Динамические системы, вып. 27 (2009), 41–50

УДК 517.983

Каноническая форма кососамосопряженного оператора в кватернионном бимодуле

И.И. Карпенко, Д.Л. Тышкевич

Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 95007. *E-mail: i_karpenko@inbox.ru*, dtyshk@inbox.ru

Аннотация. В настоящей работе строится модель кососамосопряженного оператора с простым спектром, действующего в гильбертовом кватернионном бимодуле. Полученный результат основывается на теореме о спектральном представлении кососамосопряжённого оператора по его спектральной мере. Функциональная модель позволяет решить проблему унитарного подобия кососамосопряженного оператора из данного класса оператору левого умножения на независимую переменную в соответствующем функциональном бимодуле.

Ключевые слова: тело кватернионов, гильбертов кватернионный бимодуль, кососамосопряженный оператор, спектральная мера.

1. Введение

1.1. О чём здесь речь

В данной работе строится модель кососамосопряженного оператора с простым спектром, действующего в кватернионном гильбертовом бимодуле. Этот результат основывается на теореме о спектральном представлении кососамосопряжённого оператора по его спектральной мере. В случае ограниченного нормального оператора эта спектральная теорема была анонсирована в докладе [3], а подробное исследование проведено в работе [4]. Там же указывалось, что проведённые рассуждения позволяют без труда перенести соответствующие результаты и на неограниченные кососамосопряжённые операторы. Результаты данной работы существенно развивают результаты[1] работы [1]. Построенная функциональная модель позволяет получить основной результат данной работы: теорему об унитарном подобии кососамосопряженного оператора с простым спектром и оператором левого умножения на независимую переменную в соответствующем функциональном бимодуле (теорема 3).

[1] Отметим, что со времени выхода работы [1], насколько нам позволяет судить анализ литературы, исследования по спектральным вопросам в *бесконечномерных* гильбертовых (би)модулях не проводились. Наши работы [4, 5] были, по–видимому, первыми в этом ряду после [1].

1.2. О теле $\mathbb{H}$ и $\mathbb{R}$-содержащих 2-мерных подполях $\mathbb{H}$

Для удобства читателя приведём вкратце некоторые определения и факты, касающиеся кватернионов.

Тело кватернионов $\mathbb{H}$ — вещественная алгебра размерности 4 с базисом $\{1, i, j, k\}$ и правилами умножения

$$\begin{array}{lll} i^2 = -1 & j^2 = -1 & k^2 = -1 \\ ij = k & jk = i & ki = j \\ ji = -k & kj = -i & ik = -j \end{array}$$

Для любого $q \in \mathbb{H}$ существуют такие (единственные) q_0, q_1, q_2, $q_3 \in \mathbb{R}$, что $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ (*вещественное представление* кватерниона q). Полезна также *векторная форма* записи кватерниона: $q = q_0 + \vec{q}$, где $\vec{q} = q_1 i + q_2 j + q_3 k$ — *векторная* или *мнимая часть* q (кватернион, совпадающий со своей векторной частью, называется *мнимым* или *векторным*). Так, например, векторная форма произведения кватернионов q и p есть не что иное, как хорошо известная формула умножения $qp = (q, p) + \big([\vec{q}, \vec{p}] + p_0\vec{q} + q_0\vec{p}\big)$.Здесь $(\cdot, \cdot)$ — обычное скалярное произведение в $\mathbb{H}$ относительно ортонормированной четвёрки $\{1, i, j, k\}$, а $[\cdot, \cdot]$ — векторное произведение в 3–мерном подпространстве векторных кватернионов $\mathbb{R}\langle i, j, k\rangle$.

Сопряженный кватернион к q определяется как $\overline{q} := q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k$, при этом отображение $q \to \overline{q}$ является инволюцией в $\mathbb{H}$, и $q\overline{q} = \overline{q}q = \sum_{t=0}^{3} q_t^2 \in \mathbb{R}$. *Модуль* $|q|$ кватерниона q определяется равенством $|q| = (q\overline{q})^{1/2}$, превращая таким образом $\mathbb{H}$ в нормированную алгебру. Мнимый кватернион, по модулю равный 1, называют *мнимой единицей.*

В таком случае множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ можно рассматривать как вещественную подалгебру в $\mathbb{H}$: $\mathbb{C} = \mathbb{R}\langle 1, i\rangle$. Вложение $\mathbb{C}$ в $\mathbb{H}$ позволяет получить *комплексное* (или *симплектическое*) представление кватернионов. А именно, если $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$, то $q = (q_0 + q_1 i) + (q_2 + q_3 i)j = z_1 + z_2 j$, где z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$.

