Динамические системы, том 3(31), No. 3-4, 233–248

УДК 517.98+517.97

Исключение уравнения Якоби в многомерных вариационных задачах

И. В. Орлов, А. В. Цыганкова

Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 95007.
E-mail: igor_v_orlov@mail.ru, tsygankova_a_v@mail.ru

Аннотация. Показано, что экстремальная задача для вариационного функционала Эйлера-Лагранжа в многомерной области в принципе может быть решена без использования уравнения Якоби. При этом один из двух возможных случаев не требует ограничения на меру области, во втором случае возникает ограничение на меру n-мерного прямоугольника, содержащего данную область. Задача рассмотрена как в классическом C^1-случае, так и в случае пространств Соболева $W^{1,p}$. Рассмотрены некоторые приложения.

Ключевые слова: вариационный функционал, уравнение Якоби, условие Лежандра, локальный экстремум, пространства Соболева, K-экстремум.

Введение

Классическая схема исследования на локальный экстремум одномерного вариационного функционала, как хорошо известно [5], [19], предполагает решение уравнения Эйлера-Лагранжа и проверку для найденной экстремали усиленного условия Лежандра и условия Якоби отсутствия сопряженных точек для уравнения Якоби.

Последний шаг является наиболее трудоемким; при этом требуется решить достаточно сложное уравнение для получения сравнительно небольшой информации о необращении в нуль его решения.

В многочисленных работах (см. например, [1], [17]) исследовались условия, позволяющие исключить уравнение Якоби из схемы исследования на экстремум в одномерных вариационных задачах. Как правило, это дополнительные условия на функцию эксцесса Вейерштрасса, сами по себе также не очень простые. Недавно в работах первого из авторов ([24], [26]) были получены достаточные условия другого типа, содержащие только оценку длины промежутка. Показано, что в одном из двух теоретически возможных случаев, определяемых формой интегранта на экстремали, усиленное условие Лежандра $f_{y'y'}(x, y, y') \neq 0$ является достаточным условием экстремума без каких-либо дополнительных ограничений, во втором же возможном случае возникает дополнительное ограничение на длину промежутка.

Целью настоящей работы является перенос результатов [24], [26] на многомерный случай. Мы рассматриваем вариационный функционал

$$\Phi(y) = \int\limits_D f(x, y, \nabla y) dx,$$

где $y \in C^1(D)$, D — компактная область в $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей.

Отметим, что перенос условия Якоби на случай многомерного уравнения Якоби

$$-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial z_i\partial z_j}\cdot\nabla U\right]+\left[-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z_j}\right)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]\cdot U=0 \qquad (U\mid_{\partial\mathcal{D}}=0)$$

(а именно, переход к условию отсутствия сопряженной подобласти в D, в которой при нулевом граничном условии уравнение Якоби имеет ненулевое решение) оказался трудной задачей. Эта задача была окончательно решена только в 60-х—70-х годах XX века усилиями ряда выдающихся математиков (обзор теории см. например, в [6], [12]–[15]). При этом, в отличие от одномерного случая, многомерное условие Якоби приняло неалгоритмичную форму, делающую его практическое применение крайне затруднительным. Таким образом, вопрос об исключении уравнения Якоби в многомерном случае ещё более актуален, чем в одномерном.

1. Многомерное неравенство Фридрихса с оценкой меры области

Через D мы обозначим ограниченную область в пространстве $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей Г. Обозначим для краткости через M линеал функций $u(x)$, непрерывных со своими частными производными 1-го порядка включительно в $\overline{D}$ (т.е. множество $C^1(\overline{D})$). Хорошо известно классическое неравенство Фридрихса в многомерной области.

Теорема 1 ([10], с. 186)**.** *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, обладающая липшицевой границей. Тогда существуют неотрицательные постоянные c_1, c_2, зависящие от рассматриваемой области, но не зависящие от функций из M, такие что для любой функции $u\in M$*

$$\int\limits_D u^2(x)dx\le c_1\sum_{k=1}^{n}\int\limits_D\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2dx+c_2\int\limits_\Gamma u^2(l)dl.$$

(a) Рассмотрим одномерный случай: $n=1$.
В этом случае неравенство Фридрихса может быть записано в любой из следующих форм:

$$\int\limits_a^b u^2(x)dx\le c_1\int\limits_a^b u'^2(x)dx+c_2u^2(a),\qquad \int\limits_a^b u^2(x)dx\le c_1\int\limits_a^b u'^2(x)dx+c_2u^2(b),$$

$$\int\limits_a^b u^2(x)dx\le c_1\int\limits_a^b u'^2(x)dx+c_2[u^2(a)+u^2(b)]. \qquad (1)$$

Постоянные в приведенных выше неравенствах обозначены одними и теми же символами c_1, c_2. Конечно, c_1, c_2 могут иметь различные значения в каждом из этих неравенств. Например: $c_1=4(b-a)^2/\pi^2$; $\quad c_2=2(b-a)/\pi$.

Следствие 1. *Если функции линеала M удовлетворяют дополнительным условиям, а именно условиям $u(a)=0$, или $u(b)=0$, или одновременно $u(a)=0$, $\quad u(b)=0$, то для* *этих специальных случаев получаются соответствующие частные случаи приведенных выше оценок. В частности, если мы обозначим через M_1 линеал таких функций из M, которые удовлетворяют условию $u(a) = 0, \quad u(b) = 0$, то с помощью (1) можно получить оценку* $\int\limits_a^b u^2(x)dx \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int\limits_a^b u'^2(x)dx.$

(b) Рассмотрим многомерный случай: $n > 1$.

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 верна следующая формула:*

$$\int \cdots \int\limits_D u^2(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n \leq$$

$$\leq c_1 \int \cdots \int\limits_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^2 \right] dx_1 \ldots dx_n + c_2 \oint\limits_\Gamma u^2(l)dl$$

В случае, когда область D содержится в некотором n–мерном прямоугольнике: $D \subset [a_1; b_1] \times \cdots \times [a_n; b_n] = \widehat{D} \subset \mathbb{R}^n$, при условии $u \mid_\Gamma = 0$, неравенство Фридрихса может быть записано в следующей форме:

$$\int\limits_D u^2(x)dx \leq \widetilde{C}(D) \cdot \int\limits_D \left[\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 \right] dx = \widetilde{C}(D) \cdot \int\limits_D \|\nabla u\|^2 dx. \tag{2}$$

Постоянная $\widetilde{C}(D)$ в приведенном выше неравенстве может иметь различные значения. Например, можно взять $\widetilde{C}(D) = 1/(\pi^2 A)$, где $A = \sum\limits_{k=1}^n \left(1/(b_k - a_k)^2\right)$. Тогда неравенство Фридрихса (2) принимает вид:

$$\int\limits_D u^2(x)dx \leq \frac{1}{\pi^2 A} \int\limits_D \left[\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 \right] dx. \tag{3}$$

