Динамические системы, вып. 20 (2006), 35–42

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 539.3

Плоска періодична задача про дію системи гладких штампів на пружну багатошарову основу

А.К. Приварников, І.А. Столярчук
Запорізький національный університет,
Запоріжжя 69063. *E-mail: k_algebra@zsu.zp.ua*

Анотація. Пропонується спосіб розв'язання задачі про дію на пружну багатошарову основу періодичної системи гладких штампів. В одному періоді містяться штампів, які можуть переміщуватися незалежно один від одного. Невідомими вважаються закони розподілу контактних тисків на ділянках контакту та межі цих ділянок. Задача зведена до розв'язання лінійного сингулярного інтегрального рівняння. Для наближеного розв'язання цього рівняння застосовується метод скінчених сум. Невідомі значення шуканої функції визначається у системі вузлів спеціальної квадратурної формули найвищого алгебраїчного степеня точності. Невідомі апріорі ділянки контакту пропонується визначати методом послідовних наближень. Наведені приклади, які ілюструють деталі розв'язання періодичних контактних задач для багатошарових основ. Встановлено, при яких умовах межа основи відокремлюється від підошви плоского штампа, який вдавлюється в основу.

1. Постановка задачі

На верхню межу багатошарової основи діє періодична система штампів. Система містить m штампів в одному періоді довжиною $2l$. Поза ділянками контакту поверхня основи не навантажена. При вдавлюванні в основу штампи переміщуються поступально нормально до її недеформованої поверхні незалежно один від одного. Сили тертя між штампами та поверхнею основи відсутні. Профілі штампів вважаються опуклими гладкими пологими і такими, що їх кутові точки можуть бути розташовані тільки на кінцях максимально можливих ділянок контакту. Відомі величини сил, яки вдавлюють кожний штамп в основу. Задача полягає у визначенні нормальних напружень σ_x на межі основи і розмірів ділянок контакту, якщо вони апріорі невідомі.

2. Аналіз публікацій

Для багатошарових основ переважно розглядалися неперіодичні контактні задачі [1-3]. Періодичним контактним задачам для багатошарових основ присвячені дослідження [4-5]. Відкритими залишалися питання, яким способом розв'язувати періодичні контактні задачі, коли в одному періоді розташовано декілька різних штампів, як визначити межі ділянок контакту, якщо вони апріорі невідомі, як одержати вірогідні чисельні результати розв'язання конкретних задач. У цій статті автори пропонують спосіб розв'язання цих питань.

3. Метод розв'язання задачі

Багатошарова основа — це пакет n пружних однорідних ізотропних шарів, що лежить на пружному півпросторі. Кожний шар обмежено лише двома паралельними площинами. Два будь-яких сусідніх шара основи можуть бути зчеплені або без тертя ковзати, не відокремлюючись, один по одному при деформації основи. Вісь x декартової системи координат спрямуємо вздовж верхньої межі основи, вісь z спрямуємо вглиб основи. Вважаємо, що навантаження основи штампами відмінне від нуля на системі відрізків $L = \bigcup\limits_{k=1}^{m} [a_k, b_k]$, $a_1 < b_1 < \ldots < a_m < b_m$, $b_m - a_m < 2l$, і що ця система відрізків чергується з періодом $2l$ вздовж осі x. Контактний тиск $q(x)$ у внутрішніх точках будь-якого з відрізків $[a_k, b_k]$ є неперервним і задовольняє умовам Гельдера з показником $\mu > 0$. В усіх точках верхньої межі основи напруження $\tau_{xz}(x, 0) = 0$.

