

УДК 519.8

Полная топологическая классификация одной модели экологической конкуренции в регулярном случае

В.С. Чернышенко, В.Е. Белозеров

Днепропетровский национальный университет,
Днепропетровск 49050. E-mail: *belozvye@mail.ru*

Аннотация. Проведен анализ модификации классической модели Лотки-Вольтерры экологической конкуренции двух видов. Рассматриваемая модель обобщает классическую, учитывая возможность существования генетически закрепленного алгоритма распределения энергии между процессами развития и конкуренции, а также изменения характера реакции каждой из популяций в зависимости от численности популяции-конкурента. Для регулярного невырожденного случая получены все топологически неэквивалентные фазовые портреты модифицированной модели. Сформулированы и доказаны соответствующие теоремы. Представлены графики типичных фазовых портретов каждого типа.

1. Введение

Постановка проблемы и ее актуальность. Статья посвящена исследованию топологии фазового пространства модифицированной системы Лотки-Вольтерры, описывающей динамику двух популяций, конкурирующих за природные ресурсы. Обоснование соответствующей модели и ее предварительный анализ были проведены в статье авторов [1].

Модель имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) \left[\frac{r_x}{1 + l_x x(t)y(t)} \left(1 - \frac{x(t)}{k_x} \right) - \frac{r_y l_y y^2(t)}{1 + l_y x(t)y(t)} \left(1 - \frac{y(t)}{k_y} \right) \right] \equiv f_1(x, y), \\ \dot{y}(t) = y(t) \left[\frac{r_y}{1 + l_y x(t)y(t)} \left(1 - \frac{y(t)}{k_y} \right) - \frac{r_x l_x x^2(t)}{1 + l_x x(t)y(t)} \left(1 - \frac{x(t)}{k_x} \right) \right] \equiv f_2(x, y), \end{cases} \quad (1.1)$$

где $x(t)$, $y(t)$ – функции изменения численности видов во времени; $r_x, r_y, l_x, l_y, k_x, k_y$ – положительные параметры, биологический смысл которых обсужден в [1].

В настоящей работе ставилась задача более подробно исследовать возможные сценарии развития системы и определить математически строго, как параметры системы влияют на исход конкурентной борьбы. Для регулярных случаев (т.е. для случаев, когда параметры системы не принимают бифуркационных значений) удалось построить полную классификацию фазовых портретов, включающих такие интересные случаи асимптотического поведения как предельный цикл.

Поставленная проблема представляется весьма актуальной, как в практическом, так и в теоретическом отношении. Процессы конкуренции являются, фактически, основным фактором процессов экологической самоорганизации, и их лучшее понимание может существенно облегчить решение экологических проблем. Так, для экологов Днепропетровщины важнейшей проблемой является сохранение лесных биогеоценозов, существующих в условиях жесткой конкуренции с господствующими степными экосистемами.

Обзор состояния проблемы. Не смотря на то, что исследованию моделей типа Лотки-Вольтерры посвящена обширнейшая литература, и, в частности, предложено множество их модификаций, предлагаемая модель является новой и исследуется впервые. Оригинальными являются и экологические выводы, которые можно сделать из анализа модели. Они подтверждают и существенно дополняют известные представления о характере процессов конкуренции в экологических системах.

В статье [1] был проведен частичный анализ модели (1.1) — найдены три топологически различных фазовых портрета системы (1.1), хотя периодические решения при этом не исследовались. В настоящей работе восполняется этот пробел и исследуются условия существования периодических решений в системе (1.1). Для решения этой задачи используются результаты теории Пуанкаре-Бендиксона [2] о периодических решениях систем дифференциальных уравнений на плоскости. Приведем некоторые из них.

Обозначим через C^+ совокупность всех пар точек $(x(t, x_0), y(t, y_0))$ являющихся траекторией решения системы (1.1), стартующего из начальной точки с координатами (x_0, y_0) при $t \geq t_0$. Множество C^+ называют положительной полутраекторией системы (1.1).

Определение 1. Точка $A(x_b, y_b)$ плоскости с координатами (x_b, y_b) называется предельной точкой полутраектории C^+ , если существует такая положительная числовая последовательность $t_0, t_1, \dots, t_n, \dots$, где $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$, что $(x_b, y_b) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x(t_n, x_0), y(t_n, y_0))$. Множество всех предельных точек полутраектории C^+ называется предельным множеством и обозначается через $L(C^+)$.

Определение 2. Множество M точек плоскости называется положительно инвариантным, если для любой точки $(x_0, y_0) \in M$ соответствующая полутраектория $C^+ \subset M$.

Теорема 1 (Пуанкаре-Бендиксон [?]). *Если на плоскости существует положительно инвариантное ограниченное множество M не содержащее положи-*

ний равновесия системы (1.1), то C^+ – периодическое решение; если $C^+ = L(C^+)$, то C^+ – предельный цикл.

Теорема 2 (Бендиксон [?]). Пусть H – ограниченное односвязное множество плоскости, все точки которого удовлетворяют условию: $\forall(x_p, y_p) \in H$ выражение

$$\left(\frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} \right) \Big|_{(x_p, y_p)} \neq 0.$$

Тогда нет периодического решения системы (1.1) целиком лежащего в H .

2. Положения равновесия системы (1.1)

Тривиально находятся следующие четыре положения равновесия (в круглых скобках указаны их координаты на плоскости):

$$1) S_1(0, 0); 2) S_2(0, k_y); 3) S_3(k_x, 0); 4) S_4(k_x, k_y).$$

(Они расположены по вершинам прямоугольника, лежащего в первом ортанте, две стороны которого совпадают с осями координат.)

Кроме этих положений равновесия существуют и другие положения равновесия, которые находятся из системы уравнений

$$\frac{r_x}{1 + l_x xy} \left(1 - \frac{x}{k_x} \right) = \frac{r_y l_y y^2}{1 + l_y xy} \left(1 - \frac{y}{k_y} \right), \quad \frac{r_y}{1 + l_y xy} \left(1 - \frac{y}{k_y} \right) = \frac{r_x l_x x^2}{1 + l_x xy} \left(1 - \frac{x}{k_x} \right). \quad (2.1)$$

Умножим левые части уравнений системы (2.1) друг на друга и приравняем полученный результат произведению правых частей уравнений этой же системы. Тогда после несложных алгебраических преобразований получим уравнение кривой, на которой лежат положения равновесия системы (1.1), отличные от точек S_1, \dots, S_4 :

$$l_x l_y (xy)^2 = 1.$$

Эта кривая представляет собой четыре ветви гипербол

$$\sqrt{l_x l_y} xy = 1 \text{ и } \sqrt{l_x l_y} xy = -1,$$

расположенные во всех четырех ортантах плоскости. Нас интересует только гиперболы, ветви которой расположены в первом и третьем ортантах:

$$xy = 1/(\sqrt{l_x l_y}). \quad (2.2)$$

Находя из уравнения (2.2) значение y через x и подставляя его в первое уравнение системы (2.1) получим

$$\frac{r_x}{1 + \sqrt{l_x/l_y}} \cdot \left(1 - \frac{x}{k_x}\right) = \frac{r_y l_y}{1 + \sqrt{l_y/l_x}} \cdot \frac{1}{l_x l_y x^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{x k_y \sqrt{l_x l_y}}\right). \quad (2.3)$$

Опять же, после несложных преобразований, приходим к уравнению

$$x^4 - k_x x^3 + \frac{k_x r_y}{r_x \sqrt{l_x l_y}} x - \frac{k_x r_y}{k_y l_y l_x r_x} = 0. \quad (2.4)$$

Запишем дискриминант $D(r_x, r_y, l_x, l_y, k_x, k_y)$ уравнения (2.4). Пусть $f(x) = a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4$, где

$$a_0 = 1, a_1 = -k_x, a_2 = 0, a_3 = \frac{k_x r_y}{r_x \sqrt{l_x l_y}}, a_4 = -\frac{k_x r_y}{k_y l_y l_x r_x}.$$

Тогда согласно [3] имеем

$$\begin{aligned} D(r_x, r_y, l_x, l_y, k_x, k_y) &= \frac{(-1)^6}{a_0} \cdot \text{res}(f(x), f'(x)) = \\ &= \frac{(-1)^6}{a_0} \det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & 0 & a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & 0 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & 0 & a_3 & a_4 \\ 4a_0 & 3a_1 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4a_0 & 3a_1 & 0 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4a_0 & 3a_1 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4a_0 & 3a_1 & 0 & a_3 \end{pmatrix} = p \left(4k_x^3 k_y^3 r_x r_y l_x l_y \sqrt{l_x l_y} - \right. \\ &\quad \left. - 27k_x k_y^3 r_y^2 l_x l_y - 6k_x^2 k_y^2 r_x r_y l_x l_y - 27k_x^3 k_y r_x^2 l_x l_y + 192k_x k_y r_x r_y \sqrt{l_x l_y} + 256r_y r_x \right), \end{aligned}$$

где $\text{res}(f(x), f'(x))$ – результат многочлена $f(x)$ и его производной [3] и $p = k_x^3 r_y^2 / (r_x^4 k_y^3 l_x^3 l_y^3) > 0$.