На самом деле $\mathbb{C}$ служит всего лишь частным примером поля в $\mathbb{H}$, являющегося расширением $\mathbb{R}$. Всюду в данной работе такие поля мы будем обозначать буквой $\mathbb{F}$. Поле $\mathbb{F}$ — коммутативная и ассоциативная $\mathbb{R}$–алгебра с делением размерности, большей 1, поэтому из теоремы Фробениуса следует, что размерность $\mathbb{F}$ есть в точности 2, и $\mathbb{F}$ изоморфно $\mathbb{C}$.

Поле $\mathbb{F}$ однозначно определяется принадлежностью к нему некоторого невещественного кватерниона. Действительно, пусть $q \in \mathbb{F} \setminus \mathbb{R}$. Запишем этот кватернион в векторной форме: $q = q_0 + \vec{q}$. Тогда $\vec{q} = q - q_0 \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Положим $f := \frac{1}{|\vec{q}|}\,\vec{q}$. Система $\{1, f\}$ линейно независима, и, следовательно, образует базис 2–мерной $\mathbb{R}$–алгебры $\mathbb{F}$. Эти рассуждения показывают, что любые два невещественных элемента поля $\mathbb{F}$ имеют пропорциональные векторные части, что является необходимым и достаточным условием коммутирования кватернионов с соответствующими векторными частями. Поэтому всякое поле в $\mathbb{H}$, удовлетворяющее описанным выше условиям, можно охарактеризовать как совокупность всех кватернионов, коммутирующих с некоторым фиксированным невещественным кватернионом. Кроме того, упомянутое необходимое и достаточное условие приводит к тому, что соответствующая мнимая единица f определяется полем $\mathbb{F}$ с точностью до знака.

Рассмотрим теперь $\mathbb{H}$ как вещественное евклидово пространство (см. выше с. 42). Выберем некоторый кватернион ϕ, ортогональный кватернионам $1, f$ и по модулю равный 1. Тогда $\phi^2 = (\phi, \phi) = -1$; кватернион $f\phi \,(= [f, \phi])$ ортогонален кватернионам $1, f, \phi$, при этом $f\phi = [f, \phi] = -[\phi, f] = -\phi f$, откуда $(f\phi)^2 = -1$. Таким образом четвёрка $\{1, f, \phi, f\phi\}$ образует $\mathbb{R}$–базис в $\mathbb{H}$, состоящий из 1 и трёх мнимых единиц. Такой базис позволяет определить однозначное разложение $q = q_0 + \widetilde{q}_1 f + \widetilde{q}_2 \phi + \widetilde{q}_3 f\phi$,которое (аналогично комплексному разложению) приводит к разложению относительно поля $\mathbb{F}$: $q = (q_0 + \widetilde{q}_1 f) + (\widetilde{q}_2 + \widetilde{q}_3 f)\phi = u_1 + u_2\phi$,где $u_1,\, u_2 \in \mathbb{F}$. Заметим, что выбор соответствующего кватерниона ϕ для поля $\mathbb{F}$ неоднозначен.

1.3. Соглашения и обозначения

В работе в основном приняты обычные обозначения. Некоторые обозначения оговариваются по ходу их введения (например, Lin, Clos (формула (5), с. 45)). Под *линейным оператором* в $\mathbb{H}$–бимодуле мы подразумеваем *правосторонне* линейный оператор. Аддитивный оператор мы будем называть $\mathbb{F}$–*линейным* (или $\mathbb{R}$–*линейным*), если имеет место его однородность относительно скаляра из поля $\mathbb{F}$ (соответственно из поля $\mathbb{R}$.) При этом $\mathbb{R}$–*линейный оператор* A является $\mathbb{F}$–*линейным* $\Leftrightarrow R_f A = A R_f$ (здесь f — мнимая единица, порождающая поле $\mathbb{F}$); $\mathbb{F}$–*линейный оператор* A является $\mathbb{H}$–*линейным* $\Leftrightarrow R_\phi A = A R_\phi$.

Особо важен для исследования операторов в кватернионных модулях *оператор правого умножения* $R_q x := xq$,$(x \in H,\ q \in \mathbb{H})$. (Заметим, что, вообще говоря, оператор R_q не является $\mathbb{H}$–линейным, но он является $\mathbb{F}$–линейным, где поле $\mathbb{F}$ порождено кватернионом q, см. выше). Полезно перечислить следующие простые свойства оператора правого умножения, которые используются в данной работе без особых оговорок: $R_{p+q} = R_p + R_q$; $R_{pq} = R_q R_p$.