В этом случае

$$\widetilde{C}(D) = 1/\pi^2 \sum_{k=1}^n \left(1/(b_k - a_k)^2\right). \tag{4}$$

(c) Покажем теперь, как можно выразить константу (4) через меру прямоугольника $\widehat{D} \supset D$. Поскольку $\widehat{D} = \prod\limits_{k=1}^n (a_k; b_k)$, то $\mathrm{mes}_n^2(\widehat{D}) = (b_1 - a_1)^2 \times \cdots \times (b_n - a_n)^2$. Применяя соотношение между средним арифметическим и средним геометрическим, из (4), нетрудно найти:

$$\widetilde{C}(D) \leq \frac{1}{\pi^2 \cdot n} \left(\mathrm{mes}_n(\widehat{D}) \right)^{\frac{2}{n}}. \tag{5}$$

2. Исключение условия Якоби в гладком случае

Рассмотрим классический вариационный функционал Эйлера–Лагранжа

$$\Phi(y) = \int\limits_D f(x, y, \nabla y)dx \quad (y \in C^1(D)), \tag{6}$$

где $y\,|_{\partial\mathcal{D}}= 0$, $f \in C^2(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}^n_z)$, $\nabla_z f_y \in C^1(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}^n_z)$, D – компактная область с липшицевой границей, где $\nabla_z f_y$ – градиент по z от $f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Мы собираемся показать, что при выполнении уравнения Эйлера–Лагранжа $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0,0) - \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z_j}(x,0,0)\right) = 0$, и усиленного условия Лежандра в нуле $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} f(x,0,0) > 0, \quad (x \in D)$, функционал (6) *всегда* достигает строгого локального экстремума в нуле при возможном дополнительном условии. При этом, возникают два различных возможных случая, определяемых формой интегранта f: один из случаев предполагает ограничение на меру D, во втором случае нет каких-либо ограничений.

Разобьем интегрант $f(x, y, z)$ на два слагаемых:

$$f_1(x,y,z) = f(x,y,z) - f(x,0,0) - [f_y(x,0,0)\cdot y + \nabla_z f(x,0,0)\cdot z] -$$

$$-\frac{1}{2}\left[f_{y^2}(x,0,0)\cdot y^2 + 2(\nabla_z f_y(x,0,0)\cdot z)y + \lambda\cdot\nabla^2_z f(x,0,0)\cdot(z)^2\right]; \quad (0<\lambda<1)$$

$$f_2(x,y,z) = f(x,y,z) - f_1(x,y,z) = f(x,0,0) + [f_y(x,0,0)\cdot y + \nabla_z f(x,0,0)\cdot z] +$$

$$+\frac{1}{2}\left[f_{y^2}(x,0,0)\cdot y^2 + 2(\nabla_z f_y(x,0,0)\cdot z)y + \lambda\cdot\nabla^2_z f(x,0,0)\cdot(z)^2\right],$$

где $f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}$, $f^2_y = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, ∇_z – градиент по z, ∇^2_z – гессиан по z. Соответственно, обозначим $\Phi_i(y) = \int\limits_D f_i(x,y,\nabla y)dx \quad (i=1,2); \quad \Phi(y) = \Phi_1(y) + \Phi_2(y)$.

1) Вначале исследуем Φ_1 на локальный экстремум (минимум, для определенности) в нуле с помощью уравнения Эйлера–Лагранжа, условия Лежандра и условия Якоби.

(i) *Уравнение Эйлера–Лагранжа.* Нетрудно проверить, что уравнение Эйлера–Лагранжа для Φ_1 в нуле $f_{1,y}(x,0,0) - \mathrm{div}_x\big[\nabla_z f_1(x,0,0)\big] = 0$, выполняется автоматически, т.е. $y_0(x) \equiv 0$ является экстремалью функционала Φ_1.

(ii) *Усиленное условие Лежандра.* Также нетрудно проверить, что при дополнительном требовании

$$R(x) := \nabla^2_z f(x,0,0) > 0, \quad (x \in D) \tag{7}$$

имеет место усиленное условие Лежандра в нуле $\big(\nabla^2_z f_1(x,0,0) > 0, x \in D\big)$.

(iii) *Уравнение Якоби и условие Якоби.* Уравнение Якоби для Φ_1 в нуле примет вид

$$-\mathrm{div}_x\Big[(1-\lambda)\cdot\nabla^2_z f(x,0,0)\cdot\nabla U\Big] + \big[-\mathrm{div}_x\big(\nabla_z f_{1,y}(x,0,0)\big) + f_{1,y^2}(x,0,0)\big]\cdot U =$$

$$= -\mathrm{div}_x\Big[(1-\lambda)R(x)\cdot\nabla U\Big] = 0, \qquad (U\,|_{\partial\mathcal{D}}= 0).$$

Окончательно искомое уравнение принимает вид

$$\mathrm{div}_x \Big[R(x) \cdot \nabla U \Big] = 0, \tag{8}$$

где $R(x) \gg 0 \quad (x \in D)$, т. е. $(R(x) \cdot h, h) \geq \gamma^2 \cdot \|h\|^2 \quad (\forall h \in \mathbb{R}^n_x)$. Таким образом, мы пришли к задаче Дирихле с положительно определенным матричным коэффициентом $R(x)$. Как известно (см. например [16]), такая задача при нулевом граничном условии имеет только нулевое решение. Аналогично, в любой подобласти $D' \subset D$ при нулевом граничном условии: $U \mid_{\partial \mathcal{D}'} = 0$ задача (8) имеет единственное решение. Следовательно, условие отсутствия сопряженных областей (см. введение) выполнено.

Таким образом, при условии (7) Φ_1 достигает строгого локального минимума в нуле.

2) Исследуем теперь непосредственно Φ_2 на локальный экстремум в нуле. Отметим сначала, что $\Phi_2(0) = \Phi(0)$.

