Динамические системы, вып. 26 (2009), 31–42

УДК 517.9:532

Малые движения вращающейся идеальной релаксирующей жидкости

Д.А. Закора

Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 95007. *E-mail: dmitry_@crimea.edu*

Аннотация. В настоящей работе исследована эволюционная задача о малых движениях вращающейся идеальной релаксирующей жидкости в ограниченной области. С использованием операторных методов, от начально-краевой задачи, отвечающей исследуемой модели, осуществлен переход к интегродифференциальному уравнению второго порядка в некотором гильбертовом пространстве. На основе этого уравнения доказана теорема об однозначной сильной разрешимости соответствующей начально-краевой задачи.

Ключевые слова: сжимаемая жидкость, существование, единственность.

1. Постановка задачи

Рассмотрим контейнер, равномерно вращающийся вокруг оси, сонаправленной с действием силы тяжести, и полностью заполненный идеальной неоднородной жидкостью. Будем считать, что жидкость занимает ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Обозначим через $\vec{n}$ единичный вектор, нормальный к границе $S := \partial\Omega$ и направленный вне области Ω. Введем систему координат $Ox_1x_2x_3$, жестко связанную с контейнером, таким образом, что ось Ox_3 совпадает с осью вращения и направлена против действия силы тяжести, а начало координат находится в области Ω. В этом случае равномерная скорость вращения контейнера запишется в виде $\vec{\omega}_0 := \omega_0\vec{e}_3$, где $\vec{e}_3$ — орт оси вращения Ox_3, а $\omega_0 > 0$, для определенности. Будем считать также, что внешнее стационарное поле сил $\vec{F}_0$ является гравитационным и действует вдоль оси вращения, то есть $\vec{F}_0 = -g\vec{e}_3$, $g > 0$.

В состоянии относительного равновесия давление $P_0(x)$ в жидкости распределено по закону

$$P_0(x) = -\rho_0 g x_3 + \frac{1}{2}\,\rho_0\omega_0^2(x_1^2 + x_2^2) + p_0, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega, \tag{1.1}$$

где p_0 — давление жидкости в начале координат, а ρ_0 — плотность жидкости.

Рассмотрим движения жидкости, близкие к твердотельному вращению. Представим полное давление и полную плотность жидкости в виде

$$P(t,x) = P_0(x) + p(t,x), \quad \widetilde{\rho}(t,x) = \rho_0 + \rho(t,x), \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega, \tag{1.2}$$

где $p(t,x)$ — это динамическое давление, а $\rho(t,x)$ — динамическая плотность жидкости. Обозначим через $\vec{w}(t,x)$ поле смещений в жидкости и будем считать, что

$p(t,x)$, $\rho(t,x)$ и $\vec{w}(t,x)$ — малые одного порядка. Линеаризация уравнений Эйлера для движения идеальной жидкости и уравнения неразрывности в подвижной системе координат относительно твердотельного вращения приводит к следующим соотношениям:

$$\rho_0\frac{\partial^2\vec{w}}{\partial t^2}-2\omega_0\rho_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{w}\times\vec{e}_3)=-\nabla p-\rho g\vec{e}_3+\rho_0\vec{f},\quad \rho+\rho_0\mathrm{div}\vec{w}=0\quad(\text{в } \Omega),\qquad(1.3)$$

где $\vec{f}=\vec{f}(t,x)$ — малое поле внешних сил, наложенное на гравитационное поле.

К системе (1.3) присоединим граничное условие непротекания:

$$\vec{w}\cdot\vec{n}=0\quad(\text{на } S).\qquad(1.4)$$

Релаксирующая жидкость моделируется следующим дополнительным уравнением состояния, связывающим динамическое давление $p(t,x)$ и динамическую плотность $\rho(t,x)$:

$$p(t,x)=a_\infty^2(x)\rho(t,x)-\int_0^t K(t-s,x)\rho(s,x)\,ds,\qquad(1.5)$$

где положительная функция $K(t,x)$ определяет ядро интегрального оператора Вольтерра, а $a_\infty^2(x)$ — квадрат скорости звука в неоднородной жидкости. Это наиболее общая модель релаксирующей жидкости.

Задача о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости заключается в отыскании полей $\vec{w}(t,x)$, $p(t,x)$ и $\rho(t,x)$ из уравнений (1.3), граничного условия (1.4), соотношения (1.5), и при начальных условиях

$$\vec{w}(0,x)=\vec{w}^0(x),\quad \frac{\partial}{\partial t}\vec{w}(0,x)=\vec{w}^1(x).\qquad(1.6)$$

Задача без учета вращения, а также при отсутствии силы тяжести и при некоторых модельных ограничениях на граничные условия для динамической плотности изучалась в работах [2, 8, 9, 10, 12]. Результаты этих работ кратко отражены в [11], с. 390-410. В указанной монографии доказана теорема о сильной разрешимости соответствующей начально-краевой задачи, а также исследована спектральная задача о нормальных колебаниях. В работе [1] изучена задача о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости, заполняющей ограниченную область и находящейся под действием гравитационного поля.

В настоящей работе исследуется эволюционная задача, отвечающая вращающейся системе. Целью работы является теорема о сильной разрешимости исходной системы, а также вывод эволюционного уравнения, удобного для последующего исследования спектральной задачи, ассоциированной некоторым образом с системой (1.3)- (1.6).

