Динамические системы, том 2(30), №1-2(2012), 41–52

УДК 517.984

О свойствах линеаризованной задачи Маскета с учетом поверхностного натяжения и сил гравитации

В. И. Войтицкий

Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 95007. *E-mail: victor.voytitsky@gmail.com*

Аннотация. В статье с помощью теории самосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве изучаются свойства линеаризованной начально-краевой задачи Маскета. Данная задача описывает процесс фильтрации жидкости в пористой среде, находящейся вблизи равновесного состояния. Установлены достаточные условия существования единственного сильного решения эволюционной задачи на произвольном конечном промежутке времени. Доказано, что с учетом поверхностного натяжения спектр задачи является дискретным и вещественным. В случае корректной постановки он состоит из ветви положительных собственных значений с единственной предельной точкой на бесконечности, а также не более чем из конечного числа отрицательных и нулевых собственных значений. Система соответствующих собственных функций образует ортонормированный базис в некотором гильбертовом пространстве.

Ключевые слова: линеаризованная задача Маскета, оператор Стеклова, корректная задача Коши, генератор C_0–полугруппы, самосопряженный компактный оператор, вещественный дискретный спектр, ортонормированный базис.

1. Введение

Задачей Маскета называют обобщенную постановку нелинейной начально-краевой задачи со свободной границей, которая описывает процесса фильтрации жидкости в пористой среде (например, процесс вытеснения нефти из пласта). Впервые математическая модель данного процесса была предложена американским физиком M. Muskat в 1934 г. в [10]. В связи с прикладной направленностью данной задачи, ее исследованием занималось большое число математиков, начиная с середины прошлого столетия. Несколько видоизмененную математическую модель процесса фильтрации независимо получил в 1952 г. советский инженер Н.Н. Веригин [1]. Исторический обзор результатов можно найти, например в [11].

Точные математические результаты относительно существования и единственности решения общей классической постановки задачи Маскета были получены достаточно недавно (см., например, [13], [14]). При этом, наряду с классической постановкой задачи в последние годы исследуются свойства задачи с учетом поверхностного натяжения и гравитационных сил (см., например, [5]–[9]). Следует отметить, что классическая задача Маскета является приближенной моделью для несмешивающихся однородных жидкостей, корректность которой существенно зависит от наличия устойчивого состояния равновесия движущейся регулярной границы раздела. Из физических соображений (см. [7]) следует, что в классической модели устойчивость может наблюдаться лишь при выполнении ограничения на так называемый коэффициент мобильности, равный отношению динамических вязкостей жидкостей: $M = \dfrac{\mu_-}{\mu_+} \leq 1$ (более вязкая жидкость должна находиться сверху). При этом в моделях с учетом гравитационных сил и (или) поверхностного натяжения это условие можно немного ослабить (см. [8]).

Анализ полученных ранее результатов показывает, что в близи состояния равновесия на малых промежутках времени имеет смысл рассмотрение линеаризованной задачи Маскета, при этом следует ожидать, что ее свойства будут аналогичны свойствам соответствующей нелинейной задачи. Более того, можно рассматривать спектральную задачу, ассоциированную с линеаризованной начально-краевой задачей, т.е. искать решения зависящие от времени по закону $e^{-\lambda t}$. По-видимому, линеаризованные постановки задачи Маскета ранее не изучались.

В статье найдены достаточные условия существования и единственности сильного решения линеаризованной начально-краевой задачи Маскета. Показано, что с учетом поверхностного натяжения задача имеет полуограниченный спектр, который состоит из изолированных конечнократных вещественных собственных значений с единственной предельной точной $+\infty$. Если спектр строго положительный, то в задаче наблюдается асимптотическая устойчивость решений. Критическим является случай перехода минимального собственного значения через нуль. При этом решения могут стать неустойчивыми. Полученные результаты согласуются с физическим смыслом задачи, т.е. рассматриваемая линеаризация может являться математической моделью процесса вытеснения нефти из грунта (пористой среды) вблизи состояния равновесия.

2. Постановка нелинейной задачи и ее линеаризация

Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ $(m = 2, 3)$ занята двумя несмешивающимися вязкими жидкостями (например, водой и нефтью), которые перемещаются за счет подкачки жидкости внутри одной из областей (насосом накачивается вода для вытеснения нефти). Для корректности проводимых построений будем предполагать, что в каждый момент времени жидкость с большей плотностью (вода) занимает нижнюю подобласть $\Omega_-(t)$, а жидкость с меньшей плотностью (нефть) занимает верхнюю подобласть $\Omega_+(t)$, которые разделяются подвижной границей сопряжения $\Gamma(t)$, $t \geq 0$, находящейся вблизи равновесного состояния Γ (см. в качестве примера двумерный рисунок 1). Будем считать, что каждая из областей $\Omega_\pm(t)$ имеет липшицеву границу $\partial\Omega_\pm(t) = \Gamma(t) \cup S_\pm$, где $S_\pm$ — неподвижные твердые стенки ненулевой площади.