Отметим, что все результаты данной работы останутся в силе, если слово "бимодуль" заменить на "правый модуль"; рассмотрение именно бимодулей связано с традицией наших предыдущих работ.

Всюду далее мы зафиксируем некоторую мнимую единицу f и поле $\mathbb{F}$, порождённое ею. В заключение заметим, что все рассуждения, касающиеся $\mathbb{F}$–модулей (ортогональность и пр.), в силу изометрического изоморфизма между $\mathbb{F}$ и $\mathbb{C}$ повторяют соответствующие рассуждения для $\mathbb{C}$–модулей.[2] В этом случае мы используем соответствующую символику $\perp_{\mathbb{F}}$, $\oplus_{\mathbb{F}}$ и пр.

[2]Обратим здесь внимание читателя на следующий замечательный феномен, присущий телу кватернионов и касающийся соотношений между понятиями "равенство" и "изоморфизм". Хотя каждое такое поле $\mathbb{F}$ изоморфно $\mathbb{C}$, и поэтому с точки зрения *алгебры* является "неинтересным но оно представляет собой *уникальную* "копию" $\mathbb{C}$ в $\mathbb{H}$, что становится весьма существенным для *анализа*. В частности, наша теория дифференцируемости функций кватернионного переменного ([2]) основана именно на "игре" этими свойствами.

2. Модель кососамосопряженного оператора с простым спектром

2.1. Спектральная теорема

Упомянутая во введении спектральная теорема для кососамосопряжённого оператора может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 1. *Пусть A — кососамосопряжённый оператор, действующий в гильбертовом кватернионном бимодуле H, $\mathbb{F}$ — произвольное $\mathbb{R}$–содержащее 2–мерное поле. Тогда существует такая однозначно определённая спектральная мера E, заданная на семействе $\mathfrak{B}(\mathbf{f}_+)$ всех борелевских подмножеств неотрицательной полуоси $\mathbf{f}_+ = \{\tau f \mid \tau \geq 0\}$, и такой кососамосопряжённый оператор J, коммутирующий с E и удовлетворяющий равенству $J^2 = -I$, что выполняются равенства*

$$\mathcal{D}(A) = \{h \in H \mid \int_{\sigma_{\mathbb{F}_+}(A)} |q|^2 \langle E(dq)h, h\rangle < \infty\}\,;$$

$$A = \int_{\mathbf{f}_+} R_{-qf} J E(dq)\,. \tag{1}$$

($\mathcal{D}(A)$ — область определения оператора A).

Интеграл в (1) понимается как сильный предел

$$Ah = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,nf]} R_{-qf} J E(dq) h\,, \quad h \in \mathcal{D}(A).$$

При этом спектральная мера E может быть определена как

$$E(\alpha) := \begin{cases} E_{\mathbb{F}}(\alpha) + E_{\mathbb{F}}(-\alpha),\ 0 \notin \alpha, \\ E_{\mathbb{F}}(\alpha) + E_{\mathbb{F}}(-\alpha) - E_{\mathbb{F}}(\{0\}),\ 0 \in \alpha \end{cases} \quad \big(\alpha \in \mathfrak{B}(\mathbf{f}_+)\big), \tag{2}$$

где $E_{\mathbb{F}}$ — заданная на борелевских подмножествах оси $\mathbf{f} = f\mathbb{R}$ $\mathbb{F}$–линейная спектральная мера $\mathbb{F}$–симплектического образа оператора A; т.е спектральная мера A, действующего в H как в $\mathbb{F}$–модуле. Последний изометрически изоморфен H как $\mathbb{C}$–модулю, поэтому для построения $E_{\mathbb{F}}$ используется классическая спектральная теорема. При этом J и $E_{\mathbb{F}}$ связаны формулой

$$J = R_f\big(E_{\mathbb{F}}(\mathbf{f}_+) - E_{\mathbb{F}}(\mathbf{f}_-)\big), \tag{3}$$

где $\mathbf{f}_- = \{\tau f \mid \tau < 0\}$ — отрицательная полуось поля $\mathbb{F}$. Отметим в связи с формулой (2), что $\mathbb{H}$–линейность меры E равносильна выполнению равенства

$$E_{\mathbb{F}}(\alpha) R_\phi = R_\phi E_{\mathbb{F}}(-\alpha) \quad \big(\alpha \in \mathfrak{B}(\mathbf{f}_+)\big).$$

В частности, если мы положим $H^+ = E_{\mathbb{F}}(\mathbf{f}_+)H$, то

$$H = H^+ \oplus_{\mathbb{F}} R_\phi H^+. \tag{4}$$

2.2. Операторы с простым спектром

Пусть A — кососамосопряженный оператор с плотной областью определения $\mathcal{D}(A)$, действующий в гильбертовом кватернионном бимодуле H. В соответствии с теоремой 1 каждый такой оператор определяет разложение единицы E оператора A и соответствующий оператор J, коммутирующий с этим разложением.