Нехай $z = -f_k(x)$ — рівняння профілю підошви k-го штампу у вихідному положенні. У остаточному положенні цей штамп торкається межі багатошарової основи вздовж відрізка $[a_k, b_k]$. Будемо вважати, що функції $f_k(x)$ неперервні та такі, що їх похідні задовольняють умові Гельдера з додатним показником на кожному з відрізків контакту $[a_k, b_k]$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Введемо функцію $f(x)$, $x \in L$:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in L_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ f_m(x), & x \in L_m, \end{cases}$$

де L - сукупність відрізків контакту $L_k = [a_k, b_k]$, $\quad k \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Сингулярне інтегральне рівняння першого роду для невідомого контактного тиску $q(x)$ має вигляд [5]

$$\theta f'(x) = \frac{\pi}{2l} \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{a_k}^{b_k} q(t) ctg \frac{\pi(t-x)}{2l} dt - \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{a_k}^{b_k} q(t) F(t-x) dt, \quad x \in L. \tag{3.1}$$

Константа θ і функція $F(t)$ визначаються за формулами

$$\theta = \frac{\pi E_1}{2\left(1-\nu_1^2\right)}, \qquad F(t) = \frac{\pi}{l} \sum_{k=1}^{\infty} a_1\left(\frac{k\pi}{l}\right) e^{-2\frac{k\pi}{l} h_1} \sin\frac{k\pi t}{l}, \tag{3.2}$$

де E_1, ν_1, h_1 - модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона матеріалу верхнього шару основи і товщина цього шару; $a_1(p)$ - модифікована функція податливості основи [1]. Ця функція має будь-які похідні при $p \geq 0$ і при $p \to \infty$ швидко прагне до нуля: $a_1(p) = O\left(p^2 h_1^2 e^{-2ph_1}\right)$.

У загальному випадку невідомими є не тільки закони розподілу контактних тисків на ділянках контакту, але й межі $a_1 < b_1 < \ldots < a_m < b_m$ цих ділянок. Для визначення шуканих величин інтегральне рівняння потрібно доповнити умовами рівноваги штампів

$$\int_{a_k}^{b_k} q(x)dx \;=\; Q_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{3.3}$$

Розглянемо спочатку випадок, коли апріорі відомі усі m ділянок контакту і в околі кінців цих ділянок контактні напруження необмежені, тобто шукана функція $q(x)$ на відрізку контакту $L_k = [a_k, b_k]$, $k = 1, 2, \ldots, m$, має таку структуру [6]

$$q(x) \;=\; \frac{\tilde{q}(x)}{\sqrt{(x-a_k)\cdot(b_k-x)}}, \tag{3.4}$$

де функція $\tilde{q}(x)$ неперервна на $[a_k, b_k]$ і, в наслідок цього, обмежена і інтегрована на $[a_k, b_k]$. Така структура шуканої функції дозволяє застосувати до наближеного обчислення інтегралів в умовах (3.3) ефективну квадратурну формулу найвищого алгебраїчного степеня точності [6]

$$\int_{a_k}^{b_k} \frac{f(t)}{\sqrt{(t-a_k)\cdot(b_k-t)}}dt \;=\; \int_{-1}^{1} \frac{f\left(\frac{b_k-a_k}{2}u + \frac{b_k+a_k}{2}\right)}{\sqrt{1-u^2}}du \approx \frac{\pi}{M_k}\sum_{i=1}^{M_k} f(t_i), \tag{3.5}$$

де

$$t_i^k \;=\; \frac{b_k-a_k}{2}\cos\frac{2i-1}{2M_k}\pi + \frac{b_k+a_k}{2}, \qquad t_i^k \in (a_k, b_k), \quad i = 1, 2, \ldots, M_k. \tag{3.6}$$

Отже умови (3.3) згідно з формулами (3.4) і (3.5) набувають вигляду

$$Q_k \approx \frac{\pi}{M_k}\sum_{i=1}^{M_k} \tilde{q}\left(t_i^k\right), \qquad k \;=\; 1, 2, \ldots, M_k, \tag{3.7}$$

де вузли t_i^k визначаються за формулою (3.6).

