Динамические системы, том 1(29), №1 (2011), 41–51

УДК 539.3

Планарные колебания прямоугольной пластины в случае первой основной граничной задачи

С. О. Папков

Севастопольский национальный технический университет,
E-mail: stanislav.papkov@gmail.com

Аннотация. Получено решение первой основной граничной задачи о планарных колебаниях прямоугольной пластины. На основе метода суперпозиции задача сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. При помощи метода предельных лимитант находятся первые неизвестные в системе и строится асимптотическая формула для остальных неизвестных.

Ключевые слова: бесконечная система, асимптотика, прямоугольная пластина.

1. Введение

При исследовании планарных колебаний прямоугольных пластин исторически сформировались два основных аналитических подхода: метод суперпозиции и метод однородных решений. Оба данных метода используют общие решения уравнений движения пластины, обладающие достаточной полнотой для удовлетворения граничным условиям, неопределенные коэффициенты в представлении решения определяются из бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Известно, что выражения, которые дает метод однородных решений, содержат корни комплексных трансцендентных дисперсионных уравнений [10], поэтому, как правило, учитывают лишь первые ветви дисперсионных уравнений [9], что позволяет получить приближенное решение. В случае возбуждения колебаний напряжениями в [8] задача рассматривалась на основе метода суперпозиции. При этом главную роль в построении эффективного алгоритма решения задачи играла гипотеза, выдвинутая по аналогии с подобной задачей статики, о существовании предела у неизвестных в бесконечной системе для произвольного вида вынуждающей нагрузки

$$\lim_{m\to\infty} x_m = -\lim_{m\to\infty} y_m = G \tag{1.1}$$

Данная гипотеза нашла подтверждение в рассмотренных численных примерах [1], [8]. Отметим также, что хотя в [1], [8] предел предполагался, вообще говоря, отличным от нуля, из доказательства существования предела [3] следует, что в частных случаях он может обращаться в нуль. Очевидно, что заданные на границе смещения соответствуют некоторым граничным напряжениям, в силу чего рассматриваемой первой граничной задаче может быть сопоставлена эквивалентная вторая граничная задача. Если в обоих случаях неизвестные в бесконечных системах определяются через одни и те же неопределенные коэффициенты общего решения, то можно ожидать, что для неизвестных в бесконечной системе, соответствующей первой основной граничной задачи, справедлив асимптотический закон (1.1).

В данной статье используется метод суперпозиции применительно к первой основной граничной задаче. Предельная константа G выражается через производные граничных смещений. При помощи метода предельных лимитант [7] находятся первые неизвестные и второй степенной член асимптотики решения.

2. Постановка задачи и сведение к бесконечной системе

Рассмотрим в безразмерных координатах установившиеся колебания тонкой пластины $[-1;1]\times[-\eta;\eta]$ под действием вынуждающих смещений. Получаем следующую краевую задачу для уравнений Ламе относительно усредненного по толщине вектора смещений:

$$\Delta\mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu*}\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{u} = \frac{\rho}{G}\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} \tag{2.1}$$

где $\nu* = \frac{\nu}{1+\nu}$, ν —коэффициент Пуассона, ρ — плотность материала, G —модуль сдвига.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_x|_{x=\pm1} &= f_1(y)e^{-i\omega t}; \quad \mathbf{u}_y|_{x=\pm1} = f_2(y)e^{-i\omega t};\\ \mathbf{u}_x|_{y=\pm\eta} &= g_1(x)e^{-i\omega t}; \quad \mathbf{u}_y|_{y=\pm\eta} = g_2(y)e^{-i\omega t}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Общее решение $\mathbf{u} = \{u_x(x,y)\vec{i} + u_y(x,y)\vec{j}\}e^{-i\omega t}$ уравнений (2.1) в случае симметричных по обеим осям колебаний представляется в виде суммы общих решений для полос $x\in[-1;\ 1]$ и $y\in[-\eta;\ \eta]$:

$$\begin{aligned} u_x &= C_0\sin\Omega_1 x - \sum_{m=1}^{\infty}\left(A_m\tfrac{\alpha_m}{p_{1m}}\mathrm{ch}\,p_{1m}y + B_m\tfrac{p_{2m}}{\alpha_m}\mathrm{ch}\,p_{2m}y\right)\sin\alpha_m x+\\ &\quad+\sum_{m=1}^{\infty}\left(C_m\mathrm{sh}\,q_{1m}x + D_m\mathrm{sh}\,q_{2m}x\right)\cos\beta_m y;\\ u_y &= A_0\sin\Omega_1 y + \sum_{m=1}^{\infty}\left(A_m\mathrm{sh}\,p_{1m}y + B_m\mathrm{sh}\,p_{2m}y\right)\cos\alpha_m x-\\ &\quad-\sum_{m=1}^{\infty}\left(C_m\tfrac{\beta_m}{q_{1m}}\mathrm{ch}\,q_{1m}x + D_m\tfrac{q_{2m}}{\beta_m}\mathrm{ch}\,q_{2m}x\right)\sin\beta_m y; \end{aligned} \tag{2.3}$$

где $\alpha_m = \pi\, m$, $\beta_m = \frac{m\pi}{\eta}$, $q_{l,m}^2 = \beta_m^2 - \Omega_l^2$, $p_{l,m}^2 = \alpha_m^2 - \Omega_l^2$, $(l=1,2)$, $\Omega_1 = \frac{\omega}{c_1}$, $\Omega_2 = \frac{\omega}{c_2}$, $c_1 = \sqrt{\frac{2G(1-\nu*)}{\rho\,(1-2\nu*)}}$ — скорость продольной волны, $c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ — скорость сдвиговой волны.