2. Вывод операторного уравнения

2.1. Проектирование уравнений движения

Для перехода к операторному уравнению в изучаемой задаче применим метод ортогонального проектирования уравнений движения на специальные подпространства [3]. Для этого воспользуемся разложением Г. Вейля пространства векторных полей $\vec{L}_2(\Omega)$ в ортогональную сумму (см. [3], с. 103):

$$\vec{L}_2(\Omega) = \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}_0(\Omega) \oplus \vec{G}_h(\Omega) =: \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}(\Omega), \tag{2.1}$$

$$\vec{J}_0(\Omega) := \{\vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega) | \quad \mathrm{div}\vec{v} = 0 \text{ (в } \Omega), \quad v_n := \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \text{ (на } S)\},$$

$$\vec{G}_0(\Omega) := \{\vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega) | \quad \vec{v} = \nabla\Phi, \quad \Phi = 0 \text{ (на } S)\},$$

$$\vec{G}_h(\Omega) := \{\vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega) | \quad \vec{v} = \nabla\Phi, \quad \mathrm{div}\nabla\Phi = 0 \text{ (в } \Omega), \quad \int_S \Phi\, dS = 0\}.$$

Здесь операции $\mathrm{div}\vec{v}$ и v_n понимаются в смысле теории обобщенных функций (распределений), см. [3], с. 100-102. Введем ортопроекторы P_0 и P_G пространства $\vec{L}_2(\Omega)$ на $\vec{J}_0(\Omega)$ и $\vec{G}(\Omega)$ соответственно. Будем разыскивать поле $\vec{w}$ в виде:

$$\vec{w} = \vec{v} + \nabla\Phi, \quad \text{где} \quad \vec{v} \in \vec{J}_0(\Omega), \quad \nabla\Phi \in \vec{G}(\Omega). \tag{2.2}$$

Подставим представление (2.2) в первое уравнение из (1.3) и применим к его правой и левой частям ортопроекторы P_0 и P_G, отвечающие разложению (2.1). Получим:

$$\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial t^2} - 2\omega_0\frac{\partial}{\partial t}\Big[P_0(\vec{v}\times\vec{e}_3) + P_0(\nabla\Phi\times\vec{e}_3)\Big] = -g\rho_0^{-1}P_0(\rho\vec{e}_3) + P_0\vec{f} \quad \text{(в } \Omega), \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla\Phi - 2\omega_0\frac{\partial}{\partial t}\Big[P_G(\vec{v}\times\vec{e}_3) + P_G(\nabla\Phi\times\vec{e}_3)\Big] = -\rho_0^{-1}\nabla p - g\rho_0^{-1}P_G(\rho\vec{e}_3) + P_G\vec{f} \quad \text{(в } \Omega), \tag{2.4}$$

Подставим представление (2.2) во второе уравнение из (1.3) и граничное условие (1.4). Получим:

$$\rho = -\rho_0 \mathrm{div}\nabla\Phi \quad \text{(в } \Omega), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{(на } S). \tag{2.5}$$

С помощью соотношений (1.5) и (2.5) в уравнениях (2.3), (2.4) можно исключить функции $p(t,x)$, $\rho(t,x)$ и прийти к следующей задаче:

$$\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial t^2} - 2\omega_0\frac{\partial}{\partial t}\Big[P_0(\vec{v}\times\vec{e}_3) + P_0(\nabla\Phi\times\vec{e}_3)\Big] = gP_0(\vec{e}_3\,\mathrm{div}\nabla\Phi) + P_0\vec{f} \quad \text{(в } \Omega), \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla\Phi - 2\omega_0\frac{\partial}{\partial t}\Big[P_G(\vec{v}\times\vec{e}_3) + P_G(\nabla\Phi\times\vec{e}_3)\Big] = -\Big[-\nabla(a_\infty^2(x)\mathrm{div}\nabla\Phi)\Big] + \\ + \int_0^t \Big[-\nabla(K(t-s,x)\mathrm{div}\nabla\Phi)\Big]\,ds + gP_G(\vec{e}_3\,\mathrm{div}\nabla\Phi) + P_G\vec{f} \quad \text{(в } \Omega),\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{(на } S). \tag{2.8}$$

Начальные условия для уравнений (2.6), (2.7) имеют вид:

$$\vec{v}(0,x) = P_0\vec{w}^0(x) =: \vec{v}^0(x), \qquad \frac{\partial}{\partial t}\vec{v}(0,x) = P_0\vec{w}^1(x) =: \vec{v}^1(x), \tag{2.9}$$
$$\nabla\Phi(0,x) = P_G\vec{w}^0(x) =: \nabla\Phi^0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t}\nabla\Phi(0,x) = P_G\vec{w}^1(x) =: \nabla\Phi^1(x).$$

2.2. Вспомогательные операторы и их свойства

Для перехода к операторной формулировке задачи (2.6)-(2.9) введем ряд операторов и изучим их свойства. Введем гильбертово пространство $\mathcal{H} := \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}(\Omega)$, состоящее из пар $\xi := (\vec{v}; \nabla\Phi)^t$ (здесь символ t обозначает операцию транспонирования), где $\vec{v} \in \vec{J}_0(\Omega)$, $\nabla\Phi \in \vec{G}(\Omega)$. Скалярное произведение и норма в $\mathcal{H}$ определяются следующим образом:

$$(\xi_1, \xi_2)_{\mathcal{H}} := \int_\Omega (\vec{v}_1 \cdot \overline{\vec{v}_2} + \nabla\Phi_1 \cdot \overline{\nabla\Phi_2})\, d\Omega, \quad \|\xi\|^2_{\mathcal{H}} := \int_\Omega (|\vec{v}|^2 + |\nabla\Phi|^2)\, d\Omega.$$

Введем операторы $S_{1,1}$, $S_{1,2}$, $S_{2,1}$, $S_{2,2}$ и операторный блок $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S}\xi := \begin{pmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} \\ S_{2,1} & S_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \nabla\Phi \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} iP_0(\vec{v}\times\vec{e}_3) & iP_0(\nabla\Phi\times\vec{e}_3) \\ iP_G(\vec{v}\times\vec{e}_3) & iP_G(\nabla\Phi\times\vec{e}_3) \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Лемма 1. *Оператор $\mathcal{S}$ является самосопряженным и ограниченным в $\mathcal{H}$: $\mathcal{S} = \mathcal{S}^*$, $\mathcal{S} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$; более того, $\|\mathcal{S}\| = 1$. Спектр оператора $S_{1,1}$ существенный и заполняет отрезок $[-1,1]$: $\sigma(S_{1,1}) = \sigma_{ess}(S_{1,1}) = [-1,1]$ (здесь через $\sigma_{ess}(S_{1,1})$ обозначен существенный (предельный) спектр оператора $S_{1,1}$).*