Обозначим через $\mathcal{I}$ совокупность всех (ограниченных) интервалов Δ полуоси $\mathbf{f}_+$, $\Delta = [af, bf]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $0 \le a < b$.

Определение. Оператор A назовем оператором *с простым спектром*, если существует *порождающий* вектор $g \in H$, т.е. такой вектор, что

$$\operatorname{Clos}\operatorname{Lin}\{E(\Delta)g \mid \Delta \in \mathcal{I}\} = H \tag{5}$$

(здесь Lin — (правосторонняя) $\mathbb{H}$–линейная оболочка, Clos — замыкание по норме в H).

Далее обосновывается ключевое для дальнейших построений утверждение о существовании порождающего вектора g для оператора A, удовлетворяющего равенству

$$Jg = R_f g. \tag{6}$$

Пусть $\mathcal{T} = \{T_i\}_{i\in I}$ — некоторое семейство операторов в H, $g \in H$ — некоторый вектор. Положим

$$\mathcal{C}(\mathcal{T}, g) = \operatorname{Clos}\operatorname{Lin}\{T_i g \mid i \in I\}; \quad \mathcal{C}_{\mathbb{F}}(\mathcal{T}, g) = \operatorname{Clos}\operatorname{Lin}_{\mathbb{F}}\{T_i g \mid i \in I\}.$$

(здесь $\operatorname{Lin}_{\mathbb{F}}$ — (правосторонняя) $\mathbb{F}$–линейная оболочка). Из элементарных свойств линейной оболочки и замыкания следуют свойства:

$$\mathcal{C}_{\mathbb{F}}(\mathcal{T}, g_1 + g_2) \subseteq \operatorname{Clos}\big(\mathcal{C}_{\mathbb{F}}(\mathcal{T}, g_1) + \mathcal{C}_{\mathbb{F}}(\mathcal{T}, g_2)\big); \tag{7}$$

$$\mathcal{C}(\mathcal{T}, g) = \operatorname{Clos}\big(\mathcal{C}_{\mathbb{F}}(\mathcal{T}, g) + R_\phi \mathcal{C}_{\mathbb{F}}(\mathcal{T}, g)\big) \tag{8}$$

(включение (7), конечно же, выполняется и для $\mathcal{C}(\cdot,\cdot)$; равенство (8) следует из очевидного равенства для линейных оболочек: $\operatorname{Lin} S = \operatorname{Lin}_{\mathbb{F}} S + R_\phi \operatorname{Lin}_{\mathbb{F}} S$). Если семейство $\mathcal{T}$ замкнуто относительно произведения операторов, то

$$h \in \mathcal{C}_{\mathbb{F}}(\mathcal{T}, g) \Rightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{F}}(\mathcal{T}, h) \subseteq \mathcal{C}_{\mathbb{F}}(\mathcal{T}, g) \quad (\textit{если} \ \ \forall\, i, j \in I \quad T_i T_j \in \mathcal{T}) \tag{9}$$

(то же справедливо и для $\mathcal{C}(\cdot,\cdot)$). Положим теперь

$$\mathcal{E} = \{E(\Delta) \mid \Delta \in \mathcal{J}\}, \quad \mathcal{E}_{\mathbb{F}} = \{E_{\mathbb{F}}(\Delta) \mid \Delta \in \mathcal{J}\}.$$

Тогда наряду с (7) — (9) для $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_{\mathbb{F}}$ также будут выполняться соотношения, элементарно выводимые из свойств спектральных мер:

$$\forall\, g \in H \quad \mathcal{C}_{\mathbb{F}}(\mathcal{E}_{\mathbb{F}}, g) \subseteq H^+; \tag{10}$$
$$g \in H^+ \Rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{E}, g) = \mathcal{C}_{\mathbb{F}}(\mathcal{E}_{\mathbb{F}}, g); \tag{11}$$
$$\forall\, g \in H \quad \mathcal{C}(\mathcal{E}, R_\phi g) = R_\phi \mathcal{C}(\mathcal{E}, g); \tag{12}$$
$$h \perp_{\mathbb{F}} \mathcal{C}_{\mathbb{F}}(\mathcal{E}_{\mathbb{F}}, g) \Rightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{F}}(\mathcal{E}_{\mathbb{F}}, h+g) = \mathcal{C}_{\mathbb{F}}(\mathcal{E}_{\mathbb{F}}, h) \oplus_{\mathbb{F}} \mathcal{C}_{\mathbb{F}}(\mathcal{E}_{\mathbb{F}}, g). \tag{13}$$