Введем в каждой из областей $\Omega_\pm(t)$ поля скоростей жидкостей $\vec{v}_\pm(x, t)$, а также поля динамических давлений $u_\pm(x, t)$ (поля отклонений давления от равновесных значений). В механике сплошных сред уравнение фильтрации описывается зако-

220, 130]Pic.bmp

Рис. 1. Области, занимаемые жидкостями

ном Дарси, который выводится из равенства сил, действующих на жидкости (см., например, [12]). Имеем,

$$\vec{v}_\pm = -\frac{k}{\mu_\pm}\nabla u_\pm + \vec{f}(x,t) \quad (\text{в } \Omega_\pm(t)). \tag{2.1}$$

Будем для простоты считать основные параметры задачи положительными константами: $\mu_\pm > 0$ — динамические вязкости жидкостей, $k > 0$ — коэффициенты проницаемости. Поле внешних сил $\vec{f}(x,t)$ считаем заданным. В первом приближении должны также выполняться уравнения неразрывности для полей $\vec{v}_\pm(x,t)$, т.е. $\operatorname{div}\vec{v}_\pm = 0$ (в $\Omega_\pm(t)$). Подставляя выражение для $\vec{v}_\pm$ из (2.1) в это соотношение, получаем уравнения для нахождения неизвестных полей давлений

$$\Delta u_\pm = F_\pm(x,t) \quad (\text{в } \Omega_\pm(t)), \qquad F_\pm(x,t) := \frac{\mu_\pm}{k}\operatorname{div}\vec{f}(x,t). \tag{2.2}$$

Положим далее $k_\pm := \dfrac{k}{\mu_\pm} > 0$. Будем считать для простоты, что жидкости имеют постоянные плотности $\rho_- > \rho_+ > 0$, а ускорение свободного падения $\vec{g} = -g\vec{e}_3$ направлено против координатной оси x_3. Обозначим скачок плотностей через $\Delta\rho := (\rho_- - \rho_+) > 0$. С учетом сил поверхностного натяжения равновесная поверхность Γ не может считаться плоской, ее нахождение является отдельной задачей, требующей дополнительного изучения (она находится из равенства давлений на границе раздела и условий Дюпре-Юнга на границе смачивания). Будем считать, что равновесная поверхность Γ найдена, тогда с учетом поверхностного натяжения и гравитации на движущейся поверхности раздела жидкостей из закона сохранения моментов и масс следуют условия

$$u_- - u_+ = -\sigma\mathcal{K}(x,t) + g\Delta\rho y \quad (\text{на } \Gamma(t)), \tag{2.3}$$
$$k_-\nabla u_-\cdot\vec{n}_t = k_+\nabla u_+\cdot\vec{n}_t = -V_n \quad (\text{на } \Gamma(t)). \tag{2.4}$$

Условие (2.3) означает, что на границе жидкостей скачок давлений компенсируется действием капиллярных сил, где $\sigma \geq 0$ — коэффициент поверхностного натяжения, $\mathcal{K}(x,t)$ — приращение суммы главных кривизн поверхности $\Gamma(t)$ в точке (x,t) по отношению к равновесному состоянию, y — отклонение поверхности $\Gamma(t)$ от равновесной Γ вдоль оси Ox_3. В условии (2.4) через $\vec{n}_t$ обозначен движущийся единичный вектор нормали к $\Gamma(t)$ (внешний к $\Omega_-(t)$) в момент времени t; V_n — скорость движения поверхности $\Gamma(t)$ вдоль нормали $\vec{n}_t$. К данным краевым условиям надо добавить краевые условия Дирихле или Неймана на $S_\pm$. Для определенности будем налагать условия Дирихле $u_\pm|_{S_\pm} = g_\pm(x,t)$. В качестве начальных условий достаточно задать поверхность $\Gamma(0)$, при этом начальные распределения давлений

$u_\pm\big|_{t=0}$ определяются данными задачи. Таким образом, получаем полную постановку нелинейной начально-краевой задачи Маскета. Вывод данных условий можно найти, например, в [12]. Частные случаи этой задачи рассматривались в [5] и [8].

Считая, что граница $\Gamma(t)$ является гладкой и меняется незначительно, от задачи в подвижных областях можно перейти к задаче в фиксированных областях $\Omega_\pm$, ограниченных твердыми стенками $S_\pm$ и равновесной поверхностью Γ. Для этого введем в окрестности Γ криволинейную систему координат $\widetilde{O}\xi_1\xi_2\xi_3$ так, чтобы поверхность Γ имела уравнение $\xi_3 = 0$ и координатные ξ_3-линии били направлены вдоль нормали $\vec{n}$ к Γ (внешней к Ω_-) с единичными коэффициентами Ламе. Тогда подвижную границу $\Gamma(t)$ можно определять с помощью введения вспомогательной функции $\zeta(x,t) = \xi_3$ $(x \in \Gamma)$, совпадающей с точностью до малых более высокого порядка с отклонением $\Gamma(t)$ вдоль нормали $\vec{n}$. Начальное положение $\Gamma(0)$ можно задать с помощью функции $\zeta^0(x) = \zeta(x,0)$ $(x \in \Gamma)$, при этом можно считать, что $V_n = \partial\zeta/\partial t$. Из геометрии известно (см., например, [2], с. 160, а также [4], с. 528), что с точностью до малых ζ более высокого порядка справедлива формула вариации суммы главных кривизн, из которой получаем:

$$\mathcal{K}(x,t)\big|_{\Gamma(t)} = \Delta_\Gamma\zeta + \sum_{k=1}^{m-1}\mathcal{K}_{0k}^2(x)\zeta, \quad x \in \Gamma, \tag{2.5}$$