Пусть для вынуждающих колебания смещений справедливы разложения в ряды Фурье

$$\begin{aligned} f_1 &= f_{10} + \sum_{m=1}^{\infty} f_{1m}\cos\beta_m y; \quad f_2 = \sum_{m=1}^{\infty} f_{2m}\sin\beta_m y;\\ g_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} g_{1m}\sin\alpha_m x; \quad g_2 = g_{20} + \sum_{m=1}^{\infty} g_{2m}\cos\alpha_m x. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Тогда краевые условия (2.2) приводят к следующей системе функциональных равенств:

$$\begin{aligned}
&\text{I.} C_0 \sin\Omega_1 + \sum_{m=1}^{\infty} (C_m \mathrm{sh}\, q_{1m} + D_m \mathrm{sh}\, q_{2m}) \cos\beta_m y = f_{10} + \sum_{m=1}^{\infty} f_{1m} \cos\beta_m y;\\
&\text{II.} A_0 \sin\Omega_1 y + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m (A_m \mathrm{sh}\, p_{1m} y + B_m \mathrm{sh}\, p_{2m} y) -\\
&\quad - \sum_{m=1}^{\infty} (C_m \tfrac{\beta_m}{q_{1m}} \mathrm{ch}\, q_{1m} + D_m \tfrac{q_{2m}}{\beta_m} \mathrm{ch}\, q_{2m}) \sin\beta_m y = \sum_{m=1}^{\infty} f_{2m} \sin\beta_m y;\\
&\text{III.} C_0 \sin\Omega_1 x - \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \tfrac{\alpha_m}{p_{1m}} \mathrm{ch}\, p_{1m}\eta + B_m \tfrac{p_{2m}}{\alpha_m} \mathrm{ch}\, p_{2m}\eta) \sin\alpha_m x +\\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m (C_m \mathrm{sh}\, q_{1m} x + D_m \mathrm{sh}\, q_{2m} x) = \sum_{m=1}^{\infty} g_{1m} \sin\alpha_m x;\\
&\text{IV.} A_0 \sin\Omega_1 \eta + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \mathrm{sh}\, p_{1m}\eta + B_m \mathrm{sh}\, p_{2m}\eta) \cos\alpha_m x = g_{20} + \sum_{m=1}^{\infty} g_{2m} \cos\alpha_m x.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Равенства I и IV позволяют сразу найти $C_0 = \frac{f_{10}}{\sin\Omega_1}$ и $A_0 = \frac{g_{20}}{\sin\Omega_1\eta}$, а также выразить

$$C_m = -\frac{\mathrm{sh}\ q_{2m}}{\mathrm{sh}\ q_{1m}} D_m + \frac{f_{1m}}{\mathrm{sh}\ q_{1m}}; \quad A_m = -\frac{\mathrm{sh}\ p_{2m}\eta}{\mathrm{sh}\ p_{1m}\eta} B_m + \frac{g_{2m}}{\mathrm{sh}\ p_{1m}\eta} \tag{2.6}$$

Функциональные равенства II и III после разложения входящих в них функций по полной системе тригонометрических функций и подстановки (2.6) приводят к парной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \Delta_m^x x_m = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{mn} y_n + P_m; \\ \Delta_m^y y_m = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_{mn} x_n + Q_m; \end{cases} \quad (m \in N) \tag{2.7}$$

где $x_n = \frac{(-1)^n B_n \mathrm{sh}\, p_{2n}\eta}{\eta}$; $y_n = (-1)^n D_n \mathrm{sh}\, q_{2n}$,