Анализ числа положительных корней уравнения (2.4) был проведен в [1]. Там же, основываясь на понятии дискриминанта уравнения типа (2.4), была доказана следующая теорема.

Теорема 3. Пусть D – дискриминант уравнения (2.4). Тогда если $D > 0$, то система (1.1) имеет семь положений равновесия, лежащих в первом ортанте и одно положение равновесия (со строго отрицательными координатами) – в третьем ортанте; если же $D < 0$, то система (1.1) имеет пять положений равновесия, лежащих в первом ортанте и одно положение равновесия (со строго отрицательными координатами) – в третьем ортанте.

На протяжении настоящей работы критические точки, расположенные в первом ортанте и не лежащие на осях координат, при $D > 0$ будем обозначать символами S_5, S_6 и S_7 ; при $D < 0$ единственную такую критическую точку будем обозначать символом S_5 . (Случай $D \neq 0$ обычно называется регулярным.)

Для дальнейшего исследования вычислим матрицу Якоби $J(x, y)$ системы (1.1):

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} &= \frac{r_x}{1 + l_x xy} \left(1 - \frac{x}{k_x} \right) - \frac{r_y l_y y^2}{1 + l_y xy} \left(1 - \frac{y}{k_y} \right) + \\ &+ x \left[-\frac{r_x l_x y}{(1 + l_x xy)^2} \left(1 - \frac{x}{k_x} \right) - \frac{r_x}{k_x (1 + l_x xy)} + \frac{r_y l_y^2 y^3}{(1 + l_y xy)^2} \left(1 - \frac{y}{k_y} \right) \right], \\ \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} &= -\frac{r_x l_x x^2}{(1 + l_x xy)^2} \left(1 - \frac{x}{k_x} \right) - x r_y l_y \left[\frac{2y(1 + l_y xy) - y^2 l_y x}{(1 + l_y xy)^2} \left(1 - \frac{y}{k_y} \right) - \frac{y^2}{k_y (1 + l_y xy)} \right], \\ \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} &= -\frac{r_y l_y y^2}{(1 + l_y xy)^2} \left(1 - \frac{y}{k_y} \right) - y r_x l_x \left[\frac{2x(1 + l_x xy) - x^2 l_x y}{(1 + l_x xy)^2} \left(1 - \frac{x}{k_x} \right) - \frac{x^2}{k_x (1 + l_x xy)} \right], \\ \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} &= \frac{r_y}{1 + l_y xy} \left(1 - \frac{y}{k_y} \right) - \frac{r_x l_x x^2}{1 + l_x xy} \left(1 - \frac{x}{k_x} \right) + \\ &+ y \left[-\frac{r_y l_y x}{(1 + l_y xy)^2} \left(1 - \frac{y}{k_y} \right) - \frac{r_y}{k_y (1 + l_y xy)} + \frac{r_x l_x^2 x^3}{(1 + l_x xy)^2} \left(1 - \frac{x}{k_x} \right) \right]. \end{aligned}$$

3. Инварианты матрицы Якоби для системы (1.1)

Найдем элементы матрицы Якоби при условиях (2.1) и (2.2). Первое из условий (2.1) после некоторых преобразований дает

$$\frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} = \frac{r_x}{(1 + \sqrt{l_x/l_y})} \left(\frac{\sqrt{l_y/l_x} - \sqrt{l_x/l_y}}{(1 + \sqrt{l_y/l_x})(1 + \sqrt{l_x/l_y})} - \frac{2x}{k_x(1 + \sqrt{l_x/l_y})} \right).$$

Второе из условий (2.1) приводит к соотношению

$$\frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} = \frac{r_y}{(1 + \sqrt{l_y/l_x})} \left(\frac{\sqrt{l_x/l_y} - \sqrt{l_y/l_x}}{(1 + \sqrt{l_x/l_y})(1 + \sqrt{l_y/l_x})} - \frac{2y}{k_y(1 + \sqrt{l_y/l_x})} \right).$$

Для оставшихся двух элементов матрицы Якоби аналогичные преобразования дают:

$$\frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} = \frac{r_y}{(1 + \sqrt{l_y/l_x})} \left(\frac{2y(2 + \sqrt{l_y/l_x})}{k_y(1 + \sqrt{l_x/l_y})} - \frac{3 + \sqrt{l_y/l_x}}{(1 + \sqrt{l_x/l_y})} \right),$$

$$\frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} = \frac{r_x}{(1 + \sqrt{l_x/l_y})} \left(\frac{2x(2 + \sqrt{l_x/l_y})}{k_x(1 + \sqrt{l_y/l_x})} - \frac{3 + \sqrt{l_x/l_y}}{(1 + \sqrt{l_y/l_x})} \right).$$

Пусть (x, y) – какое-либо решение системы (2.1). Вычислим (с учетом условия $\sqrt{l_x l_y} xy = 1$) инвариантную функцию $\text{tr}J(x, y)$ (след матрицы $J(x, y)$). Тогда получим

$$\begin{aligned} \text{tr}J(x, 1/(x\sqrt{l_x l_y})) \equiv \text{tr}J(x) &= \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} = -\frac{2xr_x}{k_x(1 + \sqrt{l_x/l_y})^2} + \\ &+ \left(\frac{r_x(\sqrt{l_y/l_x} - \sqrt{l_x/l_y})}{(1 + \sqrt{l_y/l_x})(1 + \sqrt{l_x/l_y})^2} + \frac{r_y(\sqrt{l_x/l_y} - \sqrt{l_y/l_x})}{(1 + \sqrt{l_x/l_y})(1 + \sqrt{l_y/l_x})^2} \right) - \frac{2r_y}{x\sqrt{l_x l_y} k_y (1 + \sqrt{l_y/l_x})^2}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Уравнение $\text{tr}J(x) = 0$ имеет вещественные решения при условии

$$\left(\frac{r_x(\sqrt{l_y/l_x} - \sqrt{l_x/l_y})}{(1 + \sqrt{l_x/l_y})} + \frac{r_y(\sqrt{l_x/l_y} - \sqrt{l_y/l_x})}{(1 + \sqrt{l_y/l_x})} \right)^2 - 16 \frac{r_x r_y}{k_x k_y \sqrt{l_x l_y}} \geq 0. \quad (3.2)$$

(Отметим, что условие (3.2) необходимо для существования в системе предельного цикла.)

Вычислим еще (с учетом условия $\sqrt{l_x l_y} xy = 1$) вторую инвариантную функцию $\det J(x, y)$:

$$\begin{aligned} \det J(x, y) &= \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} = \\ &= \frac{r_x r_y}{(1 + \sqrt{l_x/l_y})^2 (1 + \sqrt{l_y/l_x})^2} \left(\left(\frac{(\sqrt{l_y/l_x} - \sqrt{l_x/l_y})}{(1 + \sqrt{l_y/l_x})} - \frac{2x}{k_x} \right) \cdot \left(\frac{(\sqrt{l_x/l_y} - \sqrt{l_y/l_x})}{(1 + \sqrt{l_x/l_y})} - \frac{2y}{k_y} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{2y}{k_y} (2 + \sqrt{l_y/l_x}) - 3 - \sqrt{l_y/l_x} \right) \cdot \left(\frac{2x}{k_x} (2 + \sqrt{l_x/l_y}) - 3 - \sqrt{l_x/l_y} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Теперь мы можем вычислить дискриминант $D_J \equiv (\text{tr}J(x, y))^2 - 4 \det J(x, y)$ матрицы Якоби. Тогда с учетом $y = 1/(x\sqrt{l_x l_y})$, после некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned} D_J(x, y) \equiv (\text{tr}J(x, 1/(x\sqrt{l_x l_y})))^2 - 4 \det J(x, 1/(x\sqrt{l_x l_y})) &= \\ &= \left(\frac{r_x(\sqrt{l_y/l_x} - \sqrt{l_x/l_y})}{(1 + \sqrt{l_y/l_x})(1 + \sqrt{l_x/l_y})^2} + \frac{r_y(\sqrt{l_x/l_y} - \sqrt{l_y/l_x})}{(1 + \sqrt{l_x/l_y})(1 + \sqrt{l_y/l_x})^2} \right)^2 - \\ &\quad - 4 \left(\frac{xr_x}{k_x(1 + \sqrt{l_x/l_y})^2} + \frac{r_y}{xk_y \sqrt{l_x l_y} (1 + \sqrt{l_y/l_x})^2} \right) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left(\frac{r_x(\sqrt{l_y/l_x} - \sqrt{l_x/l_y})}{(1 + \sqrt{l_y/l_x})(1 + \sqrt{l_x/l_y})^2} + \frac{r_y(\sqrt{l_x/l_y} - \sqrt{l_y/l_x})}{(1 + \sqrt{l_x/l_y})(1 + \sqrt{l_y/l_x})^2} \right) + \\
 & + \frac{4x^2r_x^2}{k_x^2(1 + \sqrt{l_x/l_y})^4} + \frac{4r_y^2}{x^2k_y^2l_xl_y(1 + \sqrt{l_y/l_x})^4} + \left(\frac{8r_xr_y}{k_xk_y\sqrt{l_xl_y}(1 + \sqrt{l_x/l_y})^2(1 + \sqrt{l_y/l_x})^2} \right) + \\
 & + \frac{4r_xr_y}{(1 + \sqrt{l_x/l_y})^2(1 + \sqrt{l_y/l_x})^2} \left(\frac{4(\sqrt{l_y/l_x} - \sqrt{l_x/l_y})^2}{(1 + \sqrt{l_y/l_x})(1 + \sqrt{l_x/l_y})} + \frac{8(1 + \sqrt{l_x/l_y})(1 + \sqrt{l_y/l_x})}{k_xk_y\sqrt{l_xl_y}} \right) + \\
 & + 16 - \frac{6x}{k_x(1 + \sqrt{l_x/l_y})} (3 + 3\sqrt{l_x/l_y} + \sqrt{l_y/l_x} + l_x/l_y) - \\
 & - \frac{6}{xk_y\sqrt{l_xl_y}(1 + \sqrt{l_y/l_x})} (3 + 3\sqrt{l_y/l_x} + \sqrt{l_x/l_y} + l_y/l_x).
 \end{aligned}$$

Топологический портрет системы (1.1) зависит от знака дискриминанта уравнения (2.4). В [1] были рассмотрены некоторые ситуации, возникающие при $D \neq 0$. При этом периодические решения не рассматривались. Опираясь на работы [4, 5], изучим возможность существования периодических решений, а также закроем проблему топологической классификации системы (1.1) при $D \neq 0$.

4. Дискриминант $D < 0$

В [1] показано, что в этом случае уравнение (2.4) имеет единственный положительный корень; обозначим его через x^* . Перепишем уравнение (2.4) в следующем виде

$$f(x) \equiv x^3(x - k_x) + \frac{k_xr_y}{r_x\sqrt{l_xl_y}} \left(x - \frac{k_x}{k_xk_y\sqrt{l_xl_y}} \right) = 0. \quad (4.1)$$

Пусть $x = 0$. Тогда $f(0) < 0$. Если же $x = 1/(k_y\sqrt{l_xl_y})$, то при $k_xk_y\sqrt{l_xl_y} < 1$ имеем $f(1/(k_y\sqrt{l_xl_y})) > 0$. Таким образом, $x^* \in (0, 1/(k_y\sqrt{l_xl_y}))$.

Наоборот, если $k_xk_y\sqrt{l_xl_y} > 1$, то $f(1/(k_y\sqrt{l_xl_y})) < 0$ и $f(k_x) > 0$. Таким образом, в этом случае $x^* \in (1/(k_y\sqrt{l_xl_y}), k_x)$.

Введем обозначение $\delta = k_xk_y\sqrt{l_xl_y}$. Пусть $\delta \leq 1$. Тогда x^* принадлежит интервалу

$$\left(0, \frac{1}{k_y\sqrt{l_xl_y}} \right) = \left(0, \frac{k_x}{k_xk_y\sqrt{l_xl_y}} \right) = \left(0, \frac{k_x}{\delta} \right).$$

Для указанного интервала положим $x = ak_x/\delta$, где $0 < a \leq 1$. Тогда из формулы (3.1) будем иметь

$$\text{tr}J(ak_x/\delta) = \frac{2r_x(1 - a/\delta)}{(1 + \sqrt{l_x/l_y})^2} + \frac{2r_y(1 - 1/a)}{(1 + \sqrt{l_y/l_x})^2} - \left(\frac{r_x}{1 + \sqrt{l_x/l_y}} + \frac{r_y}{1 + \sqrt{l_y/l_x}} \right). \quad (4.2)$$

Таким образом, при $a \rightarrow 0$ второе слагаемое формулы (4.2) стремится к $-\infty$; если же $a \rightarrow 1$, то первое слагаемое формулы (4.2) неположительно. Следовательно, на интервале $(0, k_x/\delta)$ имеем $\text{tr}J(x) < 0$.

Вычислим теперь знак функции

$$D_J(x, y) \equiv (\text{tr}J(x, 1/(x\sqrt{l_x l_y}))^2 - 4 \det J(x, 1/(x\sqrt{l_x l_y})))$$

на интервале $(0, k_x/\delta)$, где $\delta < 1$. Тогда после некоторых преобразований формул (3.1) и (3.3) будем иметь

$$D_J(x, y) = \left(\frac{2r_x(1-1/\delta)}{(1+\sqrt{l_x/l_y})^2} - \frac{r_x}{1+\sqrt{l_x/l_y}} - \frac{r_y}{1+\sqrt{l_y/l_x}} \right)^2 - \frac{8r_x r_y(1-1/\delta)}{(1+\sqrt{l_x/l_y})^2(1+\sqrt{l_y/l_x})^2} \cdot \frac{(\sqrt{l_x/l_y} - \sqrt{l_y/l_x})^2 + 4(1+\sqrt{l_y/l_x})(1+\sqrt{l_x/l_y})}{(1+\sqrt{l_y/l_x})(1+\sqrt{l_x/l_y})}. \quad (4.3)$$

Пусть $\lambda_{1,2}$ корни уравнения $\lambda^2 - (\text{tr}J(x, y))\lambda + \det J(x, y) = 0$:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{tr}J(x, y) \pm \sqrt{(\text{tr}J(x, y))^2 - 4 \det J(x, y)}}{2}. \quad (4.4)$$

Тогда из соотношений (4.2) и (4.3) вытекает, что в (4.4) подкоренное выражение всегда положительно и, значит, критическая точка S_5 с координатами $x = x^*$, $y = 1/(x^*\sqrt{l_x l_y})$ является седлом.

В [1] показано, что критическая точка $S_4(k_x, k_y)$ является устойчивым узлом. Таким образом, при $\delta < 1$ точка S_5 – седло, а точка S_4 – устойчивый узел.

Пусть теперь $\delta > 1$. Тогда x^* принадлежит интервалу

$$\left(\frac{1}{k_y \sqrt{l_x l_y}}, k_x \right) = \left(\frac{k_x}{k_x k_y \sqrt{l_x l_y}}, k_x \right) = \left(\frac{k_x}{\delta}, k_x \right).$$

Покажем, что на самом деле

$$x^* \in \left(\frac{k_x}{\delta}, \frac{k_x}{2} \right).$$

Для этого вычислим вторую производную функции $f(x)$ из (4.1): $f''(x) = 12x^2 - 6k_x x$. Очевидно, что уравнение $f''(x) = 0$ имеет два корня: 0 и $k_x/2$. Следовательно, числовая ось разбивается на интервалы вогнутости $(-\infty, 0)$, $(k_x/2, \infty)$ и интервал выпуклости $(0, k_x/2)$ функции $f(x)$.

Возможны две ситуации: 1) $k_x/2 \in (0, 1/(k_y \sqrt{l_x l_y}))$; 2) $k_x/2 \in (1/(k_y \sqrt{l_x l_y}), k_x)$.

Так как уравнение $f(x) = 0$ при $D < 0$ имеет один положительный корень, то ситуация 1) означает, что на числовой оси должны присутствовать три точки перегиба, что невозможно. Следовательно, имеет место ситуация 2) и в таком

случае точка перегиба $k_x/2 \in (1/k_y\sqrt{l_x l_y}, k_x)$. Но $\forall x \in (1/k_y\sqrt{l_x l_y}, k_x)$ $f(x) > 0$. Следовательно, положительный корень уравнения (2.4) лежит на $(k_x/\delta, k_x/2)$.