где Δ_Γ — оператор Лапласа-Бельтрами, заданный на Γ, $\mathcal{K}_{0k}^2(x)$ — квадраты главных кривизн поверхности Γ. Из формулы Тейлора с точностью до малых ζ более высокого порядка имеем

$$u_\pm\big|_{\Gamma(t)} = u_\pm(x,t) + \frac{\partial u_\pm^0}{\partial n}(x)\zeta =: u_\pm(x,t) + \varphi_\pm(x)\zeta, \quad x \in \Gamma. \tag{2.6}$$

Здесь и далее функции $\varphi_\pm(x) := \dfrac{\partial u_\pm^0}{\partial n}(x)$, $x \in \Gamma$, будем считать заданными непрерывными функциями.

С учетом описанных преобразований исходная нелинейная постановка сводится к исследованию следующей линейной начально-краевой задачи:

$$\Delta u_\pm(x,t) = F_\pm(x,t), \qquad x \in \Omega_\pm, \tag{2.7}$$

$$u_-(x,t) - u_+(x,t) = B(\sigma)\zeta(x,t), \quad x \in \Gamma, \tag{2.8}$$

$$k_-\frac{\partial u_-}{\partial n}(x,t) = k_+\frac{\partial u_+}{\partial n}(x,t) = -\frac{\partial \zeta}{\partial t}(x,t), \quad x \in \Gamma, \tag{2.9}$$

$$u_\pm(x,t) = g_\pm(x,t), \quad x \in S_\pm, \qquad \zeta(x,0) = \zeta^0(x), \qquad x \in \Gamma, \tag{2.10}$$

где через $B(\sigma)$ в (2.8) обозначено дифференциальное выражение

$$B(\sigma)\zeta := -\sigma\Delta_\Gamma\zeta - \sigma\sum_{k=1}^{m-1}\mathcal{K}_{0k}^2(x)\zeta + [\varphi_+(x) - \varphi_-(x)]\zeta + g\Delta\rho\cos(\vec{n}\cdot\vec{e}_3)\zeta. \tag{2.11}$$

В последнем слагаемом $\cos(\vec{n}\cdot\vec{e}_3)\zeta$ является проекцией перемещения границы на ось Ox_3. В данной постановке неизвестными являются функции $u_\pm(x,t)$, заданные в фиксированных областях $\Omega_\pm$, а также функция $\zeta(x,t)$, заданная на Γ. Поскольку жидкости являются вязкими, из условий прилипания к твердым стенкам следует, что $\zeta|_{\partial\Gamma}=0$. Данное условие необходимо добавить к условиям (2.7)–(2.10), чтобы постановка задачи была корректной (отметим, что условие сохранения объема в данной модели вообще говоря не выполняется). Кроме этого, в силу условия (2.9) функции $\varphi_\pm$ должны быть связаны условием согласования $k_-\varphi_-(x)=k_+\varphi_+(x)$. Отсюда следует, что

$$\varphi_-(x)=\frac{k_+}{k_-}\varphi_+(x)=\frac{\mu_-}{\mu_+}\varphi_+(x)=:M\varphi_+(x). \tag{2.12}$$

3. Операторная постановка задачи

Зададим сначала на основе дифференциального выражения (2.11) линейный оператор в $L_2(\Gamma)$. Будем рассматривать его на области определения

$$D(B(\sigma))=H_0^2(\Gamma):=\{\zeta\in H^2(\Gamma):\ \zeta|_{\partial\Gamma}=0\}. \tag{3.1}$$

Лемма 1. *Если поверхность Γ является гладкой, то для $\sigma>0$ дифференциальное выражение (2.11) на области определения (3.1) задает самосопряженный ограниченный снизу оператор с дискретным спектром. Если при этом функция*

$$\beta(x):=-\sigma\sum_{k=1}^{m-1}\mathcal{K}_{0k}^2(x)+\varphi_+(x)(1-M)+g\Delta\rho\cos(\vec{n}\cdot\vec{e}_3)\geq 0,\quad x\in\Gamma, \tag{3.2}$$

то оператор $B(\sigma)$ является положительно определенным. При $\sigma=0$ оператор $B(\sigma)$ является самосопряженным ограниченным. При выполнении условия (3.2) он является неотрицательным, если же $\beta(x)\geq c>0,\ x\in\Gamma$, то оператор будет положительным. Если условие (3.2) не выполняется, то оператор $B(\sigma)$ имеет бесконечномерные положительные и отрицательные подпространства.