$$\begin{aligned}
&\Delta_m^x = \eta\left(\tfrac{\alpha_m}{p_{1m}} \mathrm{cth}\, p_{1m}\eta - \tfrac{p_{2m}}{\alpha_m} \mathrm{cth}\, p_{2m}\eta\right), \Delta_m^y = \tfrac{\beta_m}{q_{1m}} \mathrm{cth}\, q_{1m} - \tfrac{q_{2m}}{\beta_m} \mathrm{cth}\, q_{2m};\\
&a_{mn} = \tfrac{2\Omega_1^2\alpha_m}{(1-2\nu*)} \tfrac{1}{(\beta_n^2+p_{1m}^2)(\beta_n^2+p_{2m}^2)}, b_{mn} = \tfrac{2\Omega_1^2\beta_m}{(1-2\nu*)} \tfrac{1}{(\alpha_n^2+q_{1m}^2)(\alpha_n^2+q_{2m}^2)};\\
&P_m = \tfrac{2f_{10}\alpha_m}{p_{1m}^2} + (-1)^m \left(g_{1m} + g_{2m} \tfrac{\alpha_m}{p_{1m}} \mathrm{cth}\, p_{1m}\eta\right) + 2\alpha_m \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^n f_{1n}}{\beta_n^2+p_{1m}^2}\\
&Q_m = \tfrac{2g_{20}\beta_m}{\eta q_{1m}^2} + (-1)^m \left(f_{2m} + f_{1m} \tfrac{\beta_m}{q_{1m}} \mathrm{cth}\, q_{1m}\right) + \tfrac{2\beta_m}{\eta} \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^n g_{2n}}{\alpha_n^2+q_{1m}^2}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

3. Исследование бесконечной системы

При исследовании бесконечных систем линейных алгебраических уравнений зачастую удается доказать существование ограниченного (главного) решения показав, что в некотором функциональном пространстве оператор, соответствующий бесконечной матрице в правой части системы, является сжимающим. В частности, это выполняется, если бесконечная система

$$z_m = \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} z_n + b_m, \quad m \in \mathbf{N}, \tag{3.1}$$

удовлетворяет условиям регулярности $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_{mn}| < 1, \quad m \in \mathbf{N}$. Если указанное условие выполняется с некоторого номера $m > N_R$, то бесконечная система называется квазирегулярной и ее исследование можно свести к исследованию конечной системы [2] порядка N_R.

Чтобы исследовать регулярность (2.7) используем значение ряда из [6]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \operatorname{cth} \pi a - \frac{1}{2a^2}, \tag{3.2}$$

тогда значения рядов из модулей коэффициентов системы (2.7) можно вычислить точно:

$$\begin{array}{l} S_{2m-1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\frac{a_{mn}}{\Delta_m^x}| = \frac{1}{|\Delta_m^x|} \sum\limits_{n=1}^{N_a} (|a_{mn}| - a_{mn}) + \\ + \frac{2\alpha_m}{|\Delta_m^x|} \left(\frac{\eta}{2p_{2m}} \operatorname{cth} p_{2m}\eta - \frac{\eta}{2p_{1m}} \operatorname{cth} p_{1m}\eta + \frac{1}{2p_{1m}^2} - \frac{1}{2p_{2m}^2} \right); \\ S_{2m} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\frac{b_{mn}}{\Delta_m^y}| = \frac{1}{|\Delta_m^y|} \sum\limits_{n=1}^{N_b} (|b_{mn}| - b_{mn}) + \\ + \frac{2\beta_m}{|\Delta_m^y|} \left(\frac{1}{2q_{2m}} \operatorname{cth} q_{2m} - \frac{1}{2q_{1m}} \operatorname{cth} q_{1m} + \frac{1}{2q_{1m}^2} - \frac{1}{2q_{2m}^2} \right), \end{array} \tag{3.3}$$

где $N_a = [\eta\sqrt{\max(0, (\Omega_2/\pi)^2 - 1)}]$ и $N_b = [\sqrt{\max(0, (\Omega_2/\pi)^2 - 1/\eta^2)}]$ ($[x]$ - целая часть $x \in R$).

При $m \to \infty$ можно найти следующие асимптотические представления для величин в последней формуле ($l = 1, 2$):

$$q_{lm} \approx \beta_m - \frac{\Omega_l^2}{2\beta_m}; \quad p_{lm} \approx \alpha_m - \frac{\Omega_l^2}{2\alpha_m}; \quad \Delta_m^x \approx \frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{2\alpha_m^2}\eta; \quad \Delta_m^y \approx \frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{2\beta_m^2}. \tag{3.4}$$

Подставляя (3.4) в (3.3) получаем оценку при $m \to \infty$:

$$S_m = \frac{1}{3 - 4\nu*} + O\left(\frac{1}{m}\right). \tag{3.5}$$

Из (3.5) следует, что система (2.7) является квазирегулярной. Действительно, для любого значения частоты Ω всегда можно найти номер N_R, начиная с которого $S_m < 1$.

Положим, что функции $f_l(y),\ g_l(x)$ ($l = 1, 2$), задающие вынуждающие колебания смещения, дважды дифференцируемы. Покажем, что этот факт приводит к ограниченности свободных членов системы (2.7). Действительно, учтем что

$$2\alpha_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n f_n}{\beta_n^2 + p_{1m}^2} = \eta \int_{-\eta}^{\eta} f_1(y) \left(\frac{\mathrm{ch} p_{1m} y}{\mathrm{sh} p_{1m} y} - \frac{1}{\eta p_{1m}} \right) dy, \tag{3.6}$$