Доказательство. Прежде всего, из [3], с.193-196 (см. также [13]) следует, что весь спектр оператора $S_{1,1}$ существенный и заполняет отрезок $[-1,1]$. Самосопряженность оператора $\mathcal{S}$ доказывается прямой проверкой. Из неравенства

$$|(\mathcal{S}\xi,\xi)_{\mathcal{H}}| \le \int_\Omega |\vec{v}+\nabla\Phi|^2\, d\Omega = \int_\Omega (|\vec{v}|^2 + |\nabla\Phi|^2)\, d\Omega = \|\xi\|^2_{\mathcal{H}}, \tag{2.11}$$

где по пути было использовано свойство ортогональности $\vec{v}$ и $\nabla\Phi$ как элементов пространств $\vec{J}_0(\Omega)$ и $\vec{G}(\Omega)$, получаем, что $\|\mathcal{S}\| \le 1$; поскольку $\|S_{1,1}\| = 1$, то и для операторного блока $\mathcal{S}$ имеет место равенство $\|\mathcal{S}\| = 1$. $\square$

Будем считать далее, что функции $a^2_\infty(x)$ и $K(t,x)$ непрерывно дифференцируемы по пространственным переменным, а граница S области Ω — класса C^2.

Определение 1. (см. [7], с.132) Пусть A — самосопряженный, положительно определенный оператор в гильбертовом пространстве $\vec{G}(\Omega)$, а H_A — его энергетическое пространство (со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_A$). Обобщенным решением уравнения $A\nabla\Phi = \nabla q$, где $\nabla q \in \vec{G}(\Omega)$ будем называть элемент $\nabla\Phi$, минимизирующий в H_A функционал $F(\nabla\Phi) := (\nabla\Phi, \nabla\Phi)_A - 2(\nabla q, \nabla\Phi)_{\vec{G}(\Omega)}$.

Лемма 2. *Введем пространство*

$$H_A := \{\nabla\Phi \in \vec{W}_2^1(\Omega) | \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \ (\text{на } S), \quad \int_S \Phi \, dS = 0\}$$

со скалярным произведением и нормой следующего вида:

$$(\nabla\Phi_1, \nabla\Phi_2)_A := \int_\Omega a_\infty^2(x)\mathrm{div}\nabla\Phi_1\mathrm{div}\nabla\Phi_2 \, d\Omega, \quad \|\nabla\Phi\|_A^2 := \int_\Omega a_\infty^2(x)|\mathrm{div}\nabla\Phi|^2 \, d\Omega.$$

Пространство H_A является гильбертовым; оно компактно вложено в пространство $\vec{G}(\Omega)$: $H_A \subset\!\!\to\subset\!\!\to \vec{G}(\Omega)$. Порождающий оператор A гильбертовой пары $(H_A; \vec{G}(\Omega))$, являющийся самосопряженным и положительно определенным в $\vec{G}(\Omega)$, обладает дискретным спектром. Для каждого поля $\nabla q \in \vec{G}(\Omega)$ существует и единственно обобщенное (в смысле определения 1) решение задачи

$$-\nabla(a_\infty^2(x)\mathrm{div}\nabla\Phi) = \nabla q \ \ (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \ \ (\text{на } S), \quad \int_S \Phi \, dS = 0, \tag{2.12}$$

выражаемое формулой $\nabla\Phi = A^{-1}\nabla q$.

Доказательство. Покажем, что H_A гильбертово пространство. Для каждого поля $\nabla\Phi$ из H_A можно вывести следующее неравенство:

$$\|\nabla\Phi\|_{H_A} \leq \Big(\max_{x\in\Omega} a_\infty^2(x)\Big)^{1/2} \|\nabla\Phi\|_{\vec{W}_2^1(\Omega)}. \tag{2.13}$$

Выведем теперь противоположное неравенство, которое вместе с (2.13) обеспечит эквивалентность указанных норм. Для этого понадобятся некоторые вспомогательные факты.

Представим $\nabla\Phi = \nabla\Phi_0 + \nabla\Phi_h$, где $\nabla\Phi_0 \in \vec{G}_0(\Omega)$, $\nabla\Phi_h \in \vec{G}_h(\Omega)$ (см. разложение Г. Вейля (2.1)). Из [5], с. 216 известна оценка оператора Лапласа от функций $\Phi_0 \in W_2^2(\Omega)$ с условием $\Phi_0 = 0$ на границе $\partial\Omega = S$, которую можно представить в следующей форме:

$$\int_\Omega |\Delta\Phi_0|^2 \, d\Omega \geq k\|\Phi_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} \geq k\|\nabla\Phi_0\|^2_{\vec{W}_2^1(\Omega)} \tag{2.14}$$

с положительной константой k, которая не зависит от поля $\nabla\Phi_0$.

Используя неравенство (2.14) и разложение для поля $\nabla\Phi$, можно провести следующую оценку нормы:

$$\|\nabla\Phi\|_A^2 \geq k \min_{x\in\Omega} a_\infty^2(x) \|\nabla\Phi_0\|^2_{\vec{W}_2^1(\Omega)}. \tag{2.15}$$

Введем оператор $\gamma\nabla\Phi := \nabla\Phi \cdot \vec{n} = \partial\Phi/\partial n$ (на S), взятия нормального следа поля $\nabla\Phi$ на границе S. Этот оператор ограничено действуют из $\vec{W}_2^1(\Omega) \cap \vec{G}(\Omega)$ в $H^{1/2}(S)$ (см. [3], с 102): $\gamma \in \mathcal{L}(\vec{W}_2^1(\Omega) \cap \vec{G}(\Omega), H^{1/2}(S))$.