Для наближеного розв'язання сингулярного інтегрального рівняння (3.1) застосуємо метод заміни інтегралів у рівнянні квадратурними сумами (метод скінчених сум). Для обчислення сингулярних інтегралів будемо спиратися на квадратурну формулу типу Гауса [6, 7]:

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(u)du}{\sqrt{1-u_2}\,(u-s_r)} \approx \frac{\pi}{M}\sum_{i=1}^{M} \frac{f(u_i)}{u_i - s_r}, \tag{3.8}$$

де

$$u_i = \cos\frac{2i-1}{2M}\pi, \quad s_r = \cos\frac{\pi r}{M}, \quad r = 1, 2, \ldots, M-1.$$

Зауважимо, що формула (3.8) є точною лиш для $M-1$ точок s_r інтервалу $(-1,1)$, якщо функція $u(t)$ - поліном степеня не вище за $2M$. З цієї формули виведемо потрібну для подальшого квадратурну формулу типу Гауса для обчислення сингулярного інтегралу по проміжку $[a_k, b_k]$ в інтегральному рівнянні (3.1) у $M_k - 1$ точках x_r^k проміжку $[a_k, b_k]$

$$\int_{a_k}^{b_k} \frac{\tilde{q}(t)}{\sqrt{(t-a_k)\cdot(b_k-t)}} ctg\frac{\pi\left(t-x_r^k\right)}{2l}dt \approx \frac{\pi}{M_k}\sum_{i=1}^{M_k} \tilde{q}\left(t_i^k\right) ctg\frac{\pi\left(t_i^k-x_r^k\right)}{2l}, \tag{3.9}$$

де $r = 1, 2, \ldots, M_k - 1$.

У цій формулі вузли t_i^k визначаються за формулами (3.6), тобто збігаються з вузлами квадратурної формули (3.5) гаусового типу. Вузли $x = x_r^k$, для яких формула (3.9) має найвищий алгебраїчний степінь точності, визначаються за такими формулами

$$x_r^k \;=\; \frac{b_k-a_k}{2}\cos\frac{\pi r}{M_k} + \frac{b_k+a_k}{2}, \quad x_r^k \in (a_k, b_k), \quad r = 1, 2, \ldots, M_k - 1. \tag{3.10}$$

Перейдемо тепер до наближеного розв'язання інтегрального рівняння контактної задачі (3.1). Зробимо в рівнянні заміну шуканої функції $q(x)$ на нову невідому функцію $\tilde{q}(x)$ за формулою (3.4). Інтегральне рівняння відносно функції $\tilde{q}(x)$ буде мати вигляд

$$\frac{\pi}{2l}\sum_{k=1}^{m}\int_{a_k}^{b_k} \frac{\tilde{q}(t)}{\sqrt{(t-a_k)\cdot(b_k-t)}} ctg\frac{\pi\,(t-x)}{2l}dt =$$

$$= \theta f'(x) + \sum_{k=1}^{m}\int_{a_k}^{b_k} \frac{\tilde{q}(t)}{\sqrt{(t-a_k)\cdot(b_k-t)}} F(t-x)\,dt. \tag{3.11}$$