Доказательство. Известно, что на гладкой поверхности Γ оператор Лапласа-Бельтрами $-\Delta_\Gamma$, заданный на $H_0^2(\Gamma)$, является самосопряжённым положительно определённым оператором в $L_2(\Gamma)$. Так как Γ — ограниченное множество, то оператор умножения на непрерывную на Γ вещественную функцию $\beta(x)$ в $L_2(\Gamma)$ является ограниченным и самосопряжённым. Поэтому для всех положительных σ оператор $B(\sigma)$ заданный на $H_0^2(\Gamma)$ будет самосопряжённым ограниченным снизу. Очевидно, при $\beta(x)\geq 0$ он является положительно определенным.

При $\sigma=0$ оператор $B(\sigma)$ является самосопряженным ограниченным, как оператор умножения на вещественную ограниченную функцию $\beta(x)$. При выполнении условия (3.2) он, очевидно, является неотрицательным, если же это условие не выполнено, то в силу непрерывности функции $\beta(x)$, она принимает положительные и отрицательные значения на множествах ненулевой меры, отсюда следует, что квадратичная форма оператора $B(\sigma)$ принимает положительные и отрицательные значения на подпространствах бесконечной размерности. $\square$

Замечание 1. Отметим, что в случае классической постановки задачи Маскета, т.е. при $\sigma = 0,\ g = 0$, имеем $\beta(x) := \varphi_+(x)(1 - M)$. Из физических соображений следует, что $\varphi_+(x) > 0$ на Γ (граница раздела движется в сторону нефти, выталкивая ее из пласта). Отсюда следует, что оператор $B(\sigma)$ будет неотрицательным (задача является корректно поставленной, см. теорему 2 ниже) только в том случае, когда $M \leq 1$, что соответствует физическому смыслу этого параметра. Если $\sigma = 0$, но $g > 0$, то оператор $B(\sigma)$ может быть неотрицательным даже, если условие $M \leq 1$ не выполняется, поскольку функция $g\Delta\rho\cos(\vec{n}\cdot\vec{e}_3)$ является строго положительной на Γ (считаем, что $\Delta\rho > 0$).

Будем искать решение задачи (2.7)–(2.10) в виде суммы $u_\pm = v_\pm + z_\pm + w_\pm$, где $v_\pm$ являются решениями первой вспомогательной задачи

$$\Delta v_\pm(x,t) = F_\pm(x,t), \quad x \in \Omega_\pm, \tag{3.3}$$

$$k_-\frac{\partial v_-}{\partial n}(x,t) = k_+\frac{\partial v_+}{\partial n}(x,t) = 0, \quad x \in \Gamma, \tag{3.4}$$

$$v_\pm(x,t) = 0, \quad x \in S_\pm, \tag{3.5}$$

$z_\pm$ являются решениями второй вспомогательной задачи

$$\Delta z_\pm(x,t) = 0, \quad x \in \Omega_\pm, \tag{3.6}$$

$$k_-\frac{\partial z_-}{\partial n}(x,t) = k_+\frac{\partial z_+}{\partial n}(x,t) = 0, \quad x \in \Gamma, \tag{3.7}$$

$$z_\pm(x,t) = g_\pm(x,t), \quad x \in S_\pm, \tag{3.8}$$

а $w_\pm$ являются решениями третьей вспомогательной задачи

$$\Delta w_\pm(x,t) = 0, \quad x \in \Omega_\pm, \tag{3.9}$$

$$w_- + v_- + z_- - w_+ - v_+ - z_+ = B(\sigma)\zeta(x,t), \quad x \in \Gamma, \tag{3.10}$$

$$k_-\frac{\partial w_-}{\partial n}(x,t) = k_+\frac{\partial w_+}{\partial n}(x,t) = -\frac{\partial \zeta}{\partial t}(x,t), \quad x \in \Gamma, \tag{3.11}$$

$$w_\pm(x,t) = 0, \quad x \in S_\pm, \tag{3.12}$$

$$\zeta(x,0) = \zeta^0(x), \quad x \in \Gamma. \tag{3.13}$$

Задачи (3.3)–(3.5) и (3.6)–(3.8) имеют распадающиеся краевые условия и их решения несложно найти. Задача (3.3)–(3.5) равносильна двум операторным уравнениям в пространствах $L_2(\Omega_\pm)$:

$$\widetilde{A}_\pm v_\pm := \Delta v_\pm = F_\pm. \tag{3.14}$$

Известно, что операторы $\widetilde{A}_\pm$ на областях определения

$$D(\widetilde{A}_\pm) := \{v_\pm \in C^2(\Omega_\pm) : \ \frac{\partial v_\pm}{\partial n} = 0 \ (\text{на } \Gamma), \ v_\pm = 0 \ (\text{на } S_\pm)\} \tag{3.15}$$

являются симметрическими положительно определенными операторами в $L_2(\Omega_\pm)$. Они допускают расширения по Фридрихсу до самосопряженных положительно определенных операторов $A_\pm$ с сохранением нижней грани. Будем считать что области определения $D(A_\pm) \subset H^1(\Omega_\pm)$ найдены, тогда $R(A_\pm) = L_2(\Omega_\pm)$. Отсюда, если для каждого момента времени $t \geq 0$ функция $F_\pm(x,t) \in L_2(\Omega_\pm)$, то существует единственное обобщенное решение задачи (3.3)–(3.5): $v_\pm(x,t) = A^{-1}F_\pm(x,t)$ (см. [2], п. 1.3.2).