(i) Предположим, что уравнение Эйлера–Лагранжа для Φ в нуле справедливо:

$$f_y(x, 0, 0) - \mathrm{div}_x (\nabla_z f(x, 0, 0)) = 0 \quad (x \in D). \tag{9}$$

Тогда, интегрируя по частям, получим

$$\Phi_2(y) = \Phi_2(0) + \left[\underbrace{\int\limits_D \left(y \cdot f_y(x,0,0) - \mathrm{div}_x \left[\nabla_z f(x,0,0) \right] \right) \; dx}_{I_1} + \underbrace{\oint\limits_{\partial \mathcal{D}} \left(\nabla_z f(x,0,0) \cdot y, dl \right)}_{I_2} \right] +$$

$$+ \left[\frac{1}{2} \int\limits_D \big(f_{y^2}(x,0,0) - \mathrm{div}_x \left[\nabla_z f_y (x,0,0) \right] \big) \cdot y^2 dx + \frac{1}{2} \underbrace{\oint\limits_{\partial \mathcal{D}} \big(\nabla_z f_y (x,0,0) \cdot y^2, dl \big)}_{I_3} \right] +$$

$$+ \frac{\lambda}{2} \int\limits_D R(x) \cdot (\nabla y)^2 dx. \tag{10}$$

Заметим, что здесь $I_1 = 0$ в силу (9), $I_2 = 0$, $I_3 = 0$ в силу граничного условия $y \mid_{\partial \mathcal{D}} = 0$ (см. (6)). Введем обозначение: $Q(x) := f_{y^2}(x,0,0) - \mathrm{div}_x \left[\nabla_z f_y(x,0,0) \right]$. Тогда (10) примет вид:

$$\Phi_2(y) = \Phi_2(0) + \frac{1}{2} \int\limits_D \left[\lambda \cdot R(x) \cdot (\nabla y)^2 + Q(x) \cdot y^2 \right] dx. \tag{11}$$

Отсюда, в достаточно малой окрестности нуля в $C^1(D)$ верно:

$$\Phi(y) - \Phi(0) \geq \Phi_2(y) - \Phi_2(0) = \frac{1}{2} \int\limits_D \left[\lambda \cdot R(x) \cdot (\nabla y)^2 + Q(x) \cdot y^2 \right] dx. \tag{12}$$

(ii) Обозначим через

$$r := \min_{x \in D} \big(\max\{ \gamma^2 > 0 \mid R(x)(z)^2 \geq \gamma^2 \cdot \|z\|^2 \, (\forall z \in \mathbb{R}^n_z) \} \big) > 0, \qquad q := \min_{x \in D} Q(x). \tag{13}$$

Заметим, что максимум в определении r конечен в силу ограниченности сверху отношения $R(x)(z)^2/\|z\|^2$ $(z \neq 0)$; при этом он непрерывно зависит от x в силу непрерывности $R(x)$. Таким образом, оба минимума в (13) существуют в силу теоремы Вейерштрасса.

Рассмотрим сначала случай $q \geq 0$. Тогда при всех $x \in D$ имеем:

$$\lambda R(x)(\nabla y)^2 + Q(x)y^2 \geq \lambda r \cdot \|\nabla y\|^2 + q \cdot y^2 > 0 \quad \text{при} \quad y(x) \neq 0, \tag{14}$$

откуда, в силу (11) и (14), следует неравенство

$$\Phi_2(y) - \Phi_2(0) \geq \frac{1}{2} \int\limits_D \left[\lambda r \cdot \|\nabla y\|^2 + q \cdot y^2\right] dx > 0 \quad \text{при} \quad y(x) \neq 0. \tag{15}$$

Таким образом, в этом случае Φ_2 достигает строгого абсолютного минимума в нуле. Следовательно, с учетом неравенства (12), Φ достигает строгого локального минимума в нуле (без какого-либо ограничения на меру $\widehat{D}$).

(iii) Рассмотрим теперь случай, когда $q < 0$. Тогда, используя неравенство Фридрихса (2), получаем:

$$\Phi_2(y) - \Phi_2(0) \geq \frac{1}{2} \int\limits_D \left[\lambda \cdot r \cdot \|\nabla y\|^2 - |q| \cdot y^2\right] dx \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \int\limits_D \left[\lambda \cdot r \cdot \|\nabla y\|^2 - \widetilde{C}(D) \cdot |q| \cdot \|\nabla y\|^2\right] dx = \frac{1}{2}\left(\lambda \cdot r - \widetilde{C}(D) \cdot |q|\right) \cdot \int\limits_D \|\nabla y\|^2 dx. \tag{16}$$

Потребуем, чтобы коэффициент перед последним интегралом в (16) был строго положительным:

$$\left(\lambda \cdot r - \widetilde{C}(D) \cdot |q| > 0\right) \Leftrightarrow \left(\widetilde{C}(D) < \frac{\lambda r}{|q|}\right). \tag{17}$$

Отсюда, используя оценку (5) для константы $\widetilde{C}(D)$, получаем:

$$\frac{1}{\pi^2 \cdot n}\left(\mathrm{mes}_n(\widehat{D})\right)^{\frac{2}{n}} < \frac{\lambda r}{|q|}, \tag{18}$$

то тем самым выполнена оценка (17).

Из (16) и (17) следует, что $\Phi_2(y) > \Phi_2(0) \quad \text{при} \quad y \neq 0$, т.е. Φ_2 достигает строгого абсолютного минимума в нуле. Следовательно, в силу доказанного в пункте 1, Φ достигает строгого локального минимума в нуле при ограничении (17) на меру прямоугольника $\widehat{D} \supset D$.

Наконец, переходя к пределу в (18) при $\lambda \to 1 - 0$, последнее утверждение можно распространить на случай оценки меры $\widehat{D}$, не зависящей от λ: $\mathrm{mes}_n(\widehat{D}) \leq \left(\pi^2 rn/|q|\right)^{n/2}$.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 3. *Пусть вариационный функционал* (6) *удовлетворяет в нуле уравнению Эйлера–Лагранжа* (9) *при граничном условии* $y \mid_{\partial\mathcal{D}} = 0$. *Тогда, в обозначениях* (13), *имеем:*

1) *при* $r > 0$, $q \geq 0$, $\Phi(y)$ *достигает строгого локального минимума в нуле (без каких либо ограничений на меру* $\widehat{D}$*);*

2) при $r > 0$, $q < 0$, и при ограничении на меру $\widehat{D}$:

$$\mathrm{mes}_n(\widehat{D}) < \left(\pi^2 rn/|q|\right)^{n/2}, \tag{19}$$

$\Phi(y)$ также достигает строгого локального минимума в нуле.