Определим оператор C по закону $C\partial\Phi/\partial n|_S = \Phi|_S$. Известно (см.[3], с 44, а также [6]), что для областей с гладкой границей оператор C ограниченно действует из $H^{1/2}(S)$ в $H^{3/2}(S)$.

Наконец, введем оператор G, восстанавливающий $\nabla\Phi_h$ по следу потенциала Φ_h на границе S. Этот оператор взаимно сопряжен с оператором γ (точнее, с сужением оператора γ на $\vec{G}_h(\Omega)$ и относительно скалярного произведения в $L_{2,S} := L_2(S) \ominus \{1_S\}$) и действует ограниченно из $H_S^{3/2}$ в $\vec{W}_2^1(\Omega) \cap \vec{G}_h(\Omega)$.

Рассмотрим теперь произвольный элемент $\nabla\Phi \in H_A$. Из определения пространства H_A, разложения для поля $\nabla\Phi$ и приведенных выше фактов следует, что

$$\nabla\Phi_h = -GC\gamma\nabla\Phi_0, \quad \|\nabla\Phi_h\|^2_{\vec{W}_2^1(\Omega)} \le \|GC\gamma\|^2 \|\nabla\Phi_0\|^2_{\vec{W}_2^1(\Omega)}. \qquad (2.16)$$

Из (2.15), (2.16) для каждого элемента $\nabla\Phi \in H_A$ следует оценка:

$$\|\nabla\Phi\|_A^2 \ge 2^{-1} k \min_{x\in\Omega} a_\infty^2(x) \|\nabla\Phi_0\|^2_{\vec{W}_2^1(\Omega)} + 2^{-1}\|GC\gamma\|^{-2} k \min_{x\in\Omega} a_\infty^2(x)\|\nabla\Phi_h\|^2_{\vec{W}_2^1(\Omega)} \ge$$
$$\ge 4^{-1} k \min_{x\in\Omega} a_\infty^2(x)\cdot \min\{1, \|GC\gamma\|^{-2}\}\|\nabla\Phi\|^2_{\vec{W}_2^1(\Omega)}. \qquad (2.17)$$

Из (2.13), (2.17) получаем, что H_A — гильбертово пространство.

Множество потенциальных полей с бесконечно дифференцируемыми финитными в области Ω потенциалами плотно в $\vec{G}_0(\Omega)$. Отсюда и из однозначной связи полей из $\vec{G}_h(\Omega)$ со значениями своих нормальных следов на границе S следует, что H_A является плотным множеством в $\vec{G}(\Omega)$. Из неравенства (2.17), с учетом того, что $\|\nabla\Phi\|_{\vec{G}(\Omega)} \le \|\nabla\Phi\|_{\vec{W}_2^1(\Omega)}$ для каждого $\nabla\Phi \in \vec{W}_2^1(\Omega)\cap\vec{G}(\Omega)$, следует, что H_A и $\vec{G}(\Omega)$ образуют гильбертову пару $(H_A; \vec{G}(\Omega))$.

Найдем порождающий оператор A гильбертовой пары $(H_A; \vec{G}(\Omega))$; он определяется из тождества (см. [3], с. 33)

$$(A\nabla\Phi_1, \nabla\Phi_2)_{\vec{G}(\Omega)} = (\nabla\Phi_1, \nabla\Phi_2)_A, \quad \nabla\Phi_1 \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^{1/2}) = H_A, \quad \nabla\Phi_2 \in H_A. \qquad (2.18)$$

Для дважды дифференцируемого поля $\nabla\Phi_1$, с использованием формулы Грина для оператора Лапласа, тождество (2.18) можно преобразовать следующим образом:

$$(A\nabla\Phi_1, \nabla\Phi_2)_{\vec{G}(\Omega)} = \int_\Omega A\nabla\Phi_1 \cdot \nabla\Phi_2 \, d\Omega = \int_\Omega a_\infty^2 \mathrm{div}\nabla\Phi_1 \mathrm{div}\nabla\Phi_2 \, d\Omega =$$
$$= -\int_\Omega \nabla(a_\infty^2 \mathrm{div}\nabla\Phi_1)\cdot\nabla\Phi_2\, d\Omega + \int_S a_\infty^2 \Delta\Phi_1 \frac{\partial\Phi_2}{\partial n}\, dS = -\int_\Omega \nabla(a_\infty^2\mathrm{div}\nabla\Phi_1)\cdot\nabla\Phi_2\, d\Omega =$$
$$= (-\nabla(a_\infty^2 \mathrm{div}\nabla\Phi_1), \nabla\Phi_2)_{\vec{G}(\Omega)}. \qquad (2.19)$$

Отсюда следует, что дважды дифференцируемое решение уравнения $A\nabla\Phi_1 = \nabla q$ является решением задачи

$$-\nabla(a_\infty^2(x)\mathrm{div}\nabla\Phi_1) = \nabla q \ \ (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = 0 \ \ (\text{на } S), \quad \int_S \Phi \, dS = 0.$$

Эта задача имеет единственное обобщенное (в смысле определения 1) решение $\nabla\Phi_1 = A^{-1}\nabla q$ для каждого поля $\nabla q \in \vec{G}(\Omega)$.