Задача (3.6)–(3.8) равносильна двум операторным уравнениям в пространстве $L_2(\Gamma)$:

$$z_\pm|_{S_\pm} := \gamma_{S_\pm} z_\pm = g_\pm(x,t). \tag{3.16}$$

Известно, что операторы следа $\gamma_{S_\pm}$ на часть границы $S_\pm$ взаимнооднозначно отображают подпространства гармонических функций $H^1_h(\Omega_\pm)$ на пространства $H^{1/2}(S_\pm)$. Более, того в гильбертовом пространстве $H^{1/2}(S_\pm)$ можно выбрать эквивалентную норму так, чтобы отображения являлись изометрическими (см., например, [2], п. 1.3.6). Задавая операторы $\gamma_{S_\pm}$ на более узких пространствах $D(\gamma_{S_\pm}) := \{z_\pm \in H^1_h(\Omega_\pm) : \ \ \partial z_\pm/\partial n = 0 \ (\text{ на } \Gamma)\}$, получаем изметрию между $D(\gamma_{S_\pm})$ и $R(\gamma_{S_\pm}) \subset H^{1/2}(S_\pm)$. Таким образом, если для каждого $t \geq 0$ функция $g_\pm(x,t) \in R(\gamma_{S_\pm})$, то существует единственное обобщенное решение задачи (3.6)–(3.8): $z_\pm(x,t) = \gamma^{-1}_{S_\pm} g_\pm(x,t)$.

Будем считать, что решения задач (3.3)–(3.5) и (3.6)–(3.8) найдены. Согласно (3.9) функции $w_\pm$ являются гармоническими. Для таких функций существует взаимнооднозначное соответствие между значением следа функции и нормальной производной на границе (см. [2], п. 3.3.3). С учетом выбора нормали $\vec{n}$ имеем

$$w_- = G_-(\frac{\partial w_-}{\partial n}), \quad w_+ = -G_+(\frac{\partial w_+}{\partial n}) \quad (\text{на } \Gamma), \tag{3.17}$$

где $G_\pm$ — положительные компактные операторы в $L_2(\Gamma)$ (операторы Стеклова). Отсюда краевое условие (3.10) можно записать в виде

$$G_-(\frac{\partial w_-}{\partial n}) + G_+(\frac{\partial w_+}{\partial n}) + f(x,t) = B(\sigma)\zeta \quad (\text{на } \Gamma), \tag{3.18}$$

$$f(x,t) := A_+^{-1}F_-|_\Gamma - A_-^{-1}F_+|_\Gamma + \gamma^{-1}_{S_-} g_-|_\Gamma - \gamma^{-1}_{S_+} g_+|_\Gamma. \tag{3.19}$$

Далее, с учетом (3.11) получаем

$$C\frac{\partial \zeta}{\partial t} + B(\sigma)\zeta = f(x,t) \quad (\text{на } \Gamma), \tag{3.20}$$

$$C := k_-^{-1}G_- + k_+^{-1}G_+. \tag{3.21}$$

Поскольку $k_{\pm}$ — положительные константы, то оператор C является положительным и компактным оператором в $L_2(\Gamma)$. Теми же свойствами, очевидно, обладает оператор $C^{1/2}$. Поскольку он коммутирует с оператором производной по времени, то после замены $C^{1/2}\zeta = \eta \in D(C^{-1/2}) \subset L_2(\Gamma)$ получаем

$$C^{1/2}\frac{\partial \eta}{\partial t} + B(\sigma)C^{-1/2}\eta = f(x,t) \quad (\text{на } \Gamma). \tag{3.22}$$

Будем предполагать, что элемент η таков, что $B(\sigma)C^{-1/2}\eta \in D(C^{-1/2})$, т.е. $\eta \in D(\mathcal{A})$, где $\mathcal{A} := C^{-1/2}B(\sigma)C^{-1/2}$. Тогда, действуя на обе части (3.22) оператором $C^{-1/2}$, получаем абстрактную задачу Коши в гильбертовом пространстве $L_2(\Gamma)$:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\mathcal{A}\eta + C^{-1/2}f(x,t), \tag{3.23}$$

$$\eta(0) = C^{1/2}\zeta(0) = C^{1/2}\zeta^0. \tag{3.24}$$

4. Свойства спектральной задачи

Согласно построений предыдущего пункта свойства линеаризованной задачи Маскета (2.7)–(2.10) определяются свойствами оператора $\mathcal{A}$. Если искать решения соответствующей однородной задачи в виде $\zeta(x,t) = e^{-\lambda t}\zeta(x)$, то из (3.20) получаем операторное соотношение

$$B(\sigma)\zeta = \lambda C\zeta, \quad \zeta(x) \in L_2(\Gamma). \tag{4.1}$$

Отсюда после замены $\eta = C^{1/2}\zeta$ получаем

$$\mathcal{A}\eta = C^{-1/2}B(\sigma)C^{-1/2}\eta = \lambda\eta, \quad \eta \in L_2(\Gamma). \tag{4.2}$$