Следствие 2. *В одномерном случае оценка (19) в теореме 3 принимает следующий вид:*

$$b - a < \pi \cdot \sqrt{\frac{r}{|q|}}. \tag{20}$$

(iv) Рассмотрим дополнительно, в случае $q \geq 0$, одно преобразование, вытекающее из (11) и (15), которое будет использовано в следующем разделе работы:

$$\Phi(y) - \Phi(0) = \frac{1}{2} \int\limits_D \left[\lambda \cdot R(x) \cdot (\nabla y)^2 + Q(x) \cdot y^2\right] dx \geq$$

$$\geq \frac{\min(\lambda r, q)}{2} \cdot \int\limits_D \left[\|\nabla y\|^2 + y^2\right] dx = \frac{1}{2} \min(\lambda r, q) \cdot \|y\|^2_{W^{1,2}}. \tag{21}$$

Переходя к пределу при $\lambda \to 1 - 0$ в неравенстве (21), получаем:

$$\Phi(y) - \Phi(0) \geq \frac{1}{2} \min(r, q) \cdot \|y\|^2_{W^{1,2}}. \tag{22}$$

Заметим, что переход к случаю ненулевой экстремали $y = y_0(x)$ класса $C^3(D)$ легко осуществляется с помощью введения вспомогательного вариационного функционала

$$\widetilde{\Phi}(y) = \int\limits_D f(x, y - y_0, \nabla y - \nabla y_0) dx.$$

3. Квадратичные оценки снизу стремления Φ к минимуму в нуле

Нетрудно видеть, что оценка (20) в теореме 3 не является оптимальной. Рассмотрим, например, при $n = 1$, обобщенный гармонический осциллятор

$$\Phi(y) = \int\limits_0^T (r(x) y'^2 - q(x) y^2) dx \qquad (y(0) = y(T) = 0), \tag{23}$$

где $r(x)$ и $q(x)$ — непрерывные положительные функции при $0 \leq x \leq T$. Непосредственные выкладки показывают, что уравнение Эйлера–Лагранжа в данном случае принимает вид $\dfrac{d}{dx}\left(r(x) y'\right) + q(x) y = 0$, и, таким образом, $y_0(x) \equiv 0$ — экстремаль. Уравнение Якоби, в силу чистой квадратичности интегранта по y', имеет аналогичный вид:

$$\frac{d}{dx}\left(r(x) \cdot U'\right) + q(x) \cdot U = 0 \qquad \left(U(0) = 0,\, U'(0) = 1\right). \tag{24}$$

С учётом начальных условий, будем искать его решение в виде

$$U(x) = \frac{1}{\alpha(x)} \cdot \sin\left(\int\limits_0^x \alpha(t)dt\right) \qquad (0 \le x \le T,\, \alpha(x) > 0)\,, \tag{25}$$

при этом $U(0) = 0$, и непосредственные вычисления показывают, что уравнение (24) приводится к системе уравнений

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\alpha'' \cdot \alpha^2 - 2\alpha \cdot (\alpha')^2}{\alpha^4} - \alpha\right) \cdot r - \dfrac{\alpha'}{\alpha^2} \cdot r + \alpha \cdot q = 0 \\ -\dfrac{\alpha'}{\alpha} \cdot r + r' = 0 \end{cases}$$

откуда следует

$$r = c \cdot \alpha, \qquad q = c\left(\alpha + \frac{3(\alpha')^2}{\alpha^3} - \frac{\alpha''}{\alpha^2}\right). \tag{26}$$

Положим, например, $\alpha(x) = \dfrac{1}{x+\varepsilon}$, $c = 1$. Неравенство (20) в данном случае, с учетом (26) принимает вид

$$T < \pi\sqrt{\frac{r}{|q|}} = \pi\sqrt{\frac{\varepsilon}{T+\varepsilon}}, \text{ или } T \cdot \sqrt{T+\varepsilon} < \pi\sqrt{\varepsilon}. \tag{27}$$

В то же время, решение (25) уравнения Якоби принимает вид

$$U(x) = (x+\varepsilon) \cdot \sin\left(\int\limits_0^x \frac{dt}{t+\varepsilon}\right) = (x+\varepsilon) \cdot \sin\ln\frac{x+\varepsilon}{\varepsilon},$$

и не обращается в нуль при $\left(x > 0, \quad \ln\frac{x+\varepsilon}{\varepsilon} < \pi\right) \Leftrightarrow (0 < x < (e^\pi - 1) \cdot \varepsilon)$, что приводит к условию

$$T < (e^\pi - 1) \cdot \varepsilon. \tag{28}$$

Очевидно, при $1 < \varepsilon \ll T$ условие (27) имеет порядок $T \mathrel{\widetilde{<}} \pi^{\frac{2}{3}} \cdot \varepsilon^{\frac{1}{3}}$ и является существенно более жестким, чем условие (28).

Однако, как легко можно видеть, преимущество оценки (20) состоит в возможности получить полезную квадратичную оценку снизу скорости стремления $\Phi(y)$ к минимуму посредством нормы y в пространстве Соболева $H^1(D)$.

1) Вначале рассмотрим случай $r > 0$, $q > 0$. Из неравенства (22) следует

$$\Phi_2(y) - \Phi_2(0) \ge \frac{1}{2}\min(r,q) \cdot \int\limits_D (\|\nabla y\|^2 + y^2)dx = \frac{1}{2}\min(r,q) \cdot \|y\|^2_{H^1(D)}\ .$$

Поскольку $\Phi(y) - \Phi(0) \ge \Phi_2(y) - \Phi_2(0)$ в достаточно малой окрестности нуля, то неравенство $\Phi(y) - \Phi(0) \ge \dfrac{1}{2}\min(r,q) \cdot \|y\|^2_{H^1(D)}$ верно.

2) Перейдём к случаю $r > 0$, $q < 0$. Неравенства (14) и (5) приводят к оценке

$$\Phi_2(y) - \Phi_2(0) \ge \frac{1}{2}\left[r - \frac{(\mathrm{mes}_n(\widehat{D}))^{\frac{2}{n}}}{\pi^2 \cdot n}|q|\right] \cdot \int\limits_D \|\nabla y\|^2 dx\ .$$

Поскольку из неравенства Фридрихса легко следует

$$\int\limits_D \|\nabla y\|^2 dx \geq \frac{(\mathrm{mes}_n(\widehat{D}))^{\frac{2}{n}}}{\pi^2 \cdot n + (\mathrm{mes}_n(\widehat{D}))^{\frac{2}{n}}} \cdot \|y\|^2_{H^1(D)}\ , \tag{29}$$

то из двух последних неравенств и неравенства (16), в достаточно малой окрестности нуля получаем

$$\Phi(y) - \Phi(0) \geq \frac{\pi^2 \cdot n \cdot r \cdot (\mathrm{mes}_n(\widehat{D}))^{\frac{2}{n}} - (\mathrm{mes}_n(\widehat{D}))^{\frac{4}{n}} \cdot |q|}{2(\pi^4 \cdot n^2 + \pi^2 \cdot n \cdot (\mathrm{mes}_n(\widehat{D}))^{\frac{2}{n}})} \cdot \|y\|^2_{H^1(D)}\,.$$