Предложение. *Пусть A — оператор с простым спектром. Тогда существует*[3] *порождающий вектор g, удовлетворяющий равенству* (6).

Доказательство. Пусть y — порождающий вектор для оператора A, т.е выполнено равенство

$$H = \mathcal{C}(\mathcal{E}, y). \tag{14}$$

Согласно (4) для некоторых векторов $y^+, x^+ \in H^+ \quad y = y^+ + R_\phi x^+$. Положим

$$\mathfrak{Y}^+ = \mathcal{C}_{\mathbb{F}}(\mathcal{E}_{\mathbb{F}}, y^+), \quad \mathfrak{X}^+ = \mathcal{C}_{\mathbb{F}}(\mathcal{E}_{\mathbb{F}}, x^+). \tag{15}$$

Тогда

$$\mathcal{C}_{\mathbb{F}}(\mathcal{E}, y) \overset{(7)}{\subseteq} \operatorname{Clos}\big(\mathcal{C}(\mathcal{E}, y^+) + \mathcal{C}(\mathcal{E}, R_\phi x^+)\big) \overset{(12),(11),(15)}{=} \operatorname{Clos}(\mathfrak{Y}^+ + R_\phi \mathfrak{X}^+), \tag{16}$$

отсюда

$$R_\phi \mathcal{C}_{\mathbb{F}}(\mathcal{E}, y) \subseteq \operatorname{Clos}(R_\phi \mathfrak{Y}^+ + \mathfrak{X}^+). \tag{17}$$

Далее,

$$H \overset{(14),(8),(16),(17)}{\subseteq} \operatorname{Clos}\big(\mathfrak{Y}^+ + R_\phi \mathfrak{X}^+ + R_\phi \mathfrak{Y}^+ + \mathfrak{X}^+\big) \overset{(4),(10)}{=}$$
$$= \operatorname{Clos}\big((\mathfrak{Y}^+ + \mathfrak{X}^+) \oplus_{\mathbb{F}} R_\phi(\mathfrak{Y}^+ + \mathfrak{X}^+)\big) = \operatorname{Clos}(\mathfrak{Y}^+ + \mathfrak{X}^+) \oplus_{\mathbb{F}} R_\phi \operatorname{Clos}(\mathfrak{Y}^+ + \mathfrak{X}^+),$$

откуда в силу (4),(10) заключаем, что

$$H^+ = \operatorname{Clos}(\mathfrak{Y}^+ + \mathfrak{X}^+). \tag{18}$$

Пусть теперь v^+ — $\mathbb{F}$–ортогональная проекция вектора x^+ на $H^+ \ominus_{\mathbb{F}} \mathfrak{X}^+$, и $x^+ = v^+ + w^+,\ w^+ \in \mathfrak{X}^+$. Положим $g = y^+ + v^+$. Покажем, что g является искомым вектором. Так как $g \in H^+$, то в силу самого определения (3) он удовлетворяет (6). Покажем, что g является порождающим. Положим $\mathfrak{V}^+ = \mathcal{C}_{\mathbb{F}}(\mathcal{E}, v^+)$. Согласно (9)

$$\mathcal{C}_{\mathbb{F}}(\mathcal{E}, w^+) \subseteq \mathfrak{Y}^+, \tag{19}$$

поэтому

$$\mathfrak{Y}^+ + \mathfrak{X}^+ = \mathfrak{Y}^+ + \mathcal{C}_{\mathbb{F}}(\mathcal{E}_{\mathbb{F}}, v^+ + w^+) \overset{(13)}{=} \mathfrak{Y}^+ + \mathfrak{V}^+ + \mathcal{C}_{\mathbb{F}}(\mathcal{E}_{\mathbb{F}}, w^+) \overset{(19),(13)}{=} \mathfrak{Y}^+ \oplus_{\mathbb{F}} \mathfrak{V}^+ \tag{20}$$

[3] Идея построения специального порождающего вектора в Предложении возникла под влиянием рассуждений в [1, Prop. 5.2].