Для указанного интервала положим $x = ak_x/\delta$, где $1 < a < 2 < \delta$. Тогда из формулы (4.2) следует, что при $1 < a < 2$ функция $\text{tr}J(x) < 0$, а из (4.3) следует, что подкоренное выражение в (4.4) может принимать любой знак. Следовательно, точка S_5 может быть либо устойчивым узлом, либо устойчивым фокусом. Кроме того, в [1] показано, что при $\delta > 1$ точка S_4 всегда является седлом.

Если теперь вспомнить [1], что для любых $\delta > 0$ точка S_1 является неустойчивым узлом, а точки S_2 и S_3 – седлами, то предыдущие рассуждения приводят к следующей теореме.

Теорема 4. Пусть для уравнения (2.4) дискриминант $D < 0$. Тогда существует всего два топологически неэквивалентных фазовых портрета системы (1.1):

- 1) если $D_J(S_5) > 0$, то топологический портрет системы (1.1) имеет три седла, один устойчивый и один неустойчивый узлы;
- 2) если $D_J(S_5) < 0$, то топологический портрет системы (1.1) имеет три седла, один устойчивый фокус и один неустойчивый узел.

Следствие. Пусть $D < 0$. Тогда:

- а) если $\delta = k_x k_y \sqrt{l_x l_y} < 1$, то имеет место случай 1); при этом S_5 – седло, S_4 – устойчивый узел;
- б) если $\delta > 1$ и $D_J(S_5) > 0$, то имеет место случай 1); при этом S_4 – седло, S_5 – устойчивый узел; если же $\delta > 1$ и $D_J(S_5) < 0$, то имеет место случай 2). При этом S_4 – седло, S_5 устойчивый фокус. (В случаях а) и б) топологические портреты, содержащие только узлы и седла, – эквивалентны.)

Область в первом квадранте, ограниченная осями координат и сепаратрисой, проходящей через седло S_4 (для $\delta > 1$) или седло S_5 (для $\delta < 1$), представляет собой ограниченное инвариантное множество (область устойчивости) для системы (1.1).

Таким образом, теорема 4 показывает, что при $D < 0$ в системе (1.1) отсутствуют предельные циклы.

5. Дискриминант $D > 0$

Перейдем к исследованию матрицы Якоби для корней уравнения (2.4) при $D > 0$. Перепишем уравнение (2.4) в следующем виде:

$$x^3 + \frac{k_x r_y}{r_x \sqrt{l_x l_y}} \frac{\left(x - \frac{k_x}{k_x k_y \sqrt{l_x l_y}}\right)}{(x - k_x)} = x^3 + \frac{k_x r_y}{r_x \sqrt{l_x l_y}} + \frac{k_x^2 r_y}{(x - k_x) r_x \sqrt{l_x l_y}} \left(1 - \frac{1}{k_x k_y \sqrt{l_x l_y}}\right) = 0. \quad (5.1)$$

Для уравнения (5.1) условие $k_x k_y \sqrt{l_x l_y} = 1$ является критическим. (При выполнении этого условия уравнение (2.4) имеет единственный положительный корень $x = k_x$.)

Рассмотрим ситуацию $k_x k_y \sqrt{l_x l_y} < 1$. Тогда если $0 < x < k_x$, то

$$\frac{k_x^2 r_y}{(x - k_x) r_x \sqrt{l_x l_y}} \left(1 - \frac{1}{k_x k_y \sqrt{l_x l_y}} \right) > 0$$

и уравнение (5.1) (а, значит, и уравнение (2.4)) не имеет положительных корней.

Пусть теперь $k_x k_y \sqrt{l_x l_y} > 1$, но $0 < k_x < x$. Тогда

$$\frac{k_x^2 r_y}{(x - k_x) r_x \sqrt{l_x l_y}} \left(1 - \frac{1}{k_x k_y \sqrt{l_x l_y}} \right) < 0$$

и уравнение (5.1) (а, значит, и уравнение (2.4)) имеет хотя бы один положительный корень.

Так как $0 < k_x < x$, то можно записать $x = k_x + \delta$, где $\delta > 0$. В этом случае уравнение (5.1) преобразуется к форме

$$\delta(k_x + \delta)^3 + \frac{k_x r_y}{r_x \sqrt{l_x l_y}} \delta + \frac{k_x^2 r_y}{r_x \sqrt{l_x l_y}} \left(1 - \frac{1}{k_x k_y \sqrt{l_x l_y}} \right) = 0. \quad (5.2)$$

Отсюда следует, что если $k_x k_y \sqrt{l_x l_y} < 1$, то последовательность коэффициентов уравнения (5.2) относительно переменной δ имеет одну перемену знаков. Следовательно, уравнение (5.2) (а, значит, и (2.4)) имеет только один положительный корень. Из всего сказанного в разделе 5 вытекает такой результат:

Лемма 1. Пусть уравнение (2.4) имеет 3 положительных корня. Тогда имеем $k_x k_y \sqrt{l_x l_y} > 1$.

Для дальнейшего нам понадобится такое утверждение.

Лемма 2. Если $k_x k_y \sqrt{l_x l_y} > 1$, то положительные корни уравнения (2.4) лежат на интервале

$$\left(\frac{1}{k_y \sqrt{l_x l_y}}, k_x \right).$$

Доказательство. Пусть x^* – корень уравнения (2.4). Представим (2.4) в виде (4.1). Тогда если $x - k_x > 0$, то в силу неравенства $k_x k_y \sqrt{l_x l_y} > 1$, первая и вторая скобки в уравнении (4.1) положительны. Другими словами, $f(x) > 0$ и потому уравнение (4.1) не имеет решений. Следовательно, должно быть $x^* < k_x$.

Если теперь $x < 1/(k_y \sqrt{l_x l_y})$, то в силу неравенства $k_x k_y \sqrt{l_x l_y} > 1$, первая и вторая скобки в уравнении (4.1) отрицательны и потому $f(x) < 0$. Таким образом, для любого положительного корня x^* должно быть $x^* > 1/(k_y \sqrt{l_x l_y})$. Замечание о том, что из неравенства $k_x k_y \sqrt{l_x l_y} > 1$ вытекает неравенство

$$\frac{1}{k_y \sqrt{l_x l_y}} < k_x$$

завершает доказательство. \square

Пусть теперь точка (x^*, y^*) в первом квадранте плоскости соответствует одному из решений системы (2.1). Тогда в силу условия $x^* < k_x$ получаем, что $(1 - x^*/k_x) > 0$ и потому в первом из уравнений (2.1) левая часть положительна. Тогда из правой части этого же уравнения следует, что $y^* < k_y$.

Теорема 5. Пусть для уравнения (2.4) дискриминант $D > 0$. Тогда существует всего шесть топологически неэквивалентных фазовых портретов системы (1.1):

1) если $\text{tr}J(S_5) < 0, D_J(S_5) < 0$ и $\text{tr}J(S_7) < 0, D_J(S_7) < 0$, то топологический портрет системы (1.1) имеет четыре седла, два устойчивых фокуса и один неустойчивый узел;

2) если $\text{tr}J(S_5) < 0, D_J(S_5) < 0$ и $\text{tr}J(S_7) < 0, D_J(S_7) > 0$, то топологический портрет системы (1.1) имеет четыре седла, один устойчивый и один неустойчивый узлы, а также устойчивый фокус;

3) если $\text{tr}J(S_5) < 0, D_J(S_5) > 0$ и $\text{tr}J(S_7) < 0, D_J(S_7) > 0$, то топологический портрет системы (1.1) имеет четыре седла, два устойчивых узла и один неустойчивый узел;

4) если $\text{tr}J(S_5) < 0, D_J(S_5) < 0$ и $\text{tr}J(S_7) > 0, D_J(S_7) < 0$, то топологический портрет системы (1.1) имеет четыре седла, один устойчивый фокус, один предельный цикл и один неустойчивый узел.

5) если $\text{tr}J(S_5) < 0, D_J(S_5) > 0$ и $\text{tr}J(S_7) > 0, D_J(S_7) < 0$, то топологический портрет системы (1.1) имеет четыре седла, один устойчивый узел, один неустойчивый узел и один предельный цикл.

6) если $\text{tr}J(S_5) < 0, D_J(S_5) > 0$ и $\text{tr}J(S_7) > 0, D_J(S_7) > 0$, то топологический портрет системы (1.1) имеет четыре седла, один устойчивый узел и два неустойчивых узла.

Аналогичный результат получается, если точки S_5 и S_7 поменять местами.

Область в первом квадранте, ограниченная осями координат и сепаратрисой, проходящей через седло S_4 , представляет собой ограниченное инвариантное множество (область устойчивости) для системы (1.1).