3) Заметим, что оценка (29) может быть применена также и в случае, когда $r > 0$, $q \geq 0$, что приводит к неравенству:

$$\Phi(y) - \Phi(0) \geq \frac{r}{2} \int\limits_D \|\nabla y\|^2 dx. \tag{30}$$

Теперь из неравенств (29) и (30) сразу следует

$$\Phi(y) - \Phi(0) \geq \frac{r \cdot (\mathrm{mes}_n(\widehat{D}))^{\frac{2}{n}}}{2(\pi^2 \cdot n + (\mathrm{mes}_n(\widehat{D}))^{\frac{2}{n}})} \cdot \|y\|^2_{H^1(D)}.$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 4. *В условиях и обозначениях теоремы 3, справедливы следующие утверждения:*

1) *при $r > 0$, $q > 0$, в достаточно малой окрестности нуля в $C^1(D)$ справедлива оценка:*

$$\Phi(y) - \Phi(0) \geq \frac{1}{2} \min(r, q) \cdot \|y\|^2_{H^1(D)};$$

2) *при $r > 0$, $q \geq 0$, в достаточно малой окрестности нуля в $C^1(D)$ справедлива оценка:*

$$\Phi(y) - \Phi(0) \geq \frac{r \cdot (\mathrm{mes}_n(\widehat{D}))^{\frac{2}{n}}}{2(\pi^2 \cdot n + (\mathrm{mes}_n(\widehat{D}))^{\frac{2}{n}})} \cdot \|y\|^2_{H^1(D)};$$

3) *при $r > 0$, $q < 0$, в достаточно малой окрестности нуля в $C^1(D)$ и при дополнительном ограничении (19) на меру $\widehat{D}$, справедлива оценка:*

$$\Phi(y) - \Phi(0) \geq \frac{\pi^2 \cdot n \cdot r \cdot (\mathrm{mes}_n(\widehat{D}))^{\frac{2}{n}} - (\mathrm{mes}_n(\widehat{D}))^{\frac{4}{n}} \cdot |q|}{2(\pi^4 \cdot n^2 + \pi^2 \cdot n \cdot (\mathrm{mes}_n(\widehat{D}))^{\frac{2}{n}})} \cdot \|y\|^2_{H^1(D)}.$$

4. Исключение уравнения Якоби: соболевский случай.

Перенесем предыдущие результаты на случай компактных экстремумов вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}(D)$, где D — компактная область в $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей. Вначале напомним понятие компактного экстремума и приведем необходимую информацию о компактных экстремумах вариационных функционалов в $W^{1,p}(D)$.

В гильбертовом пространстве Соболева $W^{1,2}(D) = H^1(D)$ с нормой

$$\|y\|^2_{H^1(D)} = \int\limits_D (y^2 + \|\nabla y^2\|)dx, \tag{31}$$

в силу известной теоремы И. В. Скрыпника ([11], Гл.11) вариационные функционалы крайне редко имеют неабсолютные локальные экстремумы. В работах И. В. Орлова [26], [23]–[8] и в работах Е. В. Божонок [20]–[4] введено и изучено общее понятие компактного экстремума (K–экстремума) функционалов (см. также [27]). Было показано, что классические, как необходимые так и достаточные, условия локального экстремума вариационного функционала в $C^1[a, b]$ можно распространить на случай K–экстремума в $W^{1,2}[a; b]$. В этом случае теория K–экстремумов сохраняет основные свойства теории локальных экстремумов и может быть распространена на случай вариационных функционалов в $W^{1,p}[a; b]$, [22]. Недавно в работах Е. М. Кузьменко [7] построено обобщение теории компактных экстремумов вариационных функционалов на случай произвольного пространства Соболева $W^{1,p}(D), p \in \mathbb{N}$, над многомерной компактной областью $D \subset \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$, с липшицевой границей.

Итак, мы будем рассматривать вариационный функционал

$$\Phi(y) = \int\limits_D f(x, y, \nabla y)dx \qquad (y \in W^{1,p}(D), p \in \mathbb{N}), \tag{32}$$

где D—компактная область в $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей. Однако вводимые ниже понятия (определения 1–5) относятся к произвольным функционалам в банаховых пространствах.

Определение 1. Пусть вещественный функционал $\Phi : E \to \mathbb{R}$ определен в некотором вещественном банаховом пространстве E. Говорят, что Φ имеет *компактный минимум* (или *K–минимум*) в точке $y_0 \in E$, если для каждого абсолютно выпуклого (а.в., т.е. выпуклый и симметричный) компакта $C \subset E$ сужение f на подпространство $(y_0{+}spanC)$, ($spanC$ – линейная оболочка множества C) имеет локальный минимум в точке y_0 по отношению к банаховой норме $\|\cdot\|_C$ в $spanC$, порожденной множеством C.

Определение 2. В обозначениях определения 1 скажем, что функционал Φ *компактно непрерывен* (*компактно дифференцируем, дважды K–дифференцируем* и т.д. (см. [3], опр. 2)) в точке $y \in E$, если для любого абсолютно выпуклого компакта $C \subset E$ сужение Φ на $(y + spanC)$, непрерывно (дифференцируемо по Фреше, дважды дифференцируемо по Фреше и т.д.) в точке y относительно нормы $\|\cdot\|_C$.

Определение 3. Пусть X, Y, Z — вещественные банаховы пространства: $D_x \subset X$, $D_y \subset Y, D_z \subset Z$ — открытые области; Z^*_k — банахово пространство k–линейных непрерывных форм на Z, $f : D_x \times D_y \times D_z \to \mathbb{R}$; $(p = 0, 1, 2 \ldots)$. Назовем функционал f *K–псевдополиномом порядка* p, если f допускает представление вида

$$f(x, y, z) = \sum_{k=0}^{p} R_k(x, y, z)(z)^k, \tag{33}$$

где коэффициенты $R_k : D_x \times D_y \times D_z \to Z_k^*$, $(k = \overline{0,p})$ — борелевские отображения, удовлетворяющие условию доминантной по x, y смешанной ограниченности, $(z)^k = \underbrace{(z, \ldots, z)}_{k \text{ раз}}$. В этом случае примем обозначение: $f \in K_p(z)$.

Определение 4. Пусть, в обозначениях определения 3, интегрант f непрерывен и принадлежит классу $K_p(z)$, $p \in \mathbb{N}$. Назовем f *вейерштрассовским K–псевдополиномом порядка p* ($f \in WK_p(z)$), если коэффициенты R_k в K–псевдополиномиальном представлении (33) можно выбрать таким образом, что коэффициенты R_k *доминантно по x, y смешанно непрерывны*. В этом случае примем также обозначения $R_k \in W_K(z)$.[1]

Определение 5. Пусть, в обозначениях определения 3, $f \in K_p(z)$. Скажем, что f принадлежит *классу Вейерштрасса* $W^n K_p(z)$, если возможно такое K–псевдополиномиальное представление f вида (33), для всех коэффициентов R_k которого все компоненты джетов n-го порядка по y, z

$$(R_k, \nabla_{yz} R_k, \ldots, \nabla_{yz}^n R_k) \qquad (k = \overline{0,p}) \tag{34}$$

принадлежат классу Вейерштрасса $W_K(z)$. В этом случае примем обозначение:
$R_k \in W_K^n(z)$, (здесь∇_{yz}^n – n-ая степень оператора ∇_{yz}).