С другой стороны,

$$H^+ \overset{(18),(20)}{=} \mathcal{C}_{\mathbb{F}}(\mathcal{E}_{\mathbb{F}}, y^+) \oplus_{\mathbb{F}} \mathcal{C}_{\mathbb{F}}(\mathcal{E}_{\mathbb{F}}, v^+) \overset{(13)}{=} \mathcal{C}_{\mathbb{F}}(\mathcal{E}_{\mathbb{F}}, y^+ + v^+) \overset{(11)}{=} \mathcal{C}_{\mathbb{F}}(\mathcal{E}, g). \qquad (21)$$

Из (21), (8), (4) получаем окончательно $H = \mathcal{C}(\mathcal{E}, g)$, т.е. вектор g — порождающий. □

2.3. Построение модели

Всюду далее будем предполагать, что порождающий вектор g кососамосопряжённого оператора A с простым спектром удовлетворяет равенству (6).

Рассмотрим оператор

$$(Qh)(\lambda) = \lambda h(\lambda),$$

действующий в $\mathbb{H}$–бимодуле $L^2_\sigma(\mathbf{f}_+, \mathbb{H})$ всех квадратично суммируемых функций на полуоси $\mathbf{f}_+$ со значениями в $\mathbb{H}$ по счётно-аддитивной мере σ. Если в качестве области определения взять

$$\mathcal{D}(Q) = \big\{h \in L^2_\sigma \mid \int_{\mathbf{f}_+} |\lambda|^2 \, |h(\lambda)|^2 \sigma(d\lambda) < \infty\big\},$$

то стандартными рассуждениями можно показать, что это кососамосопряженный оператор.

Построим разложение единицы оператора Q. Для нахождения спектральной меры $E_{\mathbb{F}}$ мы воспользуемся модификацией стандартного алгоритма, рассмотренного в нашей работе [4]. В частности, для любого интервала (af, bf), $-\infty < a < b < \infty$, и любой функции h из $\mathcal{D}(Q)$ вида $h(\lambda) = h_1(\lambda) + h_2(\lambda)\phi$, где $h_1(\lambda), h_2(\lambda) \in \mathbb{F}$, будем иметь

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{F}}\big((af, bf)\big)h(\lambda) &= \chi_{(a,b)}(-\lambda f)h_1(\lambda) + \chi_{(a,b)}(\lambda f)h_2(\lambda)\phi = \\ &= \chi_{(af,bf)}(\lambda)h_1(\lambda) + \chi_{(-bf,-af)}(\lambda)h_2(\lambda)\phi. \end{aligned}$$

Поэтому для любого $\alpha \in \mathfrak{B}(\mathbf{f})$

$$E_{\mathbb{F}}(\alpha)h(\lambda) = \chi_\alpha(\lambda)h_1(\lambda) + \chi_{-\alpha}(\lambda)h_2(\lambda)\phi.$$

Отсюда следует, что для $\alpha \in \mathfrak{B}(\mathbf{f}_+ \backslash \{0\})$

$$E_{\mathbb{F}}(\alpha)h(\lambda) = \chi_\alpha(\lambda)h_1(\lambda), \;\; E_{\mathbb{F}}(-\alpha)h(\lambda) = \chi_\alpha(\lambda)h_2(\lambda)\phi,$$

и в результате

$$E(\alpha)h(\lambda) = \chi_\alpha(\lambda)h(\lambda).$$

Если же $\alpha \in \mathfrak{B}(\mathbf{f}_+)$, $0 \in \alpha$, то

$$\begin{cases} E_{\mathbb{F}}(\alpha)h(\lambda) &= \chi_\alpha(\lambda)h_1(\lambda) + \widetilde{h}_2(\lambda)\phi, \\ E_{\mathbb{F}}(-\alpha)h(\lambda) &= \widetilde{h}_1(\lambda) + \chi_\alpha(\lambda)h_2(\lambda)\phi, \end{cases}$$

где

$$\widetilde{h}_r(\lambda) = \begin{cases} h_1(0), & \lambda = 0, \\ 0, & \lambda \neq 0, \end{cases} \quad (r = 1, 2).$$

С учетом того, что

$$E_{\mathbb{F}}(\{0\})h(\lambda) = \begin{cases} h(0), & \lambda = 0, \\ 0, & \lambda \neq 0, \end{cases}$$