Доказательство. Итак, по условию $D > 0$. Найдем интервал, на котором расположен только один корень уравнения (2.4). Так же как и в доказательстве теоремы 4 возможны две ситуации: 1) $k_x/2 \in (0, 1/(k_y\sqrt{l_x l_y}))$; 2) $k_x/2 \in (1/(k_y\sqrt{l_x l_y}), k_x)$.

Так как уравнение $f(x) = 0$ при $D > 0$ имеет три положительных корня, то ситуация 1) означает, что на числовой оси должны присутствовать три точки перегиба, что невозможно. Следовательно, имеет место ситуация 2). Но в таком случае при $D > 0$ на интервале $(1/(k_y\sqrt{l_x l_y}), k_x/2)$ лежит наименьший положительный корень, а на интервале $(k_x/2, k_x)$ – два других положительных корня уравнения (2.4). Кроме того, из условия 2) вытекает также, что $k_x k_y \sqrt{l_x l_y} > 2$.

Пусть $\delta = k_x k_y \sqrt{l_x l_y} > 1$. Тогда согласно леммам 1 и 2 три положительных

корня уравнения (2.4) лежат на интервале

$$\left(\frac{1}{k_y \sqrt{l_x l_y}}, k_x \right),$$

причем на левом краю этого интервала будем иметь

$$\operatorname{tr} J(1/k_y \sqrt{l_x l_y}) = \frac{2r_x(1-1/\delta)}{(1+\sqrt{l_x/l_y})^2} - \left(\frac{r_x}{1+\sqrt{l_x/l_y}} + \frac{r_y}{1+\sqrt{l_y/l_x}} \right).$$

Аналогично, на правом краю интервала в точке k_x имеем

$$\operatorname{tr} J(k_x) = \frac{2r_y(1-1/\delta)}{(1+\sqrt{l_y/l_x})^2} - \left(\frac{r_x}{1+\sqrt{l_x/l_y}} + \frac{r_y}{1+\sqrt{l_y/l_x}} \right). \quad (5.3)$$

Вычислим теперь функцию $\operatorname{tr} J(ak_x)$, где $0 < 1/\delta < a < 1$. Имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} J(ak_x) &= \frac{r_x}{(1+\sqrt{l_y/l_x})(1+\sqrt{l_x/l_y})^2} \left(\sqrt{l_y/l_x}(1-2a) - 2a - \sqrt{l_x/l_y} \right) + \\ &+ \frac{r_y}{(1+\sqrt{l_x/l_y})(1+\sqrt{l_y/l_x})^2} \left(\sqrt{l_x/l_y}(1-2/(\delta a)) - 2/(\delta a) - \sqrt{l_y/l_x} \right). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Выше было показано, что при $D > 0$ на интервале $(k_x/\delta, k_x/2)$ лежит наименьший положительный корень x_{\min} уравнения (2.4). Следовательно, для того, чтобы $x_{\min} \in (k_x/\delta, k_x/2)$ параметр a должен удовлетворять условию $1/\delta < a \leq 1/2$. (Отсюда вытекает, что $\delta > 2$.)

При $1 \leq \delta \leq 2$ соотношение (4.2) показывает, что $\operatorname{tr} J(1/k_y \sqrt{l_x l_y}) < 0$. При $a = 1/2$ и $\delta = 2$ уже соотношение (5.4) показывает, что

$$\operatorname{tr} J(k_x/2) = \frac{2r_y(1-2/\delta)}{(1+\sqrt{l_y/l_x})^2} - \left(\frac{r_x}{1+\sqrt{l_x/l_y}} + \frac{r_y}{1+\sqrt{l_y/l_x}} \right) < 0.$$

Следовательно, если $1/\delta < a \leq 1/2$, то $\operatorname{tr} J(ak_x) < 0$. Напротив, при $1/2 < a < 1$ величина $\operatorname{tr} J(ak_x)$ может принять любой знак (например, при $\delta a > 2$ и $\sqrt{l_x/l_y} > \delta a/(\delta a - 2)$ имеем $\operatorname{tr} J(ak_x) > 0$).

Напомним, что $D > 0$. Обозначим через L_{S_4} сепаратриссу, проходящую через точку S_4 (седло). Обозначим также через \mathcal{A} множество в первом квадранте, ограниченное осями координат OX , OY и кривой L_{S_4} , а его границу, образованную объединением линий OX , OY , L_{S_4} в первом квадранте, — через $\partial\mathcal{A}$. Ясно, что \mathcal{A} — положительное инвариантное множество, внутренность которого $\mathcal{A} - \partial\mathcal{A}$ содержит три критические точки S_5 , S_6 и S_7 . (Это решения системы (2.1); критические точки S_1, \dots, S_3 расположены на осях координат.)

Пусть S_5 — положение равновесия, соответствующее минимальному положительному корню x_{\min}^* уравнения (2.4). Обозначим через $H \subset \mathcal{A} - \partial\mathcal{A}$ некоторую

односвязную область, содержащую точку S_5 . Предположим, что $S_6, S_7 \notin H$. Напомним, что при $1/\delta < a \leq 1/2$ имеет место неравенство $\text{tr}J(ak_x) < 0$ (так как $x_{\min} \in (x/\delta, k_x/2)$, то из последнего неравенства следует, что $\text{tr}J(x_{\min}^*) < 0$). Тогда для всех точек области H выполняется неравенство $\text{tr}(x, y) \neq 0$. Это означает, что во всех точках области H выполняются условия теоремы 2. Кроме того, условие $\text{tr}J(x_{\min}^*) < 0$ показывает, что точка S_5 может быть либо устойчивым узлом, либо устойчивым фокусом. (Для наличия же в H предельного цикла, необходимо выполнения условия $\text{tr}J(x_{\min}^*) > 0$.) Таким образом, в области H отсутствует предельный цикл. (Последнее означает, что ни один фазовый портрет не может содержать одновременно два предельных цикла.)

Воспользуемся формулой (4.3) (которая справедлива $\forall \delta > 0$) и вычислим значения функции $D_J(x)$ на левом и правом краях интервала $(1/(k_y\sqrt{l_x l_y}), k_x)$:

$$D_J(1/(k_y\sqrt{l_x l_y})) = \left(\frac{2r_x(1-1/\delta)}{(1+\sqrt{l_x/l_y})^2} - \frac{r_x}{1+\sqrt{l_x/l_y}} - \frac{r_y}{1+\sqrt{l_y/l_x}} \right)^2 - \frac{8r_x r_y(1-1/\delta)}{(1+\sqrt{l_x/l_y})^2(1+\sqrt{l_y/l_x})^2} \cdot \frac{(\sqrt{l_x/l_y} - \sqrt{l_y/l_x})^2 + 4(1+\sqrt{l_y/l_x})(1+\sqrt{l_x/l_y})}{(1+\sqrt{l_y/l_x})(1+\sqrt{l_x/l_y})} \quad (5.5)$$

и

$$D_J(k_x) = \left(\frac{2r_y(1-1/\delta)}{(1+\sqrt{l_y/l_x})^2} - \frac{r_x}{1+\sqrt{l_x/l_y}} - \frac{r_y}{1+\sqrt{l_y/l_x}} \right)^2 - \frac{8r_x r_y(1-1/\delta)}{(1+\sqrt{l_x/l_y})^2(1+\sqrt{l_y/l_x})^2} \cdot \frac{(\sqrt{l_x/l_y} - \sqrt{l_y/l_x})^2 + 4(1+\sqrt{l_y/l_x})(1+\sqrt{l_x/l_y})}{(1+\sqrt{l_y/l_x})(1+\sqrt{l_x/l_y})}. \quad (5.6)$$

Введем обозначения: $q = \sqrt{l_x/l_y}$ и

$$p^2 = \frac{8(1-1/\delta)}{(1+\sqrt{l_x/l_y})^2(1+\sqrt{l_y/l_x})^2} \cdot \frac{(\sqrt{l_x/l_y} - \sqrt{l_y/l_x})^2 + 4(1+\sqrt{l_y/l_x})(1+\sqrt{l_x/l_y})}{(1+\sqrt{l_y/l_x})(1+\sqrt{l_x/l_y})} = 8\left(1 - \frac{1}{\delta}\right) \frac{q}{(1+q)^2} > 0.$$