тогда свободные члены можно записать как квадратуры граничных условий

$$\begin{aligned} P_m = &\int_{-\eta}^{\eta} f_1(y) \left(\tfrac{\mathrm{ch} p_{1m} y}{\mathrm{sh} p_{1m} y} - \tfrac{1}{\eta p_{1m}} + \tfrac{\alpha_m}{\eta p_{1m}^2} \right) dy + \\ &+ (-1)^m \int_{-1}^{1} (g_1(x) \sin \alpha_m x + \mathrm{cth} p_{1m} \eta \tfrac{\alpha_m}{p_{1m}} g_2(x) \cos \alpha_m x) dx. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Дважды интегрируя по частям данное равенство, с использованием (3.4) найдем при $m \to \infty$:

$$P_m = \frac{2(f_1(\eta) - g_1(1))}{\alpha_m} + \frac{2(g_2'(1) - f_1'(\eta))}{\alpha_m^2} + O(\alpha_m^{-3}). \tag{3.8}$$

В силу того, что $u_x(1, \eta) = f_1(\eta) = g_1(1)$ получаем асимптотическое поведение свободных членов

$$\frac{P_m}{\Delta_m^x} = \frac{4(1 - 2\nu*)(g_2'(1) - f_1'(\eta))}{\eta \Omega_1^2 (3 - 4\nu*)} + O(1/\alpha_m). \tag{3.9}$$

Аналогично доказывается ограниченность свободных членов Q_m

$$\frac{Q_m}{\Delta_m^y} = -\frac{4(1 - 2\nu*)(g_2'(1) - f_1'(\eta))}{\eta \Omega_1^2 (3 - 4\nu*)} + O(1/\beta_m). \tag{3.10}$$

4. Алгоритм оценки неизвестных. Асимптотика

Проведем замену переменных:

$$x_m = \mathrm{X}_m^0 + \sum_{j=1}^{N_R} (\mathrm{X}_m^{j,1} x_j + \mathrm{X}_m^{j,2} y_j); \quad y_m = \Upsilon_m^0 + \sum_{j=1}^{N_R} (\Upsilon_m^{j,1} x_j + \Upsilon_m^{j,2} y_j); \quad (m > N_R) \tag{4.1}$$

где $N_R = N_R(\Omega, \eta)$ — номер, начиная с которого для системы (2.7) выполняются условия регулярности. Подстановка (4.1) в систему приводит к совокупности бесконечных систем с одинаковой матрицей относительно введенных новых неизвестных:

$$\begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{X}_m^0 = \frac{1}{\Delta_m^x} \sum\limits_{n=N_R+1}^{\infty} a_{mn} \Upsilon_n^0 + \frac{P_m}{\Delta_m^x}; \\ \Upsilon_m^0 = \frac{1}{\Delta_m^y} \sum\limits_{n=N_R+1}^{\infty} b_{mn} \mathrm{X}_n^0 + \frac{Q_m}{\Delta_m^y}; \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{X}_m^{j1} = \frac{1}{\Delta_m^x} \sum\limits_{n=N_R+1}^{\infty} a_{mn} \Upsilon_n^{j1}; \\ \Upsilon_m^{j1} = \frac{1}{\Delta_m^y} \sum\limits_{n=N_R+1}^{\infty} b_{mn} \mathrm{X}_n^{j1} + \frac{b_{mj}}{\Delta_m^y}; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{X}_m^{j2} = \frac{1}{\Delta_m^x} \sum\limits_{n=N_R+1}^{\infty} a_{mn} \Upsilon_n^{j2} + \frac{a_{mj}}{\Delta_m^x}; \\ \Upsilon_m^{j2} = \frac{1}{\Delta_m^y} \sum\limits_{n=N_R+1}^{\infty} b_{mn} \mathrm{X}_n^{j2}; \end{array} \right. & (m > N_R; j = 1,\ 2,\ \ldots N_R) \end{array} \tag{4.2}$$

и к конечной системе линейных алгебраических уравнений относительно первых неизвестных $\{x_m, y_m\}_{m=1}^{N_R}$, коэффициенты которой зависят от решений (4.2):

$$\begin{cases} \Delta_m^x x_m = \sum\limits_{n=1}^{N_R} \left(\sum\limits_{j=N_R+1}^{\infty} a_{mj} \Upsilon_j^{n1} \right) x_n + \sum\limits_{n=1}^{N_R} \left(a_{mn} + \sum\limits_{j=N_R+1}^{\infty} a_{mj} \Upsilon_j^{n2} \right) y_n + \\ + P_m + \sum\limits_{j=N_R+1}^{\infty} a_{mn} \Upsilon_n^0; \\ \Delta_m^y y_m = \sum\limits_{n=1}^{N_R} \left(b_{mn} + \sum\limits_{j=N_R+1}^{\infty} b_{mj} \mathrm{X}_j^{n1} \right) x_n + \sum\limits_{n=1}^{N_R} \left(\sum\limits_{j=N_R+1}^{\infty} b_{mj} \mathrm{X}_j^{n2} \right) y_n + \\ + Q_m + \sum\limits_{j=N_R+1}^{\infty} b_{mn} \mathrm{X}_n^0; \end{cases} \tag{4.3}$$