Из неравенств (2.13) и компактности вложения пространства $\vec{W}_2^1(\Omega)$ в $\vec{L}_2(\Omega)$ следует компактность вложения H_A в пространство $\vec{G}(\Omega)$: $H_A \subset\to\subset\to \vec{G}(\Omega)$. Это влечет компактность оператора A^{-1}, а значит оператор A обладает дискретным спектром. $\square$

Аналогично оператору A введем оператор-функцию $K(t)$, как порождающий оператор гильбертовой пары $(H_{K(t)}; \vec{G}(\Omega))$, где

$$H_{K(t)} := \{\nabla\Phi \in \vec{W}_2^1(\Omega) \mid \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \text{ (на } S), \quad \int_S \Phi\, dS = 0\},$$

$$(\nabla\Phi_1, \nabla\Phi_2)_{K(t)} := \int_\Omega K(t,x)\mathrm{div}\nabla\Phi_1 \mathrm{div}\nabla\Phi_2\, d\Omega, \quad \|\nabla\Phi\|^2_{K(t)} := \int_\Omega K(t,x)|\mathrm{div}\nabla\Phi|^2\, d\Omega.$$

При этом H_A и $H_{K(t)}$ поэлементно совпадают, а $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(K(t))$ для каждого $t \geq 0$.

Определим операторы B_0 и B_G следующим образом:

$$B_0\nabla\Phi := P_0(\vec{e}_3\mathrm{div}\nabla\Phi), \quad B_G\nabla\Phi := P_G(\vec{e}_3\mathrm{div}\nabla\Phi), \quad \mathcal{D}(B_0) = \mathcal{D}(B_G) = H_A. \quad (2.20)$$

О свойствах операторов B_0 и B_G говорит следующая лемма.

Лемма 3. *Для операторов B_0 и B_G выполнены свойства*

$$B_0A^{-1/2} =: Q_0 \in \mathcal{L}(\vec{G}(\Omega), \vec{J}_0(\Omega)), \quad B_GA^{-1/2} =: Q_G \in \mathcal{L}(\vec{G}(\Omega)). \quad (2.21)$$

Доказательство. Пусть $\nabla\Phi$ — произвольный элемент из $\mathcal{D}(B_0) = H_A$, тогда

$$\|B_0\nabla\Phi\|^2_{\vec{J}_0(\Omega)} \leq \|\vec{e}_3\mathrm{div}\nabla\Phi\|^2_{\vec{J}_0(\Omega)} \leq \Big(\min_{x\in\Omega} a^2_\infty(x)\Big)^{-1}\|A^{1/2}\nabla\Phi\|^2_{\vec{G}(\Omega)}.$$

Отсюда, после замены $A^{1/2}\nabla\Phi = \nabla\Psi$, следует, что $B_0A^{-1/2} \in \mathcal{L}(\vec{G}(\Omega), \vec{J}_0(\Omega))$. Аналогично доказывается, что $B_GA^{-1/2} \in \mathcal{L}(\vec{G}(\Omega))$. $\square$

2.3. Переход к операторному уравнению

С использованием введенных операторов задачу (2.6)-(2.9) запишем в виде задачи Коши для интегродифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}(\Omega)$:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + 2\omega_0 i\mathcal{S}\frac{d\xi}{dt} = -\mathcal{Q}\mathcal{A}\xi + \int_0^t \mathcal{K}(t-s)\xi(s)\, ds + \mathcal{F}(t), \quad \xi(0) = \xi^0, \quad \xi'(0) = \xi^1. \quad (2.22)$$

Здесь введены следующие обозначения: $\mathcal{A} := \mathrm{diag}(I, A)$, $\mathcal{K}(t) := \mathrm{diag}(0, K(t))$,

$$\mathcal{Q} := \begin{pmatrix} 0 & -gQ_0A^{-1/2} \\ 0 & I - gQ_GA^{-1/2} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}(t) := (P_0\vec{f}(t); P_G\vec{f}(t))^t,$$

$$\xi(0) = \xi^0 := (\vec{v}^0; \nabla\Phi^0)^t = (P_0\vec{w}^0; P_G\vec{w}^0)^t,$$

$$\xi'(0) = \xi^1 := (\vec{v}^1; \nabla\Phi^1)^t = (P_0\vec{w}^1; P_G\vec{w}^1)^t.$$

Таким образом, если $\vec{w}$, ρ, ∇p — такое решение задачи (1.3)-(1.6) о малых движениях вращающейся идеальной релаксирующей жидкости в ограниченной области, что все проведенные до сих пор рассуждения законны, тогда функция ξ является решением задачи Коши для интегродифференциального уравнения второго порядка (2.22).

Дадим следующее определение.

Определение 2. Назовем сильным решением исходной начально-краевой задачи (1.3)-(1.6) такие функции $\vec{w}$, ρ, ∇p для которых функция ξ является сильным решением задачи Коши (2.22). В свою очередь сильным решением задачи Коши (2.22) (см. [4], с. 291) назовем функцию $\xi(t)$ такую, что $\xi(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, $\xi'(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2})$ для любого t из $\mathbb{R}_+$, $\mathcal{A}\xi(t)$, $\mathcal{A}^{1/2}\xi'(t) \in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{H})$, $\xi(t) \in C^2(\mathbb{R}_+;\mathcal{H})$, выполнены начальные условия и уравнение из (2.22) для любого $t \in \mathbb{R}_+ := [0,+\infty)$.