После замыкания оператор $\mathcal{A}$ является самосопряженным неограниченным оператором в $L_2(\Gamma)$, отсюда его спектр может лежать только на действительной оси. Каждое собственное значение оператора $\mathcal{A}$ является декрементом затухания решения однородной задачи. Поэтому, в задаче будет наблюдаться асимптотическая устойчивость. Если все собственные значения положительны, если имеется хотя бы одно отрицательное собственное значение, то в задаче имеются неустойчивые решения. Критическому случаю (потере устойчивости) отвечает случай перехода минимального собственного значения через нуль.

Допустим сначала, что оператор $B(\sigma)$ имеет ограниченный обратный. Этот случай реализуется, когда $\sigma > 0$ и $\operatorname{Ker} B(\sigma) = \{0\}$, либо $\sigma = 0$ и $\beta(x) \geq c > 0$. Тогда существует оператор $\mathcal{A}^{-1} = C^{1/2}B(\sigma)^{-1}C^{1/2}$. Так как оператор $C^{1/2}$ компактен, то $\mathcal{A}^{-1}$ является компактным самосопряженным оператором. Число $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (4.2), поэтому имеем равносильную проблему

$$\mathcal{A}^{-1}\eta = \mu\eta, \quad \mu := 1/\lambda. \tag{4.3}$$

По теореме Гильберта-Шмидта задача (4.3) имеет спектр, состоящий из изолированных конечнократных собственных значений с предельной точкой в нуле, а из системы соответствующих собственных функций η_n можно составить ортонормированный базис в $L_2(\Gamma)$. Если оператор $B(\sigma)$ является положительным, то оператор $\mathcal{A}^{-1}$ положителен, т.е. все собственные значения задачи положительны. Если оператор $B(\sigma)$ является ограниченным снизу, то он может иметь конечное число отрицательных собственных значений. Несложно доказать, что количество отрицательных собственных значений у операторов $B(\sigma)$ и $\mathcal{A}^{-1}$ одинаковое. Таким образом, задача (4.2) имеет дискретный вещественный спектр, состоящий из ветви положительных собственных значений с предельной точкой $+\infty$ (оператор $B(\sigma)$ является положительным), либо из ветви положительных собственных значений и конечного числа отрицательных собственных значений (оператор $B(\sigma)$ ограничен снизу). При этом система собственных элементов $\zeta_n = C^{-1/2}\eta_n$ является ортогональным базисом в пространстве $L_2(\Gamma)$, нормированным по форме оператора C.

Пусть теперь оператор $B(\sigma)$ не имеет ограниченного обратного. В случае $\sigma > 0$ это реализуется только, если $B(\sigma)$ имеет конечномерное ядро $\operatorname{Ker} B(\sigma)$. Тогда, очевидно, оператор $\mathcal{A}$ имеет ядро той же размерности, т.е. задача (4.2) имеет конечнократное нулевое собственное значение. На подпространстве с конечным дефектом $L_2(\Gamma) \ominus \operatorname{Ker} B(\sigma)$ оператор $B(\sigma)$ имеет ограниченный обратный, поэтому на нем задача (4.2) снова сводится к проблеме вида (4.3) с теми же свойствами.

При $\sigma = 0$ оператор $B(\sigma) = \beta(x)I$. Случай $\beta(x) \geq c > 0$ был рассмотрен выше. Если допустить, что функция $\beta(x)$ принимает нулевые собственные значения, то спектральная задача существенно усложняется. В этом случае спектр оператора $\mathcal{A}$ существенно зависит от свойств функции $\beta(x)$ и области Γ. По-видимому, кроме дискретной части могут появляться куски непрерывного спектра и конечные предельные точки. Отметим, однако, что при $\beta(x) \geq 0$ оператор $-\mathcal{A}$ остается диссипативным, поскольку $\operatorname{Re}(-\mathcal{A}\eta, \eta) = -(B(\sigma)C^{-1/2}\eta, C^{-1/2}\eta) \leq 0$. Данное свойство нарушается, если есть хотя бы одна точка $x_0 \in \Gamma$, для которой $\beta(x) < 0$.

Теорема 1 (о спектральных свойствах линеаризованной задачи Маскета). *Спектр задачи* (2.7)–(2.10) *при любых параметрах задачи лежит на вещественной оси, а его локализация определяются свойствами оператора* $B(\sigma)$.