Следующее обобщенное уравнение Эйлера–Остроградского ([3], §1.) служит для поиска K–экстремума функционала (32) в пространстве $W^{1,p}(D)$ аналогом классического необходимого условия локального экстремума вариационного функционала в $C^1(D)$.

Теорема 5. *Пусть интегрант f вариационного функционала* (32) *принадлежит классу Вейерштрасса $W^1 K_p(z)$. Предположим также, что:*
(i) функционал (32) *имеет K–экстремум в точке $y(\cdot) \in W^{1,p}(D)$;*
(ii) $\nabla_z f(x, y, \nabla y) \in W^{1,1}(D)$.
Тогда, при граничном условии $y \mid_{\partial\mathcal{D}} = y_0$, выполнено обобщенное уравнение Эйлера – Остроградского:

$$L(f)(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \nabla y) - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i}\left(\frac{\partial f}{\partial z_i}(x, y, \nabla y)\right) \overset{n.в.}{=} 0 \qquad (\textit{на} \quad D). \tag{35}$$

Решения уравнения (35), удовлетворяющие условию (ii) теоремы 5, называются *K–экстремалями* функционала (32) в пространстве $W^{1,p}(D)$.

Перейдём к доказательству основного результата работы.

Теорема 6. *Пусть вариационный функционал* (32) *удовлетворяет в нуле обобщенному уравнению Эйлера–Остроградского* (40) *при граничном условии $y \mid_{\partial\mathcal{D}} = 0$, $f \in W^2 K_p(z)$, $\nabla_z f(x, 0, 0) \in W^{1,1}(D)$. Тогда, в обозначениях* (44) *и* (39), *имеем:*

1) *при $r > 0$, $q > 0$, $\Phi(y)$ достигает строгого K–минимума в нуле (без каких либо ограничений на меру $\widehat{D}$);*

[1] Напомним (см. [3], опр. 4), что отображение $g(x, y, z)$ называется *доминантно по x, y смешанно непрерывным*, если для любых компактов $C_x \subset \mathbb{R}_x^n$, $C_y \subset \mathbb{R}_y$, отображение g равномерно непрерывно и ограниченно на $C_x \times C_y \times \mathbb{R}_z^n$.

2) при $r > 0$, $q < 0$, $s > 0$, и при ограничении (19) *на меру $\widehat{D}$, $\Phi(y)$ также достигает строгого K–минимума в нуле.*

Доказательство. Т.к. нам не известно на настоящий момент обобщение уравнения Якоби и условия Якоби на случай соболевских пространств $W^{1,p}$, мы будем опираться на другое достаточное условие K–экстремума вариационного функционала, полученное в ([3], §3).

Теорема 7. *Пусть интегрант f вариационного функционала* (32) *принадлежит классу Вейерштрасса $W^2K_p(z)$, $y(\cdot)$ — K–экстремаль функционала* (32), $\nabla_z f(x,y,\nabla y) \in W^{1,1}(D)$. *Если на K–экстремали $y(\cdot)$ при всех $x \in D$ выполнены условия:*
1) $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(x,y,\nabla y) > 0$; *2)* $(\nabla_z^2 f)(x,y,\nabla y) \gg 0$;
3) $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(x,y,\nabla y) - \nabla_z\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y,\nabla y)\cdot((\nabla_z^2 f)(x,y,\nabla y))^{-1}\cdot\left(\nabla_z\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)^T(x,y,\nabla y) > 0$;
4) $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla_z^2 f)(x,y,\nabla y) - \left(\nabla_z\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)^T(x,y,\nabla y)\cdot\nabla_z\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y,\nabla y) \gg 0$,
то вариационный функционал (32) *имеет строгий K–минимум в точке $y(\cdot)$.*

Мы собираемся показать, что, как и в C^1–случае, при выполнении обобщенного уравнения Эйлера–Остроградского и усиленного условия Лежандра в нуле, функционал (32) *всегда* достигает строгого K–экстремума в нуле, при возможном дополнительном условии на меру $\widehat{D} \supset D$.

Разобьем интегрант $f(x,y,z)$ на два слагаемых (разложение несколько меняется по сравнению с C^1–случаем):

$$f_1(x,y,z) = f(x,y,z) - f(x,0,0) - [f_y(x,0,0)\cdot y + \nabla_z f(x,0,0)\cdot z] -$$

$$-\frac{1}{2}\left[\lambda f_{y^2}(x,0,0)\cdot y^2 + 2(\nabla_z f_y(x,0,0)\cdot z)y + \lambda\cdot\nabla_z^2 f(x,0,0)\cdot(z)^2\right]; \quad (0 < \lambda < 1)$$

$$f_2(x,y,z) = f(x,y,z) - f_1(x,y,z) = f(x,0,0) + [f_y(x,0,0)\cdot y + \nabla_z f(x,0,0)\cdot z] +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\lambda f_{y^2}(x,0,0)\cdot y^2 + 2(\nabla_z f_y(x,0,0)\cdot z)y + \lambda\cdot\nabla_z^2 f(x,0,0)\cdot(z)^2\right].$$

Соответственно, обозначим $\Phi_i(y) = \int\limits_D f_i(x,y,\nabla y)dx \quad (i=1,2); \quad \Phi(y) = \Phi_1(y) + \Phi_2(y).$

1) Вначале исследуем Φ_1 на K–экстремум (K–минимум, для определенности) в нуле с помощью обобщенного уравнения Эйлера–Остроградского, условия Лежандра и теоремы 7 ("условия гессиана").

(i) *Обобщенное уравнение Эйлера–Остроградского.* Нетрудно проверить, что обобщенное уравнение Эйлера–Остроградского для Φ_1 в нуле

$$f_{1,y}(x,0,0) - \mathrm{div}_x\left[\nabla_z f_1(x,0,0)\right] \overset{\text{п.в.}}{=} 0,$$

выполняется автоматически, т.е. $y_0(x) \equiv 0$ является K–экстремалью функционала Φ_1.

