогічно.

Доведемо твердження 3).

Розглянемо два довільних твірних елемента $p_i$ та $p_j$ алгебри $A_{\mathbf{\Gamma},\tau,1\perp}$, де $i \in V\Gamma_1$, $j \in V\Gamma_2$. Оскільки $\Gamma_1$ та $\Gamma_2$ – дерева, то існують єдині найкоротші шляхи від вершини $i$ до вершини $k$ та від вершини $j$ до вершини $u$. Нехай шлях від вершини $i$ до вершини $k$ проходить крізь вершини $i_1, i_2, ..., i_s$, а шлях від вершини $j$ до вершини $u$ проходить крізь вершини $j_1, j_2, ..., j_r$. Покажемо, що $p_ip_j = p_jp_i = 0$. Використовуючи співвідношення для твірних елементів алгебри $A_{\mathbf{\Gamma},\tau,1\perp}$, отримуємо:

$$p_jp_i = p_ip_j = \frac{p_ip_{i_1}p_ip_j}{\tau_{ii_1}} = \frac{p_ip_{i_1}p_jp_i}{\tau_{ii_1}} = ... =$$

$$= \frac{p_ip_{i_1}p_{i_2}...p_{i_s}p_kp_jp_{i_s}...p_{i_2}p_{i_1}p_i}{\tau_{ii_1}\tau_{i_1i_2}...\tau_{i_sk}} = \frac{p_ip_{i_1}p_{i_2}...p_{i_s}p_kp_jp_{j_1}p_jp_{i_s}...p_{i_2}p_{i_1}p_i}{\tau_{ii_1}\tau_{i_1i_2}...\tau_{i_sk}\tau_{jj_1}} =$$

$$= \frac{p_ip_{i_1}p_{i_2}...p_{i_s}p_jp_kp_{j_1}p_jp_{i_s}...p_{i_2}p_{i_1}p_i}{\tau_{ii_1}\tau_{i_1i_2}...\tau_{i_sk}\tau_{jj_1}} = ... =$$

$$= \frac{p_ip_{i_1}p_{i_2}...p_{i_s}p_jp_{j_1}p_{j_2}...p_{j_r}p_kp_up_{j_r}...p_{j_2}p_{j_1}p_jp_{i_s}...p_{i_2}p_{i_1}p_i}{\tau_{ii_1}\tau_{i_1i_2}...\tau_{i_sk}\tau_{jj_1}\tau_{j_1j_2}...\tau_{j_ru}} = 0.$$

Таким чином, враховуючи довільність твірних елементів $p_i$ та $p_j$, тведження 3) доведено.

$\square$

Аналогічним чином, можливо ввести у розгляд алгебру, у якій не єдине співвідношення ортогональності, а $r$, тобто, алгебру $A_{\mathbf{\Gamma},\tau,r\perp}$.

Розглянемо алебру з трьома співвідношеннями ортогональності $A_{\mathbf{\Gamma},\tau,3\perp}$. Нехай співвідношення ортогональності виконуються для трьох пар твірних:

$$p_{k_1}p_{u_1} = p_{u_1}p_{k_1} = 0;\ p_{k_2}p_{u_2} = p_{u_2}p_{k_2} = 0;\ p_{k_3}p_{u_3} = p_{u_3}p_{k_3} = 0. \tag{3.1}$$

Тоді з Теореми 7 отримуємо наступний наслідок.

**Наслідок 2.** *Якщо* $\mathbf{\Gamma}, \Gamma_1, \Gamma_2$ *– дерева, у яких відстань між довільною парою висячих вершин більше ніж 2, та для твірних* $p_{k_1}$, $p_{k_2}$, $p_{k_3}$, $p_{u_1}$, $p_{u_2}$, $p_{u_3}$ *алгебри* $A_{\mathbf{\Gamma},\tau,3\perp}$ *виконуються співвідношення (3.1), де* $k_1, u_1, k_3 \in V\Gamma_1$, *а* $k_2, u_2, u_3 \in V\Gamma_1$, *то алгебри* $A_{\mathbf{\Gamma},\tau,3\perp}$ *та* $A_{\mathbf{\Gamma},\tau,\perp}$ *співпадають.*

Припустимо, що у алгебри $A_{\mathbf{\Gamma},\tau,3\perp}$ існує незвідне зображення $\pi : A_{\mathbf{\Gamma},\tau,3\perp} \to L(H)$, $\pi(p_i) = P_i$. Тоді, враховуючи Наслідок 2 та Теорему 5, ми отримуємо теорему.