При $\delta > 1$ исследуем совместность системы неравенств $\text{tr}J(1/(k_y\sqrt{l_x l_y})) \leq 0$, $D_J(1/(k_y\sqrt{l_x l_y})) \leq 0$ и $\text{tr}J(k_x) \leq 0$, $D_J(k_x) \leq 0$. Тогда из (5.5) и (5.6) будем иметь:

$$r_x - r_y q^2 \leq q(r_x + r_y) + 2r_x/\delta, \quad |r_x - r_y q^2 - q(r_x + r_y) - 2r_x/\delta| \leq p(1+q)^2 \sqrt{r_x r_y}, \quad (5.7)$$

$$-r_x + r_y q^2 \leq q(r_x + r_y) + 2r_y q^2/\delta, \quad |-r_x + r_y q^2 - q(r_x + r_y) - 2r_y q^2/\delta| \leq p(1+q)^2 \sqrt{r_x r_y}. \quad (5.8)$$

Положим $h = \sqrt{8(1-1/\delta)}$. Тогда более подробно система (5.7) может быть записана так:

$$r_x - r_y q^2 > q(r_x + r_y) + 2r_x/\delta, \quad r_x - r_y q^2 > q(r_x + r_y) + 2r_x/\delta + h\sqrt{q}(1+q)\sqrt{r_x r_y} \quad (5.9)$$

(неустойчивый узел);

$$r_x - r_y q^2 > q(r_x + r_y) + 2r_x/\delta, \quad r_x - r_y q^2 < q(r_x + r_y) + 2r_x/\delta + h\sqrt{q}(1+q)\sqrt{r_x r_y} \quad (5.10)$$

(предельный цикл);

$$r_x - r_y q^2 < q(r_x + r_y) + 2r_x/\delta, \quad -(r_x - r_y q^2 - q(r_x + r_y) - 2r_x/\delta) > h\sqrt{q}(1+q)\sqrt{r_x r_y} \quad (5.11)$$

(устойчивый узел);

$$r_x - r_y q^2 < q(r_x + r_y) + 2r_x/\delta, \quad -(r_x - r_y q^2 - q(r_x + r_y) - 2r_x/\delta) < h\sqrt{q}(1+q)\sqrt{r_x r_y} \quad (5.12)$$

(устойчивый фокус).

В свою очередь система (5.8) записывается следующим образом:

$$-r_x + r_y q^2 > q(r_x + r_y) + 2r_y q^2/\delta, \quad -r_x + r_y q^2 - q(r_x + r_y) - 2r_y q^2/\delta > h\sqrt{q}(1+q)\sqrt{r_x r_y} \quad (5.13)$$

(неустойчивый узел);

$$-r_x + r_y q^2 > q(r_x + r_y) + 2r_y q^2/\delta, \quad -r_x + r_y q^2 - q(r_x + r_y) - 2r_y q^2/\delta < h\sqrt{q}(1+q)\sqrt{r_x r_y} \quad (5.14)$$

(предельный цикл);

$$-r_x + r_y q^2 < q(r_x + r_y) + 2r_y q^2/\delta, \quad -(-r_x + r_y q^2 - q(r_x + r_y) - 2r_y q^2/\delta) > h\sqrt{q}(1+q)\sqrt{r_x r_y} \quad (5.15)$$

(устойчивый узел);

$$-r_x + r_y q^2 < q(r_x + r_y) + 2r_y q^2/\delta, \quad -(-r_x + r_y q^2 - q(r_x + r_y) - 2r_y q^2/\delta) < h\sqrt{q}(1+q)\sqrt{r_x r_y} \quad (5.16)$$

(устойчивый фокус).

Для того, чтобы проверить возможность существования того или иного сочетания особых точек, нужно исследовать совместность каждой из 16 систем, каждая из которых состоит из 4-х неравенств: (5.9), (5.13); (5.9), (5.14); (5.9), (5.15); (5.9), (5.16); ... ; (5.12), (5.13); (5.12), (5.14); (5.12), (5.15); (5.12), (5.16).

Сразу же легко проверяется, что каждая система из четырех неравенств (5.9), (5.13); (5.9), (5.14); (5.10), (5.13); (5.10), (5.14) – несовместна. Несколько более сложно доказывается несовместность системы (5.9), (5.16) и системы (5.12), (5.13). Кроме того, из всей системы неравенств (5.9) – (5.16) видно, что ни одна из точек S_5 или S_7 не может быть седлом. (Это следует из условия $p^2 > 0$.)

1. Исследуем совместность системы (5.9), (5.15) (неустойчивый узел – устойчивый узел):

$$\begin{cases} r_x - r_y q^2 > q(r_x + r_y) + 2r_x/\delta, \\ r_x - r_y q^2 > q(r_x + r_y) + 2r_x/\delta + h\sqrt{q}(1+q)\sqrt{r_x r_y}, \\ -r_x + r_y q^2 < q(r_x + r_y) + 2r_y q^2/\delta, \\ -(-r_x + r_y q^2 - q(r_x + r_y) - 2r_y q^2/\delta) > h\sqrt{q}(1+q)\sqrt{r_x r_y} \end{cases} \quad (5.17)$$

Первое и третье неравенства системы (5.17) приводят к неравенству

$$\left(1 - \frac{1}{\delta}\right)(r_x - r_y q^2) > 0,$$

которое всегда совместно при $(r_x - r_y q^2) > 0$. Второе и четвертое неравенства той же системы приводят к неравенству

$$\left(1 - \frac{1}{\delta}\right)(r_x - r_y q^2) > h\sqrt{q}(1+q)\sqrt{r_x r_y},$$

которое совместно при $\delta \rightarrow \infty$ и $q \rightarrow 0$. Очевидно, что при этих ограничениях совместны все неравенства системы (5.17). Одно из решений этой системы может быть выбрано таким: $k_x = 16, k_y = 1; r_x = 1, r_y = 1; l_x = 1, l_y = 49$. Тогда $\delta = 102$ и $q = 1/7$. Таким образом, существует фазовый портрет, содержащий внутри области устойчивости (не на границах) устойчивый и неустойчивый узлы, а также седло.

2.Исследуем совместность системы (5.11), (5.15) (устойчивый узел – устойчивый узел):

$$\begin{cases} r_x - r_y q^2 < q(r_x + r_y) + 2r_x/\delta, \\ -r_x + r_y q^2 > -q(r_x + r_y) - 2r_x/\delta + h\sqrt{q}(1+q)\sqrt{r_x r_y}, \\ -r_x + r_y q^2 < q(r_x + r_y) + 2r_y q^2/\delta, \\ r_x - r_y q^2 > -q(r_x + r_y) - 2r_y q^2/\delta + h\sqrt{q}(1+q)\sqrt{r_x r_y} \end{cases} \quad (5.18)$$

Легко проверить, что первое и третье неравенства системы (5.18) являются следствиями второго и четвертого неравенств. Таким образом, для совместности системы (5.18) достаточно исследовать совместность системы

$$\begin{cases} -r_x + r_y q^2 > -q(r_x + r_y) - 2r_x/\delta + h\sqrt{q}(1+q)\sqrt{r_x r_y}, \\ r_x - r_y q^2 > -q(r_x + r_y) - 2r_y q^2/\delta + h\sqrt{q}(1+q)\sqrt{r_x r_y}, \end{cases} \quad (5.19)$$

которая эквивалентна системе

$$\begin{cases} 2r_y q^2 + q(r_x + r_y) + 2r_x/\delta > r_x + r_y q^2 + h\sqrt{q}(1+q)\sqrt{r_x r_y}, \\ 2r_x + q(r_x + r_y) + 2r_y q^2/\delta > r_x + r_y q^2 + h\sqrt{q}(1+q)\sqrt{r_x r_y}, \end{cases} \quad (5.20)$$

Элементарная проверка показывает, что система (5.20) имеет решение, например, при $r_x = 1, r_y = 10, l_x = 0.9, l_y = 10, k_x = 6, k_y = 1$. (Здесь $\delta = 18$ и $q = 0.3$.) Таким образом, существует фазовый портрет, содержащий внутри области устойчивости (не на границах) два устойчивых узла, а также седло.