Зауважимо, що в цьому рівнянні $x \in \bigcup\limits_{k=1}^{m}[a_k, b_k]$. Задамо тепер m натуральних чисел $M_1, M_2, \ldots, M_m$ (остаточні значення цих чисел визначаються підбором за допомогою ЕОМ). Якщо $x \in (a_1, b_1)$, то лише перший інтеграл у лівій частині рівняння (тобто інтеграл, який відповідає індексу $k = 1$) є сингулярним. Для таких x усі інші інтеграли у правій і лівій частинах рівняння не є сингулярними. Замінімо кожний з несингулярних інтегралів у рівнянні (3.11) відповідними квадратурними сумами, користуючись формулою (3.5). Змінній x будемо послідовно надавати значення x_r^1, $r = 1, 2, \ldots, M_1 - 1$, з інтервалу за формулою (3.10). Це дозволить кожний раз заміняти з високою точністю сингулярний інтеграл квадратурною сумою (3.9). Таким чином отримаємо $M_1 - 1$ лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих значень функції $\tilde{q}(t)$ у вузлах $M_1+M_2+\cdots+M_m$ (3.6), розташованих на m інтервалах (a_k, b_k). Тепер другий сингулярний інтеграл у лівій частині рівняння (3.11) замінимо квадратурною сумою (3.9) для кожного x_r^2, $r = 1, 2, \ldots, M_2 - 1$, з інтервалу (a_2, b_2). Інші інтеграли у правій і лівій частинах рівняння не є сингулярними. Їх замінимо відповідними квадратурними сумами згідно з формулою (3.5). Отримаємо додатково ще $M_2 - 1$ лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих значень функції $\tilde{q}(t)$ в усіх вузлах (3.6) на m інтервалах (a_k, b_k). Продовжуючи далі описаний процес створення лінійних алгебраїчних рівнянь, в остаточному підсумку отримаємо $M_1 + M_2 + \cdots + M_m - m$ лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $M_1+M_2+\cdots+M_m$ невідомих значень функції $\tilde{q}(t)$ в усіх вузлах (3.6). Доповнимо цю систему рівнянь m рівняннями (3.7). Отже періодична контактна задача (з відомими ділянками контакту) зведена до розв'язання системи $M_1 + M_2 + \cdots + M_m$ лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $M_1 + M_2 + \cdots + M_m$ невідомих значень функції $\tilde{q}(t)$ у вузлах (3.6)

$$\frac{\pi}{2l}\sum_{k=1}^{m}\frac{\pi}{M_k}\sum_{i=1}^{M_k}\tilde{q}\left(t_i^k\right)ctg\frac{\pi\left(t_i^k-x_r^k\right)}{2l}-\sum_{k=1}^{m}\frac{\pi}{M_k}\sum_{i=1}^{M_k}\tilde{q}\left(t_i^k\right)F\left(t_i^k-x_r^k\right)=\theta f'(x_r^k),$$
$$x_r^k\in\bigcup_{k=1}^{m}[a_k,b_k],$$

$$\frac{\pi}{2l}\sum_{i=1}^{M_k}\tilde{q}\left(t_i^k\right) = Q_k, \quad k=1,2,\ldots,m. \tag{3.12}$$

Розв'язавши цю систему, за формулою (3.4) отримаємо наближені значення контактного тиску $q(t)$ у дискретній системі точок кожної ділянки контакту штампа з межею багатошарової основи. Точність заміни сингулярного рівняння контактної задачі (3.11) і додаткових умов (3.3) системою лінійних алгебраїчних рівнянь (3.12) залежить від вибору натуральних чисел M_1, $M_2, \ldots, M_m$ (чим вони більші, тим краще). У залежності від потрібної точності розв'язку конкретної контактної задачі оптимальні значення цих чисел визначаються за допомогою ЕОМ.