(ii) *Усиленное условие Лежандра.* Также нетрудно проверить, что при дополнительном требовании

$$R(x) := \nabla_z^2 f(x,0,0) \gg 0, \quad (x \in D) \tag{36}$$

имеет место усиленное условие Лежандра для строгого K–минимума в нуле ([3], т. 12)

$$\left(\nabla_z^2 f_1(x,0,0) \gg 0, x \in D\right). \tag{37}$$

(iii) *Условие гессиана.* Имеем:

$$\left(\nabla_z f_{1,y}(x,y,z) = \nabla_z f_y(x,y,z) - \nabla_z f_y(x,0,0)\right) \Rightarrow \left(\nabla_z f_{1,y}(x,0,0) = 0\right);$$

$$\left(f_{1,y^2}(x,y,z) = f_{y^2}(x,y,z) - \lambda f_{y^2}(x,0,0)\right) \Rightarrow \left(f_{1,y^2}(x,0,0) = (1-\lambda) f_{y^2}(x,0,0) > 0\right)$$

при дополнительном условии

$$f_{y^2}(x,0,0) > 0. \tag{38}$$

Обозначим

$$s := \min_{x \in D} f_{y^2}(x,0,0) > 0. \tag{39}$$

Поэтому матрица Гессе для f_1 в точке $(x,0,0)$ по переменным (y,z) имеет вид:

$$H_{yz}(f_1)(x,0,0) = \begin{pmatrix} (1-\lambda) f_{y^2}(x,0,0) & 0 \\ 0 & (1-\lambda)\nabla_z^2 f(x,0,0) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в силу теоремы 6, при выполнении условий (38) и (37), вариационный функционал (32) достигает строгого K–минимума в нуле.

2) Исследуем теперь непосредственно Φ_2 на K–экстремум в нуле. Отметим сначала, что $\Phi_2(0) = \Phi(0)$.

(i) Предположим, что обобщенное уравнение Эйлера–Остроградского для Φ в нуле справедливо:

$$f_y(x,0,0) - \mathrm{div}_x(\nabla_z f(x,0,0)) \overset{\text{п.в.}}{=} 0 \quad (x \in D). \tag{40}$$

Тогда, интегрируя по частям, получим

$$\Phi_2(y) = \Phi_2(0) + \left[\underbrace{\int_D \left(y \cdot f_y(x,0,0) - \mathrm{div}_x\left[\nabla_z f(x,0,0)\right]\right)\ dx}_{I_1} + \underbrace{\oint_{\partial\mathcal{D}} \left(\nabla_z f(x,0,0)\cdot y, dl\right)}_{I_2}\right] +$$

$$+\left[\frac{1}{2}\int_D \left(\lambda f_{y^2}(x,0,0) - \mathrm{div}_x\left[\nabla_z f_y(x,0,0)\right]\right) y^2 dx + \frac{1}{2}\underbrace{\oint_{\partial\mathcal{D}} \left(\nabla_z f_y(x,0,0)\cdot y^2, dl\right)}_{I_3}\right] +$$

$$+\frac{\lambda}{2}\int_D R(x)\cdot(\nabla y)^2 dx. \tag{41}$$

Заметим, что здесь $I_1 = 0$ в силу (40), $I_2 = 0$, $I_3 = 0$ в силу граничного условия $y\,|_{\partial\mathcal{D}} = 0$ (см. (32)). Введем обозначения:

$$Q(x) := f_{y^2}(x,0,0) - \mathrm{div}_x\left[\nabla_z f_y(x,0,0)\right], \qquad Q_\lambda(x) := \lambda f_{y^2}(x,0,0) - \mathrm{div}_x\left[\nabla_z f_y(x,0,0)\right].$$

Тогда (41) примет вид:

$$\Phi_2(y) = \Phi_2(0) + \frac{1}{2}\int\limits_D \left[\lambda \cdot R(x) \cdot (\nabla y)^2 + Q_\lambda(x) \cdot y^2\right] dx. \tag{42}$$

Отсюда, в достаточно малой окрестности нуля в $W^{1,p}(D)$, верно:

$$\Phi(y) - \Phi(0) \geq \Phi_2(y) - \Phi_2(0) = \frac{1}{2}\int\limits_D \left[\lambda \cdot R(x) \cdot (\nabla y)^2 + Q_\lambda(x) \cdot y^2\right] dx. \tag{43}$$

(ii) Положим:

$$r := \min_{x \in D}\left(\max\{\gamma^2 > 0 \mid R(x)(z)^2 \geq \gamma^2 \cdot \|z\|^2\,(\forall z \in \mathbb{R}^n_z)\}\right) > 0,$$

$$q_\lambda := \min_{x \in D} Q_\lambda(x), \qquad q := \min_{x \in D} Q(x). \tag{44}$$

Заметим, что максимум в определении r конечен в силу ограниченности сверху отношения $R(x)(z)^2/\|z\|^2$ $(z \neq 0)$; при этом он непрерывно зависит от x в силу непрерывности $R(x)$. Таким образом, оба минимума в (50) существуют в силу теоремы Вейерштрасса.

Рассмотрим сначала случай $q > 0$. Заметим, что тогда $q_\lambda \geq 0$ при λ достаточно близком к 1. Тогда при всех $x \in D$ имеем:

$$\lambda R(x)(\nabla y)^2 + Q_\lambda(x)y^2 \geq \lambda r \cdot \|\nabla y\|^2 + q_\lambda \cdot y^2 > 0 \quad \text{при} \quad y(x) \not\equiv 0, \tag{45}$$

откуда, в силу (42) и (45), следует неравенство

$$\Phi_2(y) - \Phi_2(0) \geq \frac{1}{2}\int\limits_D \left[\lambda r \cdot \|\nabla y\|^2 + q_\lambda \cdot y^2\right] dx > 0 \quad \text{при} \quad y(x) \neq 0. \tag{46}$$

Таким образом, в этом случае Φ_2 достигает строгого абсолютного K–минимума в нуле. Следовательно, с учетом неравенства (43), Φ достигает строгого K–минимума в нуле (без какого-либо ограничения на меру $\widehat{D}$).