3. О разрешимости начально-краевой задачи

3.1. Исследование интегродифференциального уравнения второго порядка

Осуществим в задаче (2.22) замену $\mathcal{A}^{1/2}\xi(t) = \eta'(t)$, $\eta(0) = 0$ и преобразуем ее к системе двух уравнений с начальными условиями:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} = -2\omega_0 i\mathcal{S}\dfrac{d\xi}{dt} - \mathcal{Q}\mathcal{A}^{1/2}\dfrac{d\eta}{dt} + \displaystyle\int_0^t \mathcal{K}(t-s)\mathcal{A}^{-1/2}\dfrac{d\eta(s)}{ds}\,ds + \mathcal{F}(t), \\ \dfrac{d^2\eta}{dt^2} = \mathcal{A}^{1/2}\dfrac{d\xi}{dt}, \qquad \xi'(0) = \xi^1, \quad \eta'(0) = \mathcal{A}^{1/2}\xi^0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Прямыми вычислениями проверяется, что

$$\mathcal{Q}\mathcal{A}^{1/2} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A^{1/2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -I & -gQ_0 \\ 0 & -gQ_G \end{pmatrix} =: \mathcal{A}^{1/2} + \mathcal{R},$$

$$\mathcal{K}(t)\mathcal{A}^{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K(t)A^{-1/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K(t)A^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A^{1/2} \end{pmatrix} =: \mathcal{K}_b(t)\mathcal{A}^{1/2},$$

где $\mathcal{R} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ и $\mathcal{K}_b(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ при каждом $t \in \mathbb{R}_+$. С использованием проведенных преобразований запишем систему (3.1) в виде одного интегродифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^{(2)} := \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$:

$$\frac{dy}{dt} = \widehat{\mathcal{A}}y + \widehat{\mathcal{R}}y + \int_0^t \widehat{\mathcal{K}}(t-s)\widehat{\mathcal{C}}y(s)\,ds + \widehat{\mathcal{F}}(t), \quad y(0) = y^0. \tag{3.2}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\widehat{\mathcal{A}} := \begin{pmatrix} -2\omega_0 i\mathcal{S} & -\mathcal{A}^{1/2} \\ \mathcal{A}^{1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathcal{R}} := \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{R} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathcal{K}}(t) := \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{K}_b(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\widehat{\mathcal{C}} := \mathrm{diag}(0, \mathcal{A}^{1/2}), \quad y := (\xi'; \eta')^t, \quad y^0 := (\xi^1; \mathcal{A}^{1/2}\xi^0)^t, \quad \widehat{\mathcal{F}}(t) := (\mathcal{F}(t); 0)^t;$$

при этом $\widehat{\mathcal{R}} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^{(2)})$ и $\widehat{\mathcal{K}}(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^{(2)})$ при каждом $t \in \mathbb{R}_+$, а области определения операторов $\widehat{\mathcal{A}}$ и $\widehat{\mathcal{C}}$, очевидно, связаны включением $\mathcal{D}(\widehat{\mathcal{A}}) \subset \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{C}})$.

Определение 3. (см. [4], с. 38) Сильным решением задачи Коши (3.2) назовем функцию $y(t)$ такую, что $y(t) \in \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{A}})$ для любого t из $\mathbb{R}_+$, $\widehat{\mathcal{A}}y(t) \in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^{(2)})$, $y(t) \in C^1(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^{(2)})$, $y(0) = y^0$ и выполнено уравнение из (3.2) для любого $t \in \mathbb{R}_+$.

Относительно разрешимости задачи Коши (3.2) справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть $\widehat{\mathcal{K}}(t) \in C^1(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathcal{H}^{(2)}))$, $\widehat{\mathcal{F}}(t) \in C^1(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^{(2)})$, тогда для любого $y^0 \in \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{A}})$ существует и единственно сильное решение задачи Коши* (3.2).

Доказательство. Оператор $\widehat{\mathcal{A}}$ может быть представлен в форме $\widehat{\mathcal{A}} = i\mathcal{B}$, где $\mathcal{B}$ — самосопряженный оператор, поэтому $\widehat{\mathcal{A}}$ — генератор сильно непрерывной полугруппы унитарных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^{(2)}$, которая может быть продолжена до группы унитарных операторов (см. [4], с. 111, теорема 4.7). Оператор $\widehat{\mathcal{R}}$ ограничен в $\mathcal{H}^{(2)}$, поэтому $\widehat{\mathcal{A}} + \widehat{\mathcal{R}}$ — генератор сильно непрерывной угруппы операторов в $\mathcal{H}^{(2)}$ (см. [4], с. 185, теорема 7.5). Отсюда следует, что существует $\lambda_0 \in \rho(\widehat{\mathcal{A}} + \widehat{\mathcal{R}})$. Осуществим в задаче Коши (3.2) замену $y(t) = \exp(\lambda_0 t)z(t)$. Получим

$$\frac{dz}{dt} = \widehat{\mathcal{B}}z + \int_0^t \widehat{\mathcal{K}}_0(t-s)\widehat{\mathcal{C}}z(s)\,ds + \widehat{\mathcal{F}}_0(t), \quad z(0) = y^0, \tag{3.3}$$

где $\widehat{\mathcal{B}} := \widehat{\mathcal{A}} + \widehat{\mathcal{R}} - \lambda_0\widehat{\mathcal{I}}$, $\widehat{\mathcal{K}}_0(t) := \exp(-\lambda_0 t)\widehat{\mathcal{K}}(t)$, $\widehat{\mathcal{F}}_0(t) := \exp(-\lambda_0 t)\widehat{\mathcal{F}}(t)$. Оператор $\widehat{\mathcal{B}}$ снова является генератором сильно непрерывной группы $\mathcal{U}(t) := \exp(t\widehat{\mathcal{B}})$ в $\mathcal{H}^{(2)}$, при этом $\mathcal{D}(\widehat{\mathcal{B}}) \subset \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{C}})$, $\widehat{\mathcal{B}}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^{(2)})$. Из условий теоремы следует, что $\widehat{\mathcal{K}}_0(t) \in C^1(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathcal{H}^{(2)}))$, $\widehat{\mathcal{F}}_0(t) \in C^1(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^{(2)})$. Очевидно, что из однозначной сильной разрешимости задачи (3.3) следует разрешимость задачи Коши (3.2). Дальнейшее доказательство следует идеям из монографии [11].