Согласно (3.5) бесконечные системы (4.2) являются вполне регулярными. Так как исходная система (2.7) имеет ограниченные свободные члены, то и все системы (4.2) также имеют ограниченные свободные члены. Таким образом, согласно известной теореме [2] каждая из систем (4.2) имеет единственное ограниченное решение. Чтобы привести вполне регулярные системы (4.2) к виду, удовлетворяющему обобщенному закону существования ненулевого предела у решения [4], проведем замену переменных:

$$\mathrm{X}_m^0 = \frac{(1-2\nu*)(g_2'(1) - f_1'(\eta))}{(1-\nu*)\eta\Omega_1^2} + \frac{\mathrm{x}_m^0}{\alpha_m^\lambda}; \quad \Upsilon_m^0 = -\frac{(1-2\nu*)(g_2'(1) - f_1'(\eta))}{(1-\nu*)\eta\Omega_1^2} + \frac{\mathrm{y}_m^0}{\beta_m^\lambda}; \tag{4.4}$$

$$\mathrm{X}_m^{j\,k} = \frac{\mathrm{x}_m^{j\,k}}{\alpha_m^\lambda}; \quad \Upsilon_m^{j\,k} = \frac{\mathrm{y}_m^{j\,k}}{\beta_m^\lambda} \quad (m > N_R; j = 1, 2, ..., N_R; k = 1, 2) \tag{4.5}$$

Дальнейшие выкладки проведем для системы относительно $\mathrm{X}_m^0, \mathrm{Y}_m^0$, так как после замены все системы имеют одинаковый порядок убывания свободных членов как $O(1/m)$. Данная система примет вид

$$\begin{cases} \mathrm{x}_m^0 = \frac{\alpha_m^\lambda}{\Delta_m^x} \sum\limits_{n=N_R+1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{\beta_n^\lambda} \mathrm{y}_n^0 + \alpha_m^\lambda \left(\frac{P_m}{\Delta_m^x} - \frac{(1-2\nu*)(g_2'(1)-f_1'(\eta))}{(1-\nu*)\eta\Omega_1^2} \left(1 + \sum\limits_{n=N_R+1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{\Delta_m^x} \right) \right) \\ \mathrm{y}_m^0 = \frac{\beta_m^\lambda}{\Delta_m^y} \sum\limits_{n=N_R+1}^{\infty} \frac{b_{mn}}{\alpha_n^\lambda} \mathrm{x}_n^0 + \beta_m^\lambda \left(\frac{Q_m}{\Delta_m^y} + \frac{(1-2\nu*)(g_2'(1)-f_1'(\eta))}{(1-\nu*)\eta\Omega_1^2} \left(1 + \sum\limits_{n=N_R+1}^{\infty} \frac{b_{mn}}{\Delta_m^y} \right) \right) \end{cases}, \tag{4.6}$$

Номер N_R всегда можно подобрать таким, что коэффициенты (4.6) будут строго положительными. Для оценки регулярности этой системы, на основе формулы Эйлера-Маклорена получаем следующее значение ряда

$$\begin{gathered} S_N(a) = \sum\limits_{k=N}^{\infty} \frac{k^{-\lambda}}{k^2+a^2} = \frac{N^{-(1+\lambda)}}{1+\lambda} {}_2F_1\left(1, \frac{1+\lambda}{2}, \frac{3+\lambda}{2}; -\left(\frac{a}{N}\right)^2\right) + \frac{N^{-\lambda}}{2(N^2+a^2)} + \\ + \frac{\lambda N^{-(\lambda+1)}}{12(N^2+a^2)} + \frac{N^{1-\lambda}}{6(N^2+a^2)^2} - \frac{1}{720}\left(\frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)N^{-(\lambda+3)}}{(N^2+a^2)} + \frac{6\lambda^2 N^{-(\lambda+1)}}{(N^2+a^2)^2} - \frac{24(1-\lambda)N^{1-\lambda}}{(N^2+a^2)^3}\right), \end{gathered} \tag{4.7}$$

который при $a \to \infty$ дает асимптотику

$$S_N(a) = \frac{\pi}{2\cos\frac{\pi\lambda}{2}} a^{-(1+\lambda)} + k_N a^{-2} + O\left(a^{-(3+\lambda)}\right), \tag{4.8}$$

где $k_N = \frac{N^{1-\lambda}}{\lambda-1} + \frac{1}{2}N^{-\lambda} + \frac{\lambda}{12}N^{-(1+\lambda)} - \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{720}N^{-(3+\lambda)}$. Формулы (4.8) позволяют вычислить значение рядов в условиях регулярности

$$\begin{aligned} 1-\varphi_m &= \frac{\alpha_m^\lambda}{\Delta_m^x} \sum_{n=N_R+1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{\beta_n^\lambda} = \frac{2\alpha_m^{\lambda+1}\eta^{2+\lambda}}{\Delta_m^x \pi^{2+\lambda}} \left(S_{N_R+1}\left(\frac{\eta p_{2m}}{\pi}\right) - S_{N_R+1}\left(\frac{\eta p_{1m}}{\pi}\right)\right), \\ 1-\psi_m &= \frac{\beta_m^\lambda}{\Delta_m^y} \sum_{n=N_R+1}^{\infty} \frac{b_{mn}}{\alpha_n^\lambda} = \frac{2\beta_m^{1+\lambda}}{\Delta_m \pi^{2+\lambda}} \left(S_{N_R+1}\left(\frac{q_{2m}}{\pi}\right) - S_{N_R+1}\left(\frac{q_{1m}}{\pi}\right)\right). \end{aligned} \tag{4.9}$$