(iii) Рассмотрим теперь случай $q < 0$. Заметим, что тогда $q_\lambda < 0$ при λ, достаточно близком к 1. Тогда, используя неравенство Фридрихса (2), получаем:

$$\Phi_2(y) - \Phi_2(0) \geq \frac{1}{2}\int\limits_D \left[\lambda \cdot r \cdot \|\nabla y\|^2 - |q_\lambda| \cdot y^2\right] dx$$

$$\geq \frac{1}{2}\int\limits_D \left[\lambda \cdot r \cdot \|\nabla y\|^2 - \widetilde{C}(D) \cdot |q_\lambda| \cdot \|\nabla y\|^2\right] dx = \frac{1}{2}\left(\lambda \cdot r - \widetilde{C}(D) \cdot |q_\lambda|\right) \cdot \int\limits_D \|\nabla y\|^2 dx. \tag{47}$$

Потребуем, чтобы коэффициент перед последним интегралом в (47) был строго положительным:

$$\left(\lambda \cdot r - \widetilde{C}(D) \cdot |q_\lambda| > 0\right) \Leftrightarrow \left(\widetilde{C}(D) < \frac{\lambda r}{|q_\lambda|}\right). \tag{48}$$

Из полученной выше оценки (5) для меры $\widehat{D}$ находим: если выполнена оценка

$$\frac{1}{\pi^2 \cdot n}\left(\mathrm{mes}_n(\widehat{D})\right)^{2/n} < \frac{\lambda r}{|q_\lambda|}, \tag{49}$$

то тем самым выполнена оценка (48). Из (47) и (48) следует, что $\Phi_2(y) > \Phi_2(0)$ при $y \neq 0$, т.е. Φ_2 достигает строгого абсолютного K–минимума в нуле. Следовательно, в силу доказанного в пункте 1), Φ достигает строгого K–минимума в нуле при ограничении (49) на меру прямоугольника $\widehat{D} \supset D$.

Наконец, переходя к пределу в (49) при $\lambda \to 1-0$, последнее утверждение можно распространить на случай оценки меры $\widehat{D}$, не зависящей от λ: $\mathrm{mes}_n(\widehat{D}) \leq \left(\pi^2 n \cdot r/|q|\right)^{n/2}$. $\square$

Заключение

В настоящей работе метод исключения уравнения Якоби и условия Якоби, разработанный недавно для одномерного случая [24], [26], перенесён на многомерный случай [18]. Многомерная задача об исключении уравнения Якоби решена как в гладком случае, так и в случае пространств Соболева $W^{1,p}$. В качестве приложения получены квадратичные оценки снизу скорости стремления вариационного функционала $\Phi(y)$ к минимуму.

Список цитируемых источников

1. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. — М: Наука, 1979. — 429 с.
2. *Божонок Е. В., Кузъменко Е. М.* Обобщенное уравнение Эйлера–Остроградского для K-экстремалей в $W^{1,p}(D)$ // Ученые записки ТНУ им. В. И. Вернадского. Серия "Физ.-мат. науки". —2012. — Т. 25(64), №2. — С. 161–175.
3. *Божонок Е. В., Кузъменко Е. М.* Условия компактного экстремума основного вариационного функционала в шкале пространств Соболева над многомерной областью // Нелинейные граничные задачи. — Донецк: ИПММ НАНУ, 2012. — Т. 21. — С. 9–26.
4. *Божонок Е. В., Орлов И. В.* Условия Лежандра и Якоби для экстремумов вариационных функционалов в пространстве Соболева // Зб. праць Ін-ту математики НАНУ. — Київ: Ін-т математики НАНУ, 2006. — Т. 3, №4. — С. 282–293.
5. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. — М.: Физматлит, 1961. — 228 с.
6. *Зеликин М. И.* Однородные пространства и уравнение Риккати в вариационном исчислении. — М.: Факториал,1998. — 351 с.
7. *Кузъменко Е. М.* Компактно-аналитические свойства вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}$ функций многих переменных // Динамические системы. —2012. — Т. 2(30), №1-2. — С. 89–120.
8. *Орлов И. В.* Нормальная дифференцируемость и экстремумы функционалов в локально выпуклом пространстве // Кибернетика и системный анализ. — 2002. — №4. — С. 24–35.
9. *Орлов И. В.* K-дифференцируемость и K-экстремумы // Український математичний вісник. — 2006. — Т. 3, №1. — С. 97–115.
10. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. — М.: Мир, 1985. — 590 с.
11. *Скрыпник И. В.* Нелинейные эллиптические уравнения высших порядков. — Київ: Наукова думка. — 1973. — 217 с.
12. *Супрун Д. Г.* К теории минимизации кратного интеграла: Дис…канд. физ.-мат. наук: 01.01.01 — Москва, 1984.
13. *Супрун Д. Г.* Обобщение преобразования Каратеодори // Вестн. МГУ. Серия. матем., мех. — 1984. — JS3. — С. 82–85.
14. *Супрун Д. Г.* О решениях систем уравнений, связанных с задачей минимизации кратного интеграла // В сб.: Функциональный анализ и его приложения в механике и теории вероятности. — М.: Изд-во МГУ, 1984. — С. 95–102.

15. *Супрун Д. Г.* Условие Каратеодори и существование решения задачи минимизации кратного интеграла // В сб.: Методы исследования сложных систем. М., 1984. — С. 45–52.
16. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 5-е издание, 1977. — 742 с.
17. *Цлаф Л. Я.* Вариационное исчисление и интегральные уравнения. — М.: Наука, 1966. — 176 с.
18. *Цыганкова А. В.* Исключение уравнения Якоби в экстремальных вариационных задачах // Ученые записки ТНУ им. В. И. Вернадского. Серия "Физ.-мат. науки". —2012 — Т. 25(64), №2. — С. 161–175.
19. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1969. — 424 с.
20. *Bozhonok E. V.* On solutions to "almost everywhere"Euler-Lagrange equation in Sobolev space H^1. // Methods of Funct. Anal. and Top. —2007. — Vol. 13, no. 3. — P. 262–266.
21. *Bozhonok E. V.* Some existence conditions of compact extrema for variational functionals of several variables in Sobolev space H^1 // Operator Theory: Adv. and Appl. —2009. — Vol. 190. — P. 141–155.
22. *Orlov I. V.* Compact-analytical properties of variational functional in Sobolev spaces $W^{1,p}$ // Eurasian Mathematical Journal. —2012. — Vol. 3:2. — P. 94–119.
23. *Orlov I. V.* Compact extrema: general theory and its applications to the variational functionals // Operator Theory: Adv. and Appl. — 2009. — Vol. 190. — P. 397–417.
24. *Orlov I. V.* Elimination of Jacobi equation in extremal variational problems // Methods of Funct. Anal. and Top. — 2011. — Vol. 17, no. 4. — P. 341–349.
25. *Orlov I. V.* Extreme Problems and Scales of the Operator Spaces // North-Holland Math. Studies. Funct. Anal and Appl. — 2004. — Vol. 197. — P. 209–228.
26. *Orlov I. V.* Inverse extremal problem for variational functionals // Eurasian Mathematical Journal. — 2011. — Vol. 1, no. 4. — P. 95–115.
27. *Rocha E. A. M., Torres D. F. M.* First integrals for problems of calculus of variations on locally convex spaces // Applied Sciences. — 2008. — Vol. 10. — P. 207–218.

Получена 19.11.2013