**Теорема 8.** *Якщо* $\mathbf{\Gamma}, \Gamma_1, \Gamma_2$ *– дерева, у яких відстань між довільною парою висячих вершин більше ніж 2, та для твірних* $p_{k_1}$, $p_{k_2}$, $p_{k_3}$, $p_{u_1}$, $p_{u_2}$, $p_{u_3}$ *алгебри* $A_{\mathbf{\Gamma},\tau,3\perp}$ *виконуються співвідношення (3.1), де* $k_1, u_1, k_3 \in V\Gamma_1$, *а* $k_2, u_2, u_3 \in V\Gamma_2$, *то для зображення* $\pi$ $*$*-алгебри* $A_{\mathbf{\Gamma},\tau,3\perp}$ *можливий лише один з чотирьох наступних випадків:*

1) *Якщо для деякого* $i$, $i \in V\Gamma_1$ *має місце* $P_i = 0$, *то для довільного* $j \in V\Gamma_1$ *має місце* $P_j = 0$, *а інші ортопроектори співпадають з ортопроекторами зображення алгебри* $A_{\Gamma_2,\tau,\perp}$.

2) *Якщо для деякого* $i$, $i \in V\Gamma_2$ *має місце* $P_i = 0$, *то для довільного* $j \in V\Gamma_2$ *має місце* $P_j = 0$, *а інші ортопроектори співпадають з ортопроекторами зображення алгебри* $A_{\Gamma_1,\tau,\perp}$.

3) *Якщо для деякого* $i$, $i \in V\Gamma_1$ *та деякого* $j$, $j \in V\Gamma_2$ *має місце* $P_i = P_j = 0$, *то зображення* $\pi$ *є тривіальним.*

4) *Якщо усі ортопроектори* $P_i \neq 0$, *то* $\pi$ *є зображенням* $*$*-алгебри* $A_{\Gamma,\tau,\perp}$.

Таким чином, для алгебри $A_{\mathbf{\Gamma},\tau,3\perp}$, при умовах з Теореми 8, можлива побудова незвідного зображення з допомогою алгоритма, який було наведено у попередньому пункті.

Нехай як і раніше $\mathbf{\Gamma}$ – довільне скінченне неорієнтоване дерево без кратних ребер та петель, $\mid V\mathbf{\Gamma} \mid = n$, $\mid E\mathbf{\Gamma} \mid = n-1$. Довільним чином занумеруємо вершини графа числами $i = \overline{1,n}$ та виконаємо розташування чисел на ребрах $\tau : E\mathbf{\Gamma} \to (0;1)$. Вважаємо, що $\mathbf{\Gamma}$ є графом Кокстера, та $R = R_3 \bigsqcup R_m$, $|R_m| = 1$, $m \geq 5$. Між усіма парами несуміжних вершин, крім однієї пари, проведемо пунктирні ребра. Нехай пара несуміжних вершин, які не з'єднані пунктирним ребром, має мітки $k$ та $u$. Оберемо дві суміжні вершини та на ребрі, яке з'єднує ці вершини, поставимо число $m$, $m \geq 5$. Не порушуючи спільність міркувань, вважаємо, що ці вершини мають мітки 1 та 2. Розглянемо наступну алгебру.

**Означення 6.** Алгеброю $A_{\mathbf{\Gamma},\tau,1\perp}$ назвемо асоціативну алгебру з одиницею над полем комплексних чисел, породжену ідемпотентами $p_i$, $i \in V\mathbf{\Gamma}$, зі співвідношеннями:

$$\begin{cases} p_i p_j p_i = \tau_{ij} p_i, p_j p_i p_j = \tau_{ij} p_j, & \text{якщо } \{i,j\} \in E\Gamma \text{ та } \{i,j\} \neq \{1,2\}; \\ p_i p_j = p_j p_i, & \text{якщо } \{i,j\} \overline{\in} E\Gamma,\ \{i,j\} \neq \{k,u\}; \\ p_k p_u = p_u p_k = 0; \\ p_{1,m} = \tau_{12} p_{1,m-2}, p_{2,m} = \tau_{12} p_{2,m-2}. \end{cases}$$

Відповідно $*$-алгеброю $A_{\mathbf{\Gamma},\tau,1\perp}$ назвемо алгебру $A_{\mathbf{\Gamma},\tau,1\perp}$ з інволюцією

$$(p_{i_1} p_{i_2} ... p_{i_s})^* = p_{i_s} p_{i_{s-1}} ... p_{i_1}.$$

Нехай $e$ – ребро дерева $\mathbf{\Gamma}$, яке є інцедентним до вершин 1 та 2, тобто $e = \{1, 2\}$. Оскільки $\mathbf{\Gamma}$ – дерево, то при видаленні ребра $e$ ми отримаємо дві компоненти зв'язності $\Gamma_1$ та $\Gamma_2$, які теж є деревами. Таким чином $\mathbf{\Gamma} - e = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$.