1°. *Если* $\sigma > 0$, *то при любой функции* $\beta(x)$ *задача имеет дискретный спектр* $\{\lambda_n\}$, *состоящий из изолированных конечнократных положительных собственных значений с единственной предельной точкой* $+\infty$, *а также, возможно, из конечного количества нулевых и отрицательных собственных значений, равных числу нулевых и отрицательных собственных значений оператора* $B(\sigma)$. *При этом система соответствующих собственных функций* $\{\zeta_n(x)\}$ *образует базис в пространстве* $L_2(\Gamma)$, *для которого выполняются условия ортогональности*

$$(B(\sigma)\zeta_n, \zeta_m) = \lambda_n(C\zeta_n, \zeta_m) = \lambda_n\delta_{nm}, \tag{4.4}$$

где δ_{nm} *— символ Кронекера. Если* $\beta(x) \geq 0$, *то все собственные значения являются положительными.*

2°. *Если $\sigma = 0$ и $\beta(x) \geq c > 0$, то выполняются те же свойства, при этом все собственные значения положительны.*

3°. *При $\sigma = 0$ и $\beta(x) \geq 0$ спектр может стать не дискретным, однако оператор $-\mathcal{A}$ является диссипативным.*

4°. *Если $\sigma = 0$ и существует хотя бы одна точка $x_0 \in \Gamma$ такая, что $\beta(x) < 0$, то оператор $-\mathcal{A}$ не является диссипативным.*

5. Изучение эволюционной задачи

Вернемся к изучению абстрактной задачи Коши (3.23)–(3.24). Согласно теореме 1 свойства оператора $\mathcal{A}$ целиком определяются свойствами оператора $B(\sigma)$. В зависимости от параметров задачи (см. лемму 1), можно выделить четыре главных случая.

1. Оператор $\mathcal{A}$ является положительно определенным (выполнены условия $\sigma > 0$, $\beta(x) \geq 0$ или $\sigma = 0$, $\beta(x) \geq c > 0$). В этом случае (см. [3], с. 104) мы имеем абстрактное параболическое уравнение со сжимающей аналитической C_0-полугруппой $U(t)$: $\|U(t)\| \leq e^{-\gamma t}$, $t \geq 0$, где $\gamma > 0$ — минимальное собственное значение оператора $\mathcal{A}$. Отсюда любое решение однородной задачи при $t \to +\infty$ сходится к асимптотически устойчивому нулевому решению. При этом неоднородная задача является равномерно корректной задачей Коши (см. [3], п. 1.6), имеющей сильное решение на произвольном отрезке времени $[0; T]$:

$$\eta(t) = U(t)C^{1/2}\zeta^0 + \int_0^t U(t-s)C^{-1/2}f(x,t)\,ds, \tag{5.1}$$

при выполнении условий

$$C^{1/2}\zeta^0 \in D(\mathcal{A}), \quad C^{-1/2}f(x,t) \in C^\alpha([0;T], L_2(\Gamma)). \tag{5.2}$$

Последнее означает, что функция $C^{-1/2}f(x,t)$ для каждого $t \in [0;T]$ принадлежит классу Гёльдера порядка $\alpha > 0$ со значениями в $L_2(\Gamma)$.

2. Задача остается корректной и имеет сжимающую C_0-полугруппу, если оператор $\mathcal{A}$ является неотрицательным (оператор $B(\sigma)$ неотрицательный). В этом случае любое решение однородной задачи является устойчивым, однако может не быть асимптотически устойчивым (данный случай реализуется при $\sigma > 0$ и $\gamma = 0$ либо при $\sigma = 0$ и $\beta(x) \geq 0$).

3. Оператор $\mathcal{A}$ является ограниченным снизу при $\sigma > 0$ и произвольной функции $\beta(x)$. Тогда существует константа $a > 0$: $\widetilde{\mathcal{A}} := \mathcal{A} + aI >> 0$. Осуществляя замену $\widetilde{\eta}(t) := \eta(t)e^{-at}$, из уравнения (3.23) получаем задачу с положительно определенным оператором $\widetilde{\mathcal{A}}$ и тем же начальным условием (3.24). Отсюда оператор $-\mathcal{A}$ является генератором C_0-полугруппы ограниченного роста $U(t)$: $\|U(t)\| \leq e^{at}$, $t \geq 0$. Поэтому неоднородная задача является корректной задачей Коши, имеющей единственное решение (5.1) при выполнении (5.2). Отметим, что в этом случае у однородной задачи появляются неустойчивые решения.

4. Если $\sigma = 0$ и функция $\beta(x)$ является незнакоопределенной, то оператор $-\mathcal{A}$, вообще говоря, перестает быть генератором C_0-полугруппы, т.е. задача Коши (3.23)–(3.24) может не быть корректно поставленной.