Предположим теперь, что $y^0 \in \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{A}})$ и задача Коши (3.3) имеет сильное решение $z(t)$. Тогда

$$\begin{aligned} z(t) = \mathcal{U}(t)y^0 + \int_0^t \mathcal{U}(t-s)\widehat{\mathcal{F}}_0(s)\,ds + \int_0^t \mathcal{U}(t-s)\left\{\int_0^s \widehat{\mathcal{K}}_0(s-\tau)\widehat{\mathcal{C}}z(\tau)\,d\tau\right\}ds = \\ = \mathcal{U}(t)y^0 + \int_0^t \mathcal{U}(t-s)\widehat{\mathcal{F}}_0(s)\,ds + \int_0^t d\tau \int_\tau^t \mathcal{U}(t-s)\widehat{\mathcal{K}}_0(s-\tau)\widehat{\mathcal{C}}z(\tau)\,ds. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Преобразуем внутренний интеграл в (3.4). Оператор $\widehat{\mathcal{B}}$ непрерывно обратим, поэтому, в силу условий $z(\tau) \in \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{B}}) \subset \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{C}})$ и $\widehat{\mathcal{K}}_0(t) \in C^1(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathcal{H}^{(2)}))$, существует частная производная:

$$\frac{\partial}{\partial s}\Big(\mathcal{U}(t-s)\widehat{\mathcal{B}}^{-1}\widehat{\mathcal{K}}_0(s-\tau)\widehat{\mathcal{C}}z(\tau)\Big) = -\mathcal{U}(t-s)\widehat{\mathcal{K}}_0(s-\tau)\widehat{\mathcal{C}}z(\tau) + \mathcal{U}(t-s)\widehat{\mathcal{B}}^{-1}\frac{\partial}{\partial s}\widehat{\mathcal{K}}_0(s-\tau)\widehat{\mathcal{C}}z(\tau).$$

Проинтегрируем это соотношение по s в пределах от τ до t:

$$\int_\tau^t \mathcal{U}(t-s)\widehat{\mathcal{K}}_0(s-\tau)\widehat{\mathcal{C}}z(\tau)\,ds = \widehat{\mathcal{B}}^{-1}\Big(-\widehat{\mathcal{K}}_0(t-\tau)\widehat{\mathcal{C}}z(\tau)+\mathcal{U}(t-\tau)\widehat{\mathcal{K}}_0(0)\widehat{\mathcal{C}}z(\tau)+ \\ +\int_\tau^t \mathcal{U}(t-s)\frac{\partial}{\partial s}\widehat{\mathcal{K}}_0(s-\tau)\widehat{\mathcal{C}}z(\tau)\,ds\Big) =: \widehat{\mathcal{B}}^{-1}\widehat{\mathcal{K}}_1(t,\tau)z(\tau). \quad (3.5)$$

Из (3.4), (3.5) получаем, что сильное решение $z(t)$ задачи Коши (3.3) удовлетворяет следующему интегральному уравнению Вольтерра:

$$z(t) = \widehat{z}(t)+\int_0^t \widehat{\mathcal{B}}^{-1}\widehat{\mathcal{K}}_1(t,s)z(s)\,ds, \quad \text{где} \quad \widehat{z}(t) := \mathcal{U}(t)y^0+\int_0^t \mathcal{U}(t-s)\widehat{\mathcal{F}}_0(s)\,ds. \quad (3.6)$$

Здесь $\widehat{z}(t)$ решение задачи Коши (3.3) без интегрального слагаемого, поэтому $\widehat{z}(t) \in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{D}(\widehat{\mathcal{B}}))\cap C^1(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^{(2)})$.

Покажем, что уравнение (3.6) имеет единственное решение, которое и является сильным решением задачи Коши (3.3). Введем пространство $\mathcal{H}(\widehat{\mathcal{B}}) := (\mathcal{D}(\widehat{\mathcal{B}}), \|\cdot\|_{\widehat{\mathcal{B}}})$, где $\|z\|_{\widehat{\mathcal{B}}} := \|\widehat{\mathcal{B}}z\|$ для любого $z \in \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{B}}) = \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{A}})$. Известно, что $\mathcal{H}(\widehat{\mathcal{B}})$ — банахово пространство.

Из (3.5) следует, что $\widehat{\mathcal{B}}^{-1}\widehat{\mathcal{K}}_1(t,s) \in C(0\le s\le t<+\infty;\mathcal{L}(\mathcal{H}(\widehat{\mathcal{B}})))$. Таким образом получаем, что уравнение (3.6), рассматриваемое в $\mathcal{H}(\widehat{\mathcal{B}})$, является интегральным уравнением Вольтерра второго рода с непрерывным ядром. Отсюда и из включения $\widehat{z}(t) \in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}(\widehat{\mathcal{B}}))$ следует, что уравнение (3.6) имеет единственное решение $z(t) \in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}(\widehat{\mathcal{B}}))$.

Из включения $\widehat{z}(t) \in C^1(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^{(2)})$ получаем, что $z(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция со значениями в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^{(2)}$. Непосредственными вычислениями можно убедиться, что $z(t)$ удовлетворяет определению 3, и, таким образом, является единственным сильным решением задачи (3.3). Тогда $y(t) = \exp(\lambda_0 t)z(t)$ будет единственным сильным решением задачи (3.2). $\square$

3.2. О разрешимости начально-краевой задачи

Основываясь на теореме 1, изучим вопрос о сильных решениях задачи (1.3)-(1.6) о малых движениях вращающейся идеальной релаксирующей жидкости в ограниченной области.

Теорема 2. *Пусть ядро интегрального оператора Вольтерра $K(t,x)$ из* (1.5) *и векторное поле $\vec{f}(t,x)$ непрерывно дифференцируемы по переменной $t\in\mathbb{R}_+$ со значениями в $C^1(\overline{\Omega})$ и $\vec{L}_2(\Omega)$ соответственно, тогда для любых $\vec{w}^0(x)$ и $\vec{w}^1(x)$ таких, что*

$$P_0\vec{w}^0(x)\in\vec{J}_0(\Omega), \quad P_0\vec{w}^1(x)\in\vec{J}_0(\Omega), \quad P_G\vec{w}^0(x)\in\mathcal{D}(A), \quad P_G\vec{w}^1(x)\in\mathcal{D}(A^{1/2}), \quad (3.7)$$

существует и единственно сильное (в смысле определения 2) решение начально-краевой задачи (1.3)-(1.6).