а (3.4), (4.8), (4.9) исследовать поведение при больших номерах m:

$$\begin{aligned} 1-\varphi_m &= \frac{1+\lambda}{(3-4\nu*)\cos\frac{\pi\lambda}{2}} + \frac{4k_{N*+1}\eta^{\lambda-1}}{\pi(3-4\nu*)m^{1-\lambda}} + O\left(\frac{1}{m}\right); \\ 1-\psi_m &= \frac{1+\lambda}{(3-4\nu*)\cos\frac{\pi\lambda}{2}} + \frac{4k_{N*+1}\eta^{1-\lambda}}{\pi(3-4\nu*)m^{1-\lambda}} + O\left(\frac{1}{m}\right). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Так как коэффициент k_N является отрицательной величиной, то для выполнения условий регулярности должно выполняться равенство

$$\cos\frac{\pi\lambda}{2} = \frac{\lambda+1}{3-4\nu*} \tag{4.11}$$

Свободные члены систем (4.2), согласно (3.9),(3.10), ведут себя как $O(1/m)$, для ограниченности свободных членов системы (4.6) необходимо чтобы $\lambda \in [0;\ 1)$. Аналогично задаче статики [5], уравнение (4.11) имеет здесь единственный корень, который расположен на интервале $[0; \lambda*]$ $\quad(\lambda* = 0,633451)$. Можно проверить, что после замены (4.4) бесконечная система (4.6) удовлетворяет обобщенному признаку существования ненулевого предела у решения [4],[5]. Действительно, пусть в условиях данной теоремы $q_m = \xi_m = m^{1-\lambda}$. Учтем также, что в силу асимптотического закона (3.4) для Δ_m^x, Δ_m^y всегда найдутся константы $\Delta_{\sup}^x, \Delta_{\inf}^x, \Delta_{\sup}^y, \Delta_{\inf}^y$ такие что

$$\Delta_{\inf}^x \le \Delta_m^x \alpha_m^2 \le \Delta_{\sup}^x; \Delta_{\inf}^y \le \Delta_m^y \beta_m^2 \le \Delta_{\sup}^y \quad (m > N_R) \tag{4.12}$$

Тогда при $m > n$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \frac{2\Omega_1^2}{1-2\nu*}\frac{\eta^\lambda}{\pi\Delta_{\sup}^x}\left(\frac{\eta^2}{\eta^2+1}\right)^2 n^{-\lambda} \le \frac{a_{mn}q_m}{\Delta_m^x} \le \frac{2\Omega_1^2}{1-2\nu*}\frac{\eta^\lambda \alpha_{N_R}^4}{\pi\Delta_{\inf}^x p_{1N_R}^2 p_{2N_R}^2} n^{-\lambda}; \\ \frac{2\Omega_1^2}{1-2\nu*}\frac{\eta^{-\lambda}}{\pi\Delta_{\sup}^y}\left(\frac{1}{\eta^2+1}\right)^2 n^{-\lambda} \le \frac{b_{mn}\xi_m}{\Delta_m^y} \le \frac{2\Omega_1^2}{1-2\nu*}\frac{\eta^{-\lambda}\beta_{N_R}^4}{\pi\Delta_{\inf}^y q_{1N_R}^2 q_{2N_R}^2} n^{-\lambda}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Следовательно, для единственного ограниченного решения (4.6) существует общий положительный предел

$$\lim_{m\to\infty} \mathrm{x}_m^0 = \lim_{m\to\infty} \mathrm{y}_m^0 = G_0. \tag{4.14}$$

Из (4.4), (4.14) следуют асимптотические формулы для исходных неизвестных:

$$\begin{aligned} \mathrm{X}_m^0 &= \tfrac{(1-2\nu*)(g_2'(1)-f_1'(\eta))}{(1-\nu*)\eta\Omega_1^2} + \tfrac{G_0}{\alpha_m^\lambda}; \\ \Upsilon_m^0 &= -\tfrac{(1-2\nu*)(g_2'(1)-f_1'(\eta))}{(1-\nu*)\eta\Omega_1^2} + \tfrac{G_0}{\beta_m^\lambda}; \end{aligned} \tag{4.15}$$