Оскільки твердження, які було доведено для алгебр $A_{\mathbf{\Gamma},\tau,1\perp}$ та $A_{\mathbf{\Gamma},\tau,3\perp}$ суттево не використовують співвідношення для твірних елементів з четвіркою, то ми отримуємо наступні наслідки.

**Наслідок 3.** *Якщо $\mathbf{\Gamma}, \Gamma_1, \Gamma_2$ – дерева, у яких відстань між довільною парою висячих вершин більше ніж 2, то для алгебри $A_{\mathbf{\Gamma},\tau,1\perp}$ мають місце твердження:*

1) *Якщо вершини $k, u \in V\Gamma_1$, то для двох довільних твірних елементів $p_i$ та $p_j$ алгебри $A_{\mathbf{\Gamma},\tau,1\perp}$ таких, що $\{i, j\}\overline{\in} E\mathbf{\Gamma}$ та $i, j \in V\Gamma_1$ виконуєтьcя $p_i p_j = p_j p_i = 0$.*

2) *Якщо вершини $k, u \in V\Gamma_2$, то для двох довільних твірних елементів $p_i$ та $p_j$ алгебри $A_{\mathbf{\Gamma},\tau,1\perp}$ таких, що $\{i, j\}\overline{\in} E\mathbf{\Gamma}$ та $i, j \in V\Gamma_2$ виконуєтьcя $p_i p_j = p_j p_i = 0$.*

3) *Якщо вершина $k \in V\Gamma_1$, вершина $u \in V\Gamma_2$, то для двох довільних твірних елементів $p_i$ та $p_j$ алгебри $A_{\mathbf{\Gamma},\tau,1\perp}$ таких, що $\{i, j\}\overline{\in} E\mathbf{\Gamma}$ та $i \in V\Gamma_1$, $j \in V\Gamma_2$ виконуєтьcя $p_i p_j = p_j p_i = 0$.*

Аналогічним чином, можливо ввести у розгляд алгебру, у якій не єдине співвідношення ортогональності, а $r$, тобто, алгебру $A_{\mathbf{\Gamma},\tau,r\perp}$.

Розглянемо алебру з трьома співвідношеннями ортогональності $A_{\mathbf{\Gamma},\tau,3\perp}$. Нехай співвідношення ортогональності виконуються для трьох пар твірних:

$$p_{k_1} p_{u_1} = p_{u_1} p_{k_1} = 0; \; p_{k_2} p_{u_2} = p_{u_2} p_{k_2} = 0; \; p_{k_3} p_{u_3} = p_{u_3} p_{k_3} = 0. \tag{3.2}$$

Тоді отримуємо наступний наслідок.

**Наслідок 4.** *Якщо $\mathbf{\Gamma}, \Gamma_1, \Gamma_2$ – дерева, у яких відстань між довільною парою висячих вершин більше ніж 2, та для твірних $p_{k_1}$, $p_{k_2}$, $p_{k_3}$, $p_{u_1}$, $p_{u_2}$, $p_{u_3}$ алгебри $A_{\mathbf{\Gamma},\tau,3\perp}$ виконуються співвідношення (3.2), де $k_1, u_1, k_3 \in V\Gamma_1$, а $k_2, u_2, u_3 \in V\Gamma_1$, то алгебри $A_{\mathbf{\Gamma},\tau,3\perp}$ та $A_{\mathbf{\Gamma},\tau,\perp}$ співпадають.*

Аналогічно, припустимо, що у алгебри $A_{\mathbf{\Gamma},\tau,3\perp}$ існує незвідне зображення $\pi : A_{\mathbf{\Gamma},\tau,3\perp} \to L(H)$, $\pi(p_i) = P_i$. Тоді, враховуючи Наслідок 4 та Теорему 6, ми отримуємо наслідок.