Доказательство. Проверим, что при условиях настоящей теоремы выполнены все требования из теоремы 1. В самом деле, из (3.7) и (2.22) следует, что

$$\xi(0) = \xi^0 = (P_0\vec{w}^0; P_G\vec{w}^0)^t \in \vec{J}_0(\Omega) \oplus \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(\mathcal{A}),$$
$$\xi'(0) = \xi^1 = (P_0\vec{w}^1; P_G\vec{w}^1)^t \in \vec{J}_0(\Omega) \oplus \mathcal{D}(A^{1/2}) = \mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2}).$$

Тогда из (3.2) получаем $y(0) = y^0 = (\xi^1; \mathcal{A}^{1/2}\xi^0)^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2}) \oplus \mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2}) = \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{A}})$.

Далее, из (2.22) и условия $\vec{f}(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \vec{L}_2(\Omega))$ следует, что

$$\mathcal{F}(t) = (P_0\vec{f}(t); P_G\vec{f}(t))^t \in C^1(\mathbb{R}_+; \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}(\Omega)) = C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$$

в силу ограниченности операторов проектирования P_0 и P_G. Отсюда и из (3.2) тогда вытекает, что $\widehat{\mathcal{F}}(t) = (\mathcal{F}(t); 0)^t \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}^{(2)})$.

Наконец, из непрерывной дифференцируемости по времени ядра $K(t,x)$ интегрального оператора Вольтерра из (1.5) следует, что $\mathcal{K}_b(t) = \mathrm{diag}(0, K(t)A^{-1}) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{H}))$. Отсюда тогда получаем (см. (3.2)), что $\widehat{\mathcal{K}}(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{H}^{(2)}))$.

Таким образом, при условиях настоящей теоремы выполнены все требования теоремы 1. По теореме 1 задача Коши (3.2) (или, что то же, (3.1)) имеет единственное сильное на $\mathbb{R}_+$ решение $y(t) = (\xi'(t); \eta'(t))^t \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{A}})) \cap C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}^{(2)})$. Отсюда, после обратной замены $\xi(t) = \mathcal{A}^{-1/2}\eta'(t)$ в системе (3.1), получаем, что $\xi(t)$ есть единственное сильное (в смысле определения 2) решение задачи Коши (2.22). Это означает существование и единственность сильного решения исходной начально-краевой задачи (1.3)-(1.6). □

4. Заключение

Таким образом, в настоящей работе исследована задача о малых (линейных) движениях равномерно вращающегося твердого тела, заполненного идеальной релаксирующей жидкостью. Изучение соответствующей начально-краевой задачи с помощью операторных методов сведено к исследованию интегродифференциального операторного уравнения гиперболического типа в гильбертовом пространстве векторных полей с конечной кинетической энергией. На основе этого уравнения доказана теорема о существовании и единственности сильного (по времени) решения поставленной задачи.

Тут следует отметить, что примененный в работе подход к выводу операторного уравнения позволит в дальнейшем получить удобную форму для операторного пучка, связанного с задачей о нормальных колебаниях указанной гидросистемы.

Список цитируемых источников

1. *Закора Д.А.* Задача о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости // Динамические системы. — 2006. — Вып. 20. — С. 104–112.

2. *Копачевский Н.Д., Болгова Л.Д.* Модельная задача о малых движениях и нормальных колебаниях идеальной релаксирующей сжимаемой жидкости // Спектральные и эволюционные задачи. Тезисы докл. II Крымской осенней матем. школы-симпозиума (КРОМШ- II). — Симферополь-Ласпи — 1993. — С. 80–81.
3. *Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан* Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989. — 416 с.
4. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — Москва: Наука, 1967, — 464 с.
5. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — М.: Наука, 1973. — 576 с.
6. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971. — 372 с.
7. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. — М.: Мир, 1985. — 590 с.
8. *Azizov T.Ya., Kopachevsky N.D., Orlova (Bolgova) L.D.* Evolutional and Spectral Problems Generated by Problems on Small Movements of a Visco-Elastic or Relaxing Fluid // IWOTA 95, Final Programme and Book of Abstracts, Regensburg — 1995. — P. 40.
9. *Azizov T.Ya., Kopachevsky N.D., Orlova L.D.* Evolutionary and Spectral Problems Generated by a Problem on Small Movements of a Visco-Elastic or Relaxing Fluid // Proc. of the Nineth Crimean Autumn Math. School-Sympos. – Simferopol: Simferopol State University — 1999. — P. 60-86.
10. *Bolgova (Orlova) L.D., Kopachevsky N.D.* Boundary value problems on small oscillations of an ideal relaxing fluid and its generalizations // Спектральные и эволюционные задачи. Вып. 3: Тез. лекц. и докл. III Крымской осенней матем. школы-симпоз. Симферополь — 1994. — С. 41–42.
11. *Kopachevsky N.D., Krein S.G.* Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Nonself – adjoint Problems for Viscous Fluids. — Basel — Boston — Berlin: Birkhäuser Verlag, 2003, — 444 p. (Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 146.)
12. *Kopachevsky N.D., Orlova (Bolgova) L.D.* Equations Connected with the Problem of Small Oscillations of Relaxing Fluid // Spectral and Evolutional Problems. Proceedings of the Fourth Crimean Autumn Math. School-Symp. – Vol. 4: Simferopol State University — 1995. — P. 102–106.
13. *Ralston J.V.* On stationary modes in inviscid rotating fluids // J. Math. Analysis and Appl. — 1973. — V. 44. — P. 366–383.

Получена 10.04.2009