получаем также

$$E(\alpha)h(\lambda) = \chi_\alpha(\lambda)h(\lambda).$$

Согласно (3) и рассмотренным выше формулам соответствующий оператор J для оператора Q имеет вид (почти всюду и за исключением точки 0):

$$(Jh)(\lambda) = (h_1(\lambda) - h_2(\lambda)\phi)f.$$

Рассмотрим функцию

$$g(\lambda) = \alpha_k,\ \lambda \in \Delta_k = \big((k-1)f, kf\big),\ \alpha_k \in \mathbf{f}_+ \backslash \{0\},$$

с условием $\sum |\alpha_k|^2 \sigma(\Delta_k) < \infty$. Эта функция является порождающей для оператора Q в смысле Определения. Действительно, (правая) кватернионная линейная оболочка множества функций $E(\Delta)g(\lambda)$ совпадает с совокупностью всех финитных кусочно-постоянных функций, а эта совокупность плотна в $L^2_\sigma(\mathbf{f}_+, \mathbb{H})$. Заметим, что $(Jg)(\lambda) = \alpha_k f,\ \lambda \in \Delta_k$, т.е. $Jg = R_f g$. Для краткости обозначим $L^2_\sigma(\mathbf{f}_+, \mathbb{H})$ через L^2_σ.

Теорема 2. *Пусть A — кососамосопряженный оператор с простым спектром, действующий в гильбертовом кватернионном бимодуле H, g — порождающий вектор, $\sigma(\alpha) = \langle E(\alpha)g, g\rangle$ — мера, определенная на σ–алгебре $\mathfrak{B}(\mathbf{f}_+)$. В таком случае отображение $\Phi\colon L^2_\sigma \to H$, действующее по правилу*

$$\Phi h = \int_{\mathbf{f}_+} R_{h(\lambda)} E(d\lambda) g,$$

устанавливает изометрический изоморфизм между L^2_σ и H, причём

$$A\Phi h = \int_{\mathbf{f}_+} R_{\lambda h(\lambda)} E(d\lambda) g.$$

Доказательство. Обозначим через

$$G = \Big\{\widehat{h} \in H \mid \exists\, h \in L^2_\sigma :\ \widehat{h} = \int_{\mathbf{f}_+} R_{h(\lambda)} E(d\lambda) g\Big\} = \Im(\Phi).$$

Пусть Δ — интервал в $\mathbf{f}_+$, тогда $\chi_\Delta \in L^2_\sigma$, и

$$\Phi\chi_\Delta = \int_{\mathbf{f}_+} E(d\lambda) g \chi_\Delta(\lambda) = \int_\Delta E(d\lambda) g = E(\Delta) g.$$

Следовательно, G плотно в H. Пусть $\widehat{h} \in G$. Тогда $\langle \widehat{h}, \widehat{h}\rangle_H = \int_{\mathbf{f}_+} \langle E(d\lambda)g, \widehat{h}\rangle h(\lambda)$. Так как

$$\langle E(\alpha)g, \widehat{h}\rangle = \int_{\mathbf{f}_+} \langle E(\alpha)g, E(d\lambda)gh(\lambda)\rangle = \int_{\mathbf{f}_+} \overline{h(\lambda)}\langle E(d\lambda)E(\alpha)g, g\rangle =$$
$$= \int_{\alpha} \overline{h(\lambda)}\langle E(d\lambda)g, g\rangle = \int_{\alpha} \overline{h(\lambda)}\sigma(d\lambda),$$

то

$$\langle \widehat{h}, \widehat{h}\rangle_H = \int_{\mathbf{f}_+} |h(\lambda)|^2\sigma(d\lambda) = \langle h(\lambda), h(\lambda)\rangle_{L^2_\sigma}.$$

Таким образом, отображение Φ изометрически переводит плотное подмножество в L^2_σ в плотное подмножество G. Из полноты L^2_σ следует замкнутость подмножества G. Следовательно, $G = H$, а оператор Φ унитарен.

Докажем вторую часть теоремы. Пусть h — финитная функция из L^2_σ с носителем $[af, bf]$, $\widehat{h} = \int_{\mathbf{f}_+} R_{h(\lambda)}E(d\lambda)g$. Докажем, что $\widehat{h} \in D(A)$, рассмотрев выражение $\int_{\mathbf{f}_+} |\lambda|^2\langle E(d\lambda)\widehat{h}, \widehat{h}\rangle$. Так как

$$\langle E(\alpha)\widehat{h}, \widehat{h}\rangle = \int_{\mathbf{f}_+} \overline{h(\nu)}\langle E(\alpha)\widehat{h}, E(d\nu)g\rangle = \int_{\mathbf{f}_+} \overline{h(\nu)}\langle \widehat{h}, E(\alpha)E(d\nu)g\rangle = \int_{\alpha} \overline{h(\nu)}\langle \widehat{h}, E(d\nu)g\rangle,$$