**Наслідок 5.**

*Якщо $\mathbf{\Gamma}, \Gamma_1, \Gamma_2$ – дерева, у яких відстань між довільною парою висячих вершин більше ніж 2, та для твірних $p_{k_1}$, $p_{k_2}$, $p_{k_3}$, $p_{u_1}$, $p_{u_2}$, $p_{u_3}$ алгебри $A_{\mathbf{\Gamma},\tau,3\perp}$ виконуютьcя співвідношення (3.2), де $k_1, u_1, k_3 \in V\Gamma_1$, а $k_2, u_2, u_3 \in V\Gamma_2$, то для зображення $\pi$ $*$-алгебри $A_{\mathbf{\Gamma},\tau,3\perp}$ можливий лише один з чотирьох наступніх випадків:*

1) *Якщо для деякого $i$, $i \in V\Gamma_1$ має місце $P_i = 0$, то для довільного $j \in V\Gamma_1$ має місце $P_j = 0$, а інші ортопроектори співпадають з ортопроекторами зображення алгебри $A_{\Gamma_2,\tau,\perp}$.*

2) *Якщо для деякого $i$, $i \in V\Gamma_2$ має місце $P_i = 0$, то для довільного $j \in V\Gamma_2$ має місце $P_j = 0$, а інші ортопроектори співпадають з ортопроекторами зображення алгебри $A_{\Gamma_1,\tau,\perp}$.*

3) *Якщо для деякого $i$, $i \in V\Gamma_1$ та деякого $j$, $j \in V\Gamma_2$ має місце $P_i = P_j = 0$, то зображення $\pi$ є тривіальним.*

4) *Якщо усі ортопроектори $P_i \neq 0$, то $\pi$ є зображенням $*$-алгебри $A_{\Gamma,\tau,\perp}$.*

Таким чином, аналогічно, для алгебри $A_{\mathbf{\Gamma},\tau,3\perp}$, при додаткових умовах, можлива побудова незвідного зображення з допомогою алгоритма, який було наведено у попередньому пункті.

Автори висловлюють щиру подяку Самойленко Юрію Стефановичу за постановку задачі та корисні поради.

## Перелік цитованих джерел

1. *Temperley H., Lieb E.* Relations between the 'percolation' and 'colouring' problem and other graph-theoretical problems associated whith regular plane lattices: some exact results for 'percolation' problem // Proc. Roy. Soc. (London). – 1971. – Ser.A, no. 322 – P.251-280.
2. *Кругляк С.А., Рабанович В.И., Самойленко Ю.С.* О суммах проекторов // Функциональный анализ и его приложения. – 2002. – Т.36, вып.3. – С.20-35.
3. *Кириченко А.А., Кругляк С.А.* Про спектр суми проекторів // Вісник Київського університету. – 2003. Сер.: фіз.–мат. науки, №1. – С.24-31.
4. *Заводовский М.В., Самойленко Ю.С.* О $*$-представлениях алгебр $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi}$, ассоциированных с графами Дынкина // Таврический вестник информатики и математики. – 2004. №2. – С.41-51.
5. *Заводовський М.В., Самойленко Ю.С.* Теорія операторів та інволютивні зображення алгебр // Український математичний вісник. – 2004. – Т.1, №4. – С.532-547.
6. *Samoĭlenko Yu.S., Zavodovsky M.V.* Spectral theorems for $*$-representations of the algebras $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi,com}$ associated with Dynkin graphs // Methods of Functional Analysis and Topology. – 2005. – Vol.11, №1. – P.88-96.
7. *Рабанович В.И., Самойленко Ю.С.* Когда сумма идемпотентов или проекторов кратна единице // Функциональный анализ и его приложения. – 2000. – Т.34, вып.4. – С.91-93.
8. *Wenzl H.* On sequences of projections // C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada. – 1987. – Vol.IX, no.1. – P.5-9.
9. *Popova N.* On the Algebra of Temperley-Lieb Type // Proc. Inst. Math. NAS Ukrain. – 2001. – P.80-92.

10. *Власенко М.С., Попова Н.Д.* О конфигурациях подпространств гильбертова пространства с фиксироваными углами между ними // Украинский математический журнал. – 2004. – Т.56, №5. – С.606-615.
11. *Iванов С.В., Москальова Ю.П.* Про $*$-зображення алгебр типу Темперлi- Лiба // Межведомственный научный сборник "Динамические системы". - 2006. - Вып.20. - С.113 - 122.
12. *Ivanov S.V.* On $*$-representations of algebras given by graphs // Meth. Func. Anal. Top. – 2007. –vol. 13, no. 1 – P.17– 27.
13. *Иванов С.В., Москалева Ю.П., Попова Н.Д.* О наборах проекторов с соотношениями типа Темперли-Либа, коммутации и ортогональности // Межведомственный научный сборник "Динамические системы". - 2005. - Вып.19. - С.191 - 198.
14. *Иванов С.В., Попова Н.Д.* О представлениях некоторых алгебр, связанных с графами Кокстера // Ученые записки Таврического нац. ун-та им. В.И. Вернадского, Серия "Математика. Механика. Информатика и кибернетика". – Т 19(58).2 – 2006. - С. 29-38.


*Получена 04.06.2008*