Тепер розглянемо випадок контактної задачі, коли не усі межі ділянок контакту штампів з основою відомі. Єдиність розв'язку таких задач для пружних багатошарових основ доведена в статті [8]. Для визначення невідомих меж скористуємося тими міркуваннями, що за фізичним змістом контактний тиск на кожній ділянці контакту повинен бути додатним і на межі ділянки, що невідома, він дорівнює нулю. Нехай $L_k = [a_k, b_k]$ - ділянка контакту, межі якої потрібно визначити. З умов контактної задачі завжди можна вказати ділянку $L'_k = [a'_k, b'_k]$, що містить у собі ділянку L_k, тобто вказати ділянку, у якої $a'_k < a_k < b_k < b'_k$. З фізичних міркувань контактний тиск на ділянці L'_k не буде знакопостійним, в околі кінців ділянки він буде від'ємним і необмеженим. Нехай $L''_k = [a''_k, b''_k]$ максимальна за розмірами частина ділянки L'_k, на якій контактний тиск $q(t)$ не є від'ємним. Розв'яжемо систему рівнянь (3.12) у припущенні, що невідомі ділянки контакту замінені їх наближеннями $L''_k = [a''_k, b''_k]$ з відомими межами. У статті [8] доведено, що шукана ділянка контакту $L_k = [a_k, b_k]$ міститься у ділянці L_k''. Визначимо максимальну за розмірами частину ділянки L_k'', на якій контактний тиск $q(t)$ не є від'ємним. Одержимо наступне наближення L_k''' до шуканої ділянки контакту L_k. Продовживши цей процес, отримаємо з потрібною точністю шукані межі ділянки $L_k = [a_k, b_k]$. Покладемо тепер $q(a_k) = 0$, $q(b_k) = 0$. Разом з одержаними при розв'язанні системи (3.12) значеннями тиску у вузлах $t_i^k \in (a_k, b_k), \quad i = 1, 2, \ldots, M_k$, побудуємо відповідний інтерполяційний поліном або сплайн і одержимо наближений закон розподілу контактного тиску на ділянці контакту $L_k = [a_k, b_k]$. Таким чином, наближене розв'язання контактних задач з деякими невідомими межами ділянок контакту штампів з пружною багатошаровою основою звелось до розв'язання послідовності контактних задач з усіма відомими ділянками контакту штампів з основою, тобто до розв'язання на практиці системи лінійних алгебраїчних рівнянь (3.12) декілька разів.

4. Обгрунтування вірогідності та чисельні результати

Наведений спосіб визначення невідомих ділянок контакту штампів з основою було перевірено на задачі про дію на пружну півплощину з модулями пружності E, ν круглого штампу, радіусу R. Точний розв'язок цієї задачі відомий [9]:

$$q(t) = \frac{E\sqrt{a^2 - x^2}}{2R(1 - \nu^2)}, \qquad Q = \frac{\pi a^2 E}{4R(1 - \nu^2)}.$$

Для наближеного розв'язання такої задачі за допомогою ЕОМ в системі рівнянь (3.12) треба покласти $m = 1$, $a_1 = -a$, $a_2 = a$, $a_1(p) = 0 \to F(t) = 0$, $f(x) = -\frac{x^2}{2R}$, $Q_k = Q$, $a \le R$, $l \ge 5R$. Вже при $M_1 = 7$ відносна похибка визначення невідомої величини a не перевищувала 0.5 процентів. Закон розподілу контактного тиску на ділянці контакту $(-a, a)$ практично не відрізнявся від наведеного вище.

На закінчення наведемо розв'язок задачі про дію на двошарову основу штампу з плоскою підошвою. Основа являє собою шар товщини h з модулями пружності E_1, ν_1, зчеплений з пружною півплощиною, модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона якої: E_2, ν_2. Для такої основи [1] $a_1(p) = \dfrac{C_1(p)}{D_1(p)}$,

$$C_1(p) = N_1[(3 - 4\nu_1)c + p_1 + p_1^2 + (1 - 2\nu_1)^2] - \Delta_1 A_2(c + p_1) + \\ + \Delta_1 B_{\tau_2}(s + p_1) - \tilde{\Delta}_1 B_{\tau_2}[(1 - 2\nu_1)s - p_1 - p_1^2] - H_1(c + p_1 + p_1^2),$$

$$D_1(p) = N_1[(3 - 4\nu_1)c^2 + p_1^2 e_1 + (1 - 2\nu_1)^2 e_1] + \Delta_1 A_2(sc - p_1 e_1) + \\ + \Delta_1 B_{\tau_2}(sc + p_1 e_1) - \tilde{\Delta}_1 B_{\tau_2}[(1 - 2\nu_1)s^2 + p_1 e_1] + H_1(s^2 - p_1 e_1),$$