Рассматривая подобным образом системы (4.2) можно доказать справедливость формул при $m \to \infty$

$$\mathrm{X}_m^{j1} \approx \frac{G_j^1}{\alpha_m^\lambda}; \quad \Upsilon_m^{j1} \approx \frac{G_j^1}{\beta_m^\lambda}; \quad \mathrm{X}_m^{j2} \approx \frac{G_j^2}{\alpha_m^\lambda}; \quad \Upsilon_m^{j,2} \approx \frac{G_j^2}{\beta_m^\lambda}. \tag{4.16}$$

Тогда из замены (4.1) и соотношений (4.15), (4.16) получаем двучленную асимптотическую формулу для неизвестных в исследуемой бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (2.7)

$$x_m = G + \frac{G_1}{\alpha_m^\lambda}; \quad y_m = -G + \frac{G_1}{\beta_m^\lambda} \tag{4.17}$$

где $G = \frac{(1-2\nu*)(g_2'(1)-f_1'(\eta))}{(1-\nu*)\eta\Omega_1^2}$; $\quad G_1 = G_0 + \sum\limits_{j=1}^{N_R} (G_j^1 x_j + G_j^2 y_j)$. Формула (4.17) в общем случае соответствует закону (1.1), добавляя в него второй член асимптотики.

5. Численный пример

Проиллюстрируем изложенный выше подход на примере следующей краевой задачи:

$$\mathbf{u}_x|_{x=\pm 1} = \left(1 + \cos\frac{\pi y}{\eta}\right) e^{-i\omega t}; \quad \mathbf{u}_y|_{x=\pm 1} = 0; \quad \mathbf{u}_x|_{y=\pm\eta} = 0; \quad \mathbf{u}_y|_{y=\pm\eta} = 0. \tag{5.1}$$

Свободные члены бесконечной системы (2.7) в этом случае имеют вид

$$P_m = \frac{2\alpha_m \beta_1^2}{\Delta_m^x p_{1m}^2 (p_{1m}^2 + \beta_1^2)}; \quad Q_m = \frac{(-1)^m \delta_{1m} \beta_m}{\Delta_m^y q_{1m}} \operatorname{cth} q_{1m}. \tag{5.2}$$

Из последней формулы, следует, что при больших значениях m, свободные члены ведут себя как $O(1/m)$. Таким образом, здесь получаем $G = 0$.

При решении бесконечной системы (2.7) использовалось разложение (4.2), (4.3), так как бесконечные системы (4.2), после замены (4.4), эффективно решаются методом предельных лимитант [7] на всем диапазоне частоты вынужденных колебаний. Близость к нулю определителя конечной системы (4.3) показывает близость резонансной частоты. Положим $\nu* = 0,17$; $\eta = 1$. Тогда корень уравнения (4.11) оказывается равным $\lambda = 0,538457$. Формулы (3.3) позволяют выяснить, что в диапазоне $\Omega \in (0;\ 2\sqrt{2}) \cup (3,043;\ 3,393)$ система (2.7) является вполне регулярной, что указывает на отсутствие здесь собственных частот. Равенство нулю

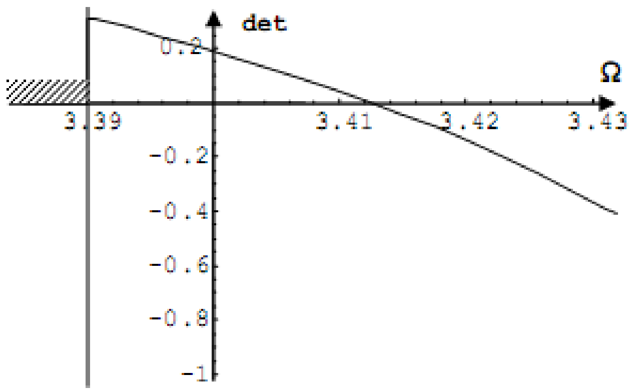

Рис.1 Определитель системы (4.3)

на данной частоте определителя конечной системы (4.3) является необходимым условием того, что эта частота является собственной. На рис. 1. представлено поведение этого определителя при данных параметрах задачи в окрестности первой собственной частоты. Таким образом, значение первой собственной частоты оказывается равным $\Omega^{(1)} = 3,4125$.