и, в свою очередь,

$$\langle \widehat{h}, E(\beta)g\rangle = \int_{\mathbf{f}_+} \langle E(d\xi)g, E(\beta)g\rangle h(\xi) = \int_{\beta} \langle E(d\xi)g, g\rangle h(\xi) = \int_{\beta} \sigma(d\xi)h(\xi),$$

то

$$\langle E(\alpha)\widehat{h}, \widehat{h}\rangle = \int_{\alpha} |h(\nu)|^2\sigma(d\nu).$$

Следовательно,

$$\int_{\mathbf{f}_+} |\lambda|^2\langle E(d\lambda)\widehat{h}, \widehat{h}\rangle = \int_{\mathbf{f}_+} |\lambda|^2|h(\lambda)|^2\sigma(d\lambda) = \int_{[af,bf]} |\lambda|^2|h(\lambda)|^2\sigma(d\lambda) < \infty.$$

Далее, для любого вектора $\widehat{h} = \Phi h \in \mathcal{D}(A)$ $\quad A\widehat{h} = \int_{\mathbf{f}_+} R_{-\lambda f}JE(d\lambda)\widehat{h}$. Так как

$$E(\alpha)\widehat{h} = \int_{\mathbf{f}_+} E(\alpha)R_{h(nu)}E(d\nu)g = \int_{\mathbf{f}_+} R_{h(\nu)}E(\alpha)E(d\nu)g = \int_{\alpha} R_{h(\nu)}E(d\nu)g,$$

то в силу линейности операторов $R_{-\lambda f}$, J, а также перестановочности J с разложением единицы имеем:

$$A\widehat{h} = \int_{\mathbf{f}_+} R_{-\lambda f}JR_{h(\lambda)}E(d\lambda)g = \int_{\mathbf{f}_+} R_{h(\lambda)}R_{-\lambda f}E(d\lambda)Jg = \int_{\mathbf{f}_+} R_{h(\lambda)}R_{-\lambda f}E(d\lambda)R_f g =$$
$$= \int_{\mathbf{f}_+} R_{h(\lambda)}R_{\lambda}E(d\lambda)g = \int_{\mathbf{f}_+} R_{\lambda h(\lambda)}E(d\lambda)g.$$

$\square$

Таким образом, на финитных функциях из L^2_σ выполняется равенство $A\Phi = \Phi Q$, или $A = \Phi Q \Phi^{-1}$. В качестве следствия получим *основной результат данной работы*:

Теорема 3. *Всякий кососамосопряженный оператор, действующий в кватернионном гильбертовом бимодуле, унитарно подобен оператору левого умножения на независимую переменную в функциональном бимодуле* L^2_σ.

Список цитируемых источников

1. *Viswanath K.* Normal operators on quaternionic Hilbert spaces/ K. Viswanath. — Trans. Amer. Math. Soc. — 1971. — v. 162. — p. 337–350
2. *Карпенко И. И.* Об одном подходе к дифференцированию функций кватернионного переменного/ И. И. Карпенко, А. И. Сухтаев, Д. Л. Тышкевич. — Учёные записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского, серия "Математика. Механика. Информатика и кибернетика." — 2004. — Т.17(56), №1. — С. 30–37
3. *Karpenko I. I.* Spectral decomposition of a normal operator in a quatenionic Hilbert bimodule/ I. I. Karpenko, D. L. Tyshkevich. — Book of abstracts, The Banach Center Conference Analysis and Partial Differential Equations (In honor of Professor Bogdan Bojarski), June 18–24, 2006, Mathematical Research and Conference Center, Poland, Będlewo. — 2006. — P. 21–22
4. *Карпенко И. И.* Спектральное представление нормальных операторов в кватернионных гильбертовых бимодулях/ И. И. Карпенко, А. И. Сухтаев, Д. Л. Тышкевич. — Учёные записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского, серия "Математика. Механика. Информатика и кибернетика." — 2006. — Т.19(58), №1. — С. 3–20
5. *Карпенко И. И.* Спектральные свойства линейных операторов над гильбертовыми кватернионными бимодулями/ И. И. Карпенко, Д. Л. Тышкевич. — Математичнi Студiї. — 2008. — Т. 30, №1. — С. 67–82

Получена 10.12.2009