3.Исследуем совместность системы (5.10), (5.16) (предельный цикл – устойчивый фокус):

$$\begin{cases} r_x - r_y q^2 > q(r_x + r_y) + 2r_x/\delta, \\ r_x - r_y q^2 < q(r_x + r_y) + 2r_x/\delta + h\sqrt{q}(1+q)\sqrt{r_x r_y}, \\ -r_x + r_y q^2 < q(r_x + r_y) + 2r_y q^2/\delta, \\ r_x - r_y q^2 < -q(r_x + r_y) - 2r_y q^2/\delta + h\sqrt{q}(1+q)\sqrt{r_x r_y} \end{cases} \quad (5.21)$$

Можно показать, что система (5.21) сводится к системе

$$\begin{cases} r_x - r_y q^2 > q(r_x + r_y) + 2r_x/\delta, \\ r_x - r_y q^2 < -q(r_x + r_y) - 2r_y q^2/\delta + h\sqrt{q}(1+q)\sqrt{r_x r_y}. \end{cases} \quad (5.22)$$

Положим в системе (5.22) $r_x = r_y = 1$. Тогда получим

$$\begin{cases} 1 - q^2 > 2q + 2/\delta, \\ 1 - q^2 < -2q - 2q^2/\delta + h\sqrt{q}(1+q). \end{cases} \quad (5.23)$$

Первое из неравенств (5.23) приводится к такому виду: $q < \sqrt{2(1-1/\delta)} - 1$. Тогда полагая $q = 2/5$ ($l_x = 4, l_y = 25$) и $\delta = 60$ ($k_x = 2, k_y = 3$) добьемся выполнения обеих неравенств системы (5.23).

Аналогично исследуется совместность системы (5.10), (5.15) (предельный цикл – устойчивый узел). Параметры, дающие эту топологическую ситуацию, могут быть взяты такими: $r_x = 1, r_y = 1, k_x = 2, k_y = 4, l_x = 1, l_y = 9$. (Здесь $\delta = 24, q = 1/3$.)

Наконец, легко проверить, что системы $D_J(1/(k_y\sqrt{l_x l_y})) > 0$ и $D_J(k_x) < 0$ или $D_J(1/(k_y\sqrt{l_x l_y})) < 0$ и $D_J(k_x) < 0$ совместны. Учитывая теперь, что в формуле (4.3) при $\delta > 1$ второе слагаемое всегда отрицательно и $\text{tr}J(1/(k_y\sqrt{l_x l_y})) < 0, \text{tr}J(k_x) < 0$, то из (4.4) следует, что в случае $D_J(1/(k_y\sqrt{l_x l_y})) > 0$ и $D_J(k_x) < 0$ точка S_5 – устойчивый узел, а точка S_7 – устойчивый фокус; если же $D_J(1/(k_y\sqrt{l_x l_y})) < 0$ и $D_J(k_x) < 0$, то S_5 и S_7 – устойчивые фокусы. (Это же было показано и в [1].)

Пусть $\text{tr}J(S_7) \geq 0$, а $D_J(S_5) < 0$ и $D_J(S_7) < 0$. Обозначим через $Q \in \mathcal{A} - \partial\mathcal{A}$ односвязную область ограниченную сепаратриссами, проходящими через точки S_6 и S_4, S_6 и S_2 , осью OX и сепаратриссой, проходящей через точку S_4 и заключенную между положительными направлениями осей координат. Удалим из области Q такой круг P достаточно малого радиуса с центром в точке S_7 , чтобы он не пересекался с границами области Q .

Таким образом, $Q - P$ – положительное инвариантное открытое множество. С одной стороны все точки круга P удовлетворяют теореме 2 и потому в P нет периодических решений. С другой стороны, точка $S_7 \in P$ – неустойчивый фокус. Тогда, согласно теореме 1, в Q должен существовать предельный цикл. Тем самым, все ситуации, перечисленные в теореме доказаны; других возможностей не существует. \square

Следствие. Если $D_J(S_5) < 0$ и $D_J(S_7) < 0$ и $\text{tr}J(S_7) = 0$, то топологический портрет системы (1.1) имеет четыре седла, один устойчивый фокус, один центр и один неустойчивый узел; если же $D_J(S_5) > 0$ и $D_J(S_7) < 0$ и $\text{tr}J(S_7) = 0$, то топологический портрет системы (1.1) имеет четыре седла, один устойчивый узел, один центр и один неустойчивый узел.

6. Топологическая классификация

Теоремы 4 и 5 дают описание фазовых портретов системы (1.1) в первом квадранте только в терминах решений системы (2.1) и мало что говорят о том, как будут изменяться эти портреты при изменении параметров.

Составим функцию $x^2 D_J(x, y) \equiv c_0 x^4 + c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4 = 0$, где

$$c_0 = \frac{4r_x^2}{k_x^2(1 + \sqrt{l_x/l_y})^4},$$

$$c_1 = -\frac{4r_x}{k_x(1 + \sqrt{l_x/l_y})^2} \left(\frac{r_x(\sqrt{l_y/l_x} - \sqrt{l_x/l_y})}{(1 + \sqrt{l_y/l_x})(1 + \sqrt{l_x/l_y})^2} + \frac{r_y(\sqrt{l_x/l_y} - \sqrt{l_y/l_x})}{(1 + \sqrt{l_x/l_y})(1 + \sqrt{l_y/l_x})^2} \right) -$$

$$\frac{24r_x r_y(3 + 3\sqrt{l_x/l_y} + \sqrt{l_y/l_x} + l_x/l_y)}{k_x(1 + \sqrt{l_x/l_y})^3(1 + \sqrt{l_y/l_x})^2},$$

$$c_2 = \left(\frac{r_x(\sqrt{l_y/l_x} - \sqrt{l_x/l_y})}{(1 + \sqrt{l_y/l_x})(1 + \sqrt{l_x/l_y})^2} + \frac{r_y(\sqrt{l_x/l_y} - \sqrt{l_y/l_x})}{(1 + \sqrt{l_x/l_y})(1 + \sqrt{l_y/l_x})^2} \right)^2 +$$

$$+ \frac{8r_x r_y}{k_x k_y \sqrt{l_x l_y} (1 + \sqrt{l_x/l_y})^2 (1 + \sqrt{l_y/l_x})^2} + \frac{4r_x r_y}{(1 + \sqrt{l_x/l_y})^2 (1 + \sqrt{l_y/l_x})^2} \times$$

$$\times \left(\frac{4(\sqrt{l_y/l_x} - \sqrt{l_x/l_y})^2}{(1 + \sqrt{l_y/l_x})(1 + \sqrt{l_x/l_y})} + \frac{8(1 + \sqrt{l_x/l_y})(1 + \sqrt{l_y/l_x})}{k_x k_y \sqrt{l_x l_y}} + 16 \right),$$

$$c_3 = -\frac{4r_y}{k_y \sqrt{l_x l_y} (1 + \sqrt{l_y/l_x})^2} \left(\frac{r_x(\sqrt{l_y/l_x} - \sqrt{l_x/l_y})}{(1 + \sqrt{l_y/l_x})(1 + \sqrt{l_x/l_y})^2} + \frac{r_y(\sqrt{l_x/l_y} - \sqrt{l_y/l_x})}{(1 + \sqrt{l_x/l_y})(1 + \sqrt{l_y/l_x})^2} \right) -$$

$$\frac{24r_x r_y(3 + 3\sqrt{l_y/l_x} + \sqrt{l_x/l_y} + l_y/l_x)}{k_y \sqrt{l_x l_y} (1 + \sqrt{l_x/l_y})^2 (1 + \sqrt{l_y/l_x})^3},$$

$$c_4 = \frac{4r_y^2}{k_y^2 l_x l_y (1 + \sqrt{l_y/l_x})^4}.$$

Известно [3], что уравнения $a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_3 x + a_4 = 0 (a_0 \neq 0)$ и $c_0 x^4 + c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4 = 0 (c_0 \neq 0)$ имеют общий корень тогда и только тогда, когда результат F_1 полиномов $f(x) = a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_3 x + a_4$ и $g(x) = c_0 x^4 + c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4$ будет равен нулю:

$$F_1(r_x, r_y, l_x, l_y, k_x, k_y) \equiv \det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & 0 & a_3 & a_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & 0 & a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & 0 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & 0 & a_3 & a_4 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix} = 0.$$

(Первое бифуркационное уравнение в пространстве параметров.)

Теорема 6. Пусть для уравнения (2.4) дискриминант $D < 0$. Тогда в первом квадранте существует всего два топологически неэквивалентных фазовых портрета системы (1.1), каждый из которых определяется одним из условий:

$$F_1(r_x, r_y, l_x, l_y, k_x, k_y) < 0 \text{ или } F_1(r_x, r_y, l_x, l_y, k_x, k_y) > 0.$$

Доказательство. Пусть μ_1, \dots, μ_4 – корни полинома $f(x)$, а ν_1, \dots, ν_4 – корни полинома $g(x)$. Согласно [3]

$$F_1(r_x, r_y, l_x, l_y, k_x, k_y) = r \prod_{i < k} (\mu_i - \nu_k) = h \prod_{i=1}^4 g(\mu_i),$$

где r, h – ненулевые константы. Поэтому, если $F_1(r_x, r_y, l_x, l_y, k_x, k_y) = 0$, то существует индекс $i \in \{1, \dots, 4\}$ такой, что $g(\mu_i) = 0$.