Для компонентов вектора смещений из (2.3) получаем выражения

$$
\begin{gathered}
\mathbf{u}_x = -\eta \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{p_{2m}}{\alpha_m} \frac{\operatorname{ch} p_{2m} y}{\operatorname{sh} p_{2m} \eta} - \frac{\alpha_m}{p_{1m}} \frac{\operatorname{ch} p_{1m} y}{\operatorname{sh} p_{1m} \eta} \right) (-1)^m x_m \sin \alpha_m x + \\
+ \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sh} q_{2m} x}{\operatorname{sh} q_{2m}} - \frac{\operatorname{sh} q_{1m} x}{\operatorname{sh} q_{1m}} \right) (-1)^m y_m \cos \beta_m y + \\
+ f_{10} \frac{\sin \Omega_1 x}{\sin \Omega_1} + \sum_{m=1}^{\infty} f_{1m} \frac{\operatorname{sh} q_{1m} x}{\operatorname{sh} q_{1m}} \cos \beta_m y - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_{2m} \alpha_m}{p_{1m}} \frac{\operatorname{ch} p_{1m} y}{\operatorname{sh} p_{1m} \eta} \sin \alpha_m x; \\
\mathbf{u}_y = \eta \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sh} p_{2m} y}{\operatorname{sh} p_{2m} \eta} - \frac{\operatorname{sh} p_{1m} y}{\operatorname{sh} p_{1m} \eta} \right) (-1)^m x_m \cos \alpha_m x - \\
- \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{q_{2m}}{\beta_m} \frac{\operatorname{ch} q_{2m} x}{\operatorname{sh} q_{2m}} - \frac{\beta_m}{q_{1m}} \frac{\operatorname{ch} q_{1m} x}{\operatorname{sh} q_{1m}} \right) (-1)^m y_m \sin \beta_m y + \\
+ g_{20} \frac{\sin \Omega_1 y}{\sin \Omega_1 \eta} + \sum_{m=1}^{\infty} g_{2m} \frac{\operatorname{sh} p_{1m} y}{\operatorname{sh} p_{1m} \eta} \cos \alpha_m x - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{1m} \beta_m}{q_{1m}} \frac{\operatorname{ch} q_{1m} x}{\operatorname{sh} q_{1m}} \sin \beta_m y.
\end{gathered}
\tag{5.3}
$$

Откуда следует, что ряды, представляющие смещения, являются слабо сходящимися рядами Фурье на границе, где можно улучшить их сходимость на основе закона (4.17). Условия $\mathbf{u}_x(1, y) = (1 + \cos \frac{\pi y}{\eta})$ и $\mathbf{u}_y(x, \eta) = 0$ выполняются точно по построению решения, погрешность выполнения условия $\mathbf{u}_y(1, y) = 0$ характеризует таблица 1.

Таблица 1. Выполнение граничных условий $\mathbf{u}_y(1, y) = 0$

y	простая редукция	предельные лимитанты
0,1	-0,014697	-0,000013
0,3	-0,047047	-0,000038
0,5	-0,090959	-0,000054
0,7	-0,169640	-0,000031
0,9	-0,401939	-0,001953

Здесь даны значения $\mathbf{u}_y(1, \bar{y}_j)$ при удержании в расчетах $N = 10$ первых уравнений и неизвестных для частоты $\Omega = 3,410$.

Данные этой таблицы показывают, что погрешность нарастает ближе к угловой точке (в самой угловой точке всегда имеем значения тождественно равные нулю), причем улучшение сходимости, при которой использовалось знание асимптотики (4.17), дает, в отличие от метода простой редукции, уже при удержании в расчетах $N = 10$ уравнений удовлетворительный результат. Увеличение числа вовлекаемых в расчеты неизвестных и уравнений дает возможность выполнить граничные условия с высокой точностью, несмотря на то, что значение частоты вынужденных колебаний оказывается достаточно близким к собственной частоте. Так при удержании $N = 100$ уравнений в методе предельных лимитант граничные условия выолняются с погрешностью менее 10^{-6}.

6. Заключение

Представленные численные результаты показывают, что знание асимптотики неизвестных в квазирегулярной бесконечной системе в совокупности с оценкой первых неизвестных методом предельных лимитант, позволяет значительно повысить точность вычислений, в том числе и в непосредственной близости от собственной частоты колебаний. Отметим также, что изложенный подход к исследованию бесконечной системы позволяет вычислить собственные частоты пластины.

Список цитируемых источников

1. *Гринченко В.Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. — Киев: Наук. думка, 1978. — 264с.
2. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1984. — 752 с.
3. *Папков С.О., Чехов В.Н.* Регулярные бесконечные системы алгебраических уравнений в случае длиннопериодических деформаций призмы // Ученые записки ТНУ — 2001, серия "Математика. Механика. Информатика и кибернетика". — №1. — С. 83–87.
4. *Папков С.О., Чехов В.Н.* Про існування ненульової границі для розв'язку парної нескінченної системи алгебраїчних рівнянь // Вісник ЗДУ — 2000. — №1. — С. 78–85.

5. *Папков С.О.* Бесконечные системы линейных уравнений в случае первой основной граничной задачи для прямоугольной призмы // Динамические системы — 2010. — Вып. 28. — С. 89–98.
6. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. — М.: Наука, 1981, — 800 с.
7. *Чехов В.Н., Пан А.В.* Про граничні вирази лімітант Кояловича // Доповіді НАН України — 2007. — №3. — С. 31–36.
8. *Grinchenko V.T., Ulitko A.F.* Dynamic Problem of Elastic Theory for a Rectangular Prism //Int. Appl. Mech. — 1971. — 7, №9. — P. 979–984.
9. *Mindlin R.D., Medick M.A.* Extensional vibrations of elastic plates // J. Appl. Mech. — 1959. — Vol. 26, №4. — P.541–569.
10. *Onoe M.* The contour vibrations of thin rectangular plates // J. Acoust. Amer. — 1958.— 30, №11. — P.1159–1164.

Получена 12.02.2011