Если задача (3.23)–(3.24) имеет решение, тогда, возвращаясь по замене $\zeta(t) = C^{-1/2}\eta(t) \in D(C^{-1/2}B(\sigma))$, получаем, что задача (3.20) имеет единственное решение. По данному решению однозначно определяется функция со значениями в $L_2(\Gamma)$: $\partial\zeta/\partial t = C^{-1}(-B(\sigma)\zeta + f(x,t))$. В силу (3.11) отсюда $\partial w_\pm/\partial n \in L_2(\Gamma)$. При выполнении этого условия существуют единственные решения $w_\pm$ задачи (3.9)–(3.13) (гармоническая функция однозначно определяется значениями следов либо нормальных производных на границе). Сумма $v_\pm + z_\pm + w_\pm$, очевидно, является решением задачи (2.7)–(2.10). Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 2 (о разрешимости линеаризованной задачи Маскета)**.** *Пусть в задаче* (2.7)–(2.10) *выполнены условия:*

1°. *Оператор $B(\sigma)$ является ограниченным снизу, т.е. $\sigma > 0$ или $\sigma = 0$ и $\beta(x) \geq 0,\ x \in \Gamma$ (выполнено условие* (3.2)*).*

2°. *Поля внешних сил $F_\pm(x,t) \in L_2(\Omega_\pm)$ и распределения давлений на твердых стенках $g_\pm(x,t) \in R(\gamma_{S_\pm}) \subset H^{1/2}(S_\pm)$ таковы, что $f(x,t) \in D(C^{-1/2})$, где $f(x,t)$ определяется через* (3.19)*, причем $C^{-1/2}f(x,t) \in C^\alpha([0;T]; L_2(\Gamma))$.*

3°. *Начальное состояние границы $\Gamma(t)$ таково, что $\zeta^0(x) \in D(C^{-1/2}B(\sigma))$.*

Тогда начально-краевая задача (2.7)–(2.10) *является корректно поставленной и имеет единственное сильное решение на произвольном отрезке времени* $[0;T]$.

Замечание 2. Отметим, что полученный результат согласуется с основным результатом статьи [8], где найдены достаточные условия корректности нелинейной двумерной задачи Маскета в прямоугольной области с учетом поверхностного натяжения и гравитации. При $\sigma = 0$ с учетом условия $\Delta\rho = \rho_- - \rho_+ > 0$ задача является корректной либо при достаточно сильном ускорении свободного падения, либо при выполнении условия на коэффициент мобильности $M = \mu_-/\mu_+ \leq 1$, что согласуется с физическим смыслом задачи.

Список цитируемых источников

1. *Веригин Н. Н.* Нагнетание вяжущих растворов в горные породы в целях повышения прочности и водонепроницаемости оснований гидротехнических сооружений // Н. Н. Веригин // Известия АН СССР. ОТН. — 1952. — № 5. — С. 647–687.
2. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан* Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи / Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн, Нго Зуй Кан. — М.: Наука, 1989. – 416 с.
3. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн. – М.: Наука, 1967. – 464 с.
4. *М*етоды решения задач гидромеханики для условий невесомости / [А. Д. Мышкис, В. Г. Бабский, М. Ю. Жуков и др.] — Киев: Наук. думка, 1992. – 592 с.
5. *Радкевич Е. В.* Классическая задача Веригина-Маскета, проблема регуляризации и внутренние слои // Е. В. Радкевич // Современная математика и ее приложения. — 2004. — Т. 16. — С. 113–155.

6. *Bazaliy B., Vasylyeva N.* The Muskat problem with surface tension and a nonregular initial interface / B. Bazaliy , N. Vasylyeva // Journal of Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. — 2011. — Vol. 72. — P. 6074–6096.
7. *Bear J.* Dynamics of Fluids in Porous Media / J. Bear. — New York: American Elsevier Pub. Co., 1972. — 764 pp.
8. *Escher J. and Matioc B.-V.* On the Parabolicity of the Muskat Problem: Well-Posedness, Fingering, and Stability Results / J. Escher and B.-V. Matioc // Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen. — 2011. — Vol. 30, Issue 2. — P. 193–218.
9. *Friedman A. and Tao Y.* Nonlinear stability of the Muskat problem with capillary pressure at the free boundary / A. Friedman and Y.J. Tao // Nonlinear Anal. — 2003. — Vol. 53. — P. 45–80.
10. *Muskat M.* Two fuid systems in porous media. The encroachment of water into an oil sand / M.Muskat // Physics. — 1934. — Vol. 5. — P. 250–264.
11. *Oleinik O., Primicerio M., Radkevich E.* Stefan-like problems / O. Oleinik, M. Primicerio, E. Radkevich // Meccanica. — 1993. — Vol. 28. — P. 129–143.
12. *Visintin A.* Models of Phase Transitions / A. Visintin. — Boston: Birkhäuser: Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications (Vol. 28), 1996. — 344 pp.
13. *Yi F.* Local classical solution of Muskat free boundary problem / F. Yi // J. Partial Diff. Eqs. — 1996. — Vol. 9. — P. 84–96.
14. *Yi F.* Global classical solution of Muskat free boundary problem / F. Yi // J. Math. Anal. Appl. — 2003. — Vol. 288. — P. 442–461.

Получена 02.04.2012