де

$$p_1 = ph_1, e_1 = e^{-2p_1}, c = 0.5(1+e_1), s = 0.5(1-e_1),$$

$$N_1 = \frac{1}{4(1-\nu_1)^2}, \quad \Delta_1 = \frac{E_1(1-\nu_2)^2}{E_2(1-\nu_1)^2}, \quad \tilde{\Delta}_1 = \frac{\Delta_1}{(1-\nu_1)},$$

$$H_1 = \Delta_1^2(A_2 B_{\tau_2} - B_2^2), \quad A_2 = 1, \quad B_{\tau_2} = 1, \quad B_2 = \frac{1-2\nu_2}{2(1-\nu_2)}.$$

Нехай ділянка контакту має довжину $2a$. Для чисельного розв'язання контактної задачі в системі рівнянь (3.12) покладемо $m = 1$, $a_1 = -a$, $a_2 = a$, $f(x) = 0$, $Q_k = Q$, $h_1 = a$, $\Delta_1 = 0.1$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$. Для числа вузлів $M_1 = 25$, $M_1 = 27$, $M_1 = 31$ значення контактного тиску практично співпадають. В таблиці 1 наведені значення контактного тиску у правій половині $[0, a]$ ділянки контакту.

Таблица 1. Значення контактного тиску між плоским штампом і двошаровою основою

$\frac{x}{a}$	$\frac{aq_1(x)}{Q}$	$\frac{aq_2(x)}{Q}$
0	- 0.00925	0.01497
0.1	- 0.00334	0.02063
0.2	0.01496	0.03812
0.3	0.4736	0.06906
0.4	0.09709	0.1164
0.5	0.1695	0.1854
0.6	0.2748	0.2855
0.7	0.4272	0.4300
0.8	0.6747	0.6643
0.9	1.1848	1.1496
0.9987	12.9072	12.3737

Контактний тиск $q_1(x)$ відповідає відносно великому періоду $l = 9a$ розташування штампів на поверхні двошарової основи. Контактний тиск $q_2(x)$ відповідає випадку $l = 5a$. Аналіз чисельних результатів приводить до висновку, що при дії плоского штампу на багатошарову основу, у якої модуль Юнга матеріалу верхнього шару значно більший ніж модуль Юнга нижчого шару, можливо відокремлення поверхні основи від підошви штампу. При зменшенні періоду розташування штампів явище відокремлення зникає.

Перелік цитуємих джерел

1. *Приварников А.К., Ламзюк В.Д.* Упругие многослойные основания // Днепропетр. ун-т. - Днепропетровск. 1985. - Ч.1. - 162 с.- Деп. в ВИНИТИ 23.12.85, №8789-В.
2. *Приварников А.К., Столярчук І.А.* Дія на багатошарову основу гладкого штампу, що має у плані форму смуги // Науковий вісник ВДУ. Журнал Волинського держ. ун-ту: Фізичні, хімічні, математичні науки. - 1998. - В.№6. - С.77-85.

3. *Матузко Ю.О.* Определение напряженно-деформированного состояния многослойного основания, на которое действует штамп // Теор. и прикл. механика. - 2003. - В. 38- С. 15-19.
4. *Ильман В.М., Приварников А.К.* Плоская периодическая контактная задача для многослойного упругого основания // Вопросы прочности и пластичности Днепропетровский ун-т - Днепропетровск. 1971. - С.36-57.
5. *Столярчук І.А.* Періодична контактна задача плоскої теорії пружності для багатошарових основ // Матеріали V Міжнародної науково-практичної конференції "Динаміка наукових досліджень - 2006". Том 7. - Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2006. - С. 11 - 16.
6. *Панасюк В.В., Савpук М.П., Дацишин А.П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. - К.: Наукова думка, 1976. - С. 72.
7. *Приварников А.К.* Квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности для особых интегралов.// Задачи механики многослойных сред и их численная реализация. - Запорожье. - 2002. - С. 8 -14.
8. *Александров О.І., Матузко Ю.О.* Решение пространственной контактной задачи о вдавливании штампа в упругое основание // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. - 2003. - В. 7, т. 1. - С. 123 - 131.
9. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. - М.: Наука, 1966. - 708с.

Получено 28.10.2006