Далее имеем: $\mu_1 < 0$, $\mu_2 > 0$, $\mu_3 = r + \sqrt{-1}k$, $\mu_4 = r - \sqrt{-1}k$. Так как $g(x)$ – полином 4-й степени, то $g(r + \sqrt{-1}k) = h_1 + \sqrt{-1}h_2$, $g(r - \sqrt{-1}k) = h_1 - \sqrt{-1}h_2$. Следовательно, $\alpha = g(r + \sqrt{-1}k) \cdot g(r - \sqrt{-1}k) > 0$, и потому

$$F_1(r_x, r_y, l_x, l_y, k_x, k_y) = r \prod_{i < k} (\mu_i - \nu_k) = h \cdot \alpha \cdot g(\mu_1)g(\mu_2),$$

где $h > 0$ и $\alpha > 0$.

В силу того, что при $\mu_i \neq \nu_k$, функции $F_1(r_x, r_y, l_x, l_y, k_x, k_y)$ и D_J в промежутках между корнями сохраняют знак, в теореме 4 функцию D_J можно заменить на $F_1(r_x, r_y, l_x, l_y, k_x, k_y)$. Наконец, замечание о том, что выше сепаратриссы, отделяющей область устойчивости системы (1.1) от области неустойчивости, фазовый портрет не зависит от знака $D_J(x, y)$ и полностью определяется асимптотой, проходящей через начало координат и точку S_5 при $\delta < 1$ или S_4 при $\delta > 1$ [1], завершает доказательство. \square

Пусть

$$b_0 = \frac{2r_x}{k_x(1 + \sqrt{l_x/l_y})^2}, \quad b_2 = \frac{2r_y}{k_y\sqrt{l_x l_y}(1 + \sqrt{l_y/l_x})^2},$$

$$b_1 = -\left(\frac{r_x(\sqrt{l_y/l_x} - \sqrt{l_x/l_y})}{(1 + \sqrt{l_y/l_x})(1 + \sqrt{l_x/l_y})^2} + \frac{r_y(\sqrt{l_x/l_y} - \sqrt{l_y/l_x})}{(1 + \sqrt{l_x/l_y})(1 + \sqrt{l_y/l_x})^2} \right).$$

Снова можно показать, что уравнения $a_0x^4 + a_1x^3 + a_3x + a_4 = 0$ и $x \cdot \text{tr}J(x, y) \equiv \equiv b_0x^2 + b_1x + b_2 = 0$ имеют общий корень, если результат $F_2(r_x, r_y, l_x, l_y, k_x, k_y)$ полиномов $a_0x^4 + a_1x^3 + a_3x + a_4$ и $b_0x^2 + b_1x + b_2$ будет равен нулю:

$$F_2(r_x, r_y, l_x, l_y, k_x, k_y) = \det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & 0 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & 0 & a_3 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix} = 0.$$

(Уравнение $F_2(r_x, r_y, l_x, l_y, k_x, k_y) = 0$ называется вторым бифуркационным уравнением в пространстве параметров $r_x, r_y, l_x, l_y, k_x, k_y$.)

Теорема 7. Пусть для уравнения (2.4) дискриминант $D > 0$. Тогда в первом квадранте существует один из шести топологически неэквивалентных фазовых портретов системы (1.1), отвечающих ситуациям 1) – 6) теоремы 5, каждая из которых определяется одной из четырех пар неравенств:

$$F_1(r_x, r_y, l_x, l_y, k_x, k_y) \leq 0, \quad F_2(r_x, r_y, l_x, l_y, k_x, k_y) \leq 0.$$

Доказательство теоремы 7 почти дословно повторяет доказательство теоремы 6. Тогда функции $\text{tr}J(x, y)$ и $D_J(x, y)$ можно заменить, соответственно, функциями $F_2(r_x, r_y, l_x, l_y, k_x, k_y)$ и $F_1(r_x, r_y, l_x, l_y, k_x, k_y)$. \square

Замечание. Знак функции $\text{tr}J(x, y)$ не обязательно должен совпадать со знаком функции F_2 (соответственно для функций $D_J(x, y)$ и F_1). Поэтому условия теоремы 6 различают ситуации, указанные в теореме 4, однако не указывают конкретно каждую из них. (Другими словами, если при условии $F_2 < 0$ точка S_5 – фокус, то тогда при $F_2 > 0$ эта точка обязательно будет узлом. Наоборот, если при условии $F_2 < 0$ точка S_5 – узел, то тогда при $F_2 > 0$ она обязательно будет фокусом). Аналогичное утверждение имеет место и для теорем 7 и 5.

Кроме того, на первый взгляд кажется, что уравнения $F_1 = 0$ и $F_2 = 0$ делят область $D > 0$ 6-мерного пространства параметров \mathbb{R}^6 на четыре подобласти, а не на шесть, как указано в теореме 5. На самом деле 5-мерные поверхности $F_1 = 0$ и $F_2 = 0$ в \mathbb{R}^6 могут самопересекаться по подмногообразиям в \mathbb{R}^6 размерности ≤ 4 . Таким образом, в области $D > 0$ существует больше, чем 4 подобласти, параметры каждой из которых определяют один тот же топологический портрет.

Приведем все восемь типичных фазовых портретов, которые могут иметь место при $D \neq 0$.

Рис. 1: $r_x = 2, r_y = 4, k_x = 2, k_y = 2, l_x = 0.5, l_y = 2$. Здесь $D < 0$ и имеем один устойчивый фокус, один неустойчивый узел, а также три седла.

Рис. 2: $r_x = 2, r_y = 4, k_x = 2, k_y = 1, l_x = 0.5, l_y = 2$. Здесь $D < 0$ и имеем один устойчивый узел, один неустойчивый узел, а также три седла.

Рис. 3: $r_x = 1, r_y = 1, k_x = 5, k_y = 5, l_x = 0.5, l_y = 0.5$. Здесь $D > 0$ и имеем два устойчивых фокуса, один неустойчивый узел, а также четыре седла.

Рис. 4: $r_x = 3, r_y = 7, k_x = 2, k_y = 1, l_x = 49, l_y = 1$. Здесь $D > 0$ и имеем один устойчивый узел, один неустойчивый узел, один предельный цикл, а также четыре седла.

Рис. 5: $r_x = 1, r_y = 1, k_x = 4, k_y = 2, l_x = 9, l_y = 1$. Здесь $D > 0$ и имеем один устойчивый фокус, один неустойчивый узел, один предельный цикл, а также четыре седла.

Рис. 6: $r_x = 0.001, r_y = 0.05, k_x = 16, k_y = 2, l_x = 1, l_y = 19$. Здесь $D > 0$ и имеем один устойчивый фокус, один неустойчивый узел, один устойчивый узел, а также четыре седла.

Рис. 7: $r_x = 1$, $r_y = 1$, $k_x = 15$, $k_y = 1$, $l_x = 1$, $l_y = 50$. Здесь $D > 0$ и имеем один устойчивый узел, два неустойчивых узла, а также четыре седла.

Рис. 8: $r_x = 1$, $r_y = 10$, $l_x = 0.9$, $l_y = 10$, $k_x = 6$, $k_y = 1$. Здесь $D > 0$ и имеем два устойчивых узла, один неустойчивый узел, а также четыре седла.

Кроме этого, приведем один структурно неустойчивый фазовый портрет:

Рис. 9: $r_x = 1.32$, $r_y = 1$, $k_x = 4$, $k_y = 2$, $l_x = 9$, $l_y = 1$. Здесь $D > 0$ и имеем один устойчивый фокус, один неустойчивый узел, один центр, а также четыре седла.

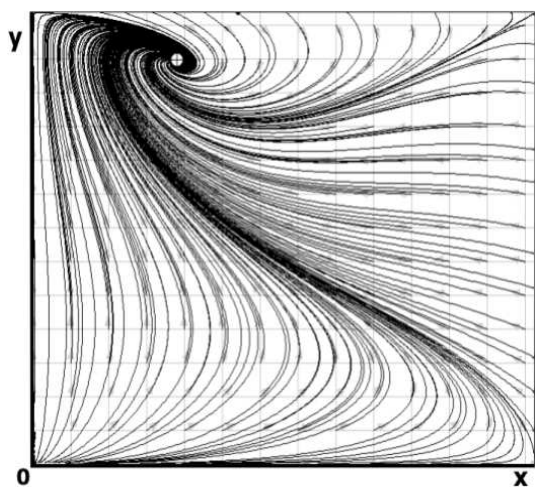


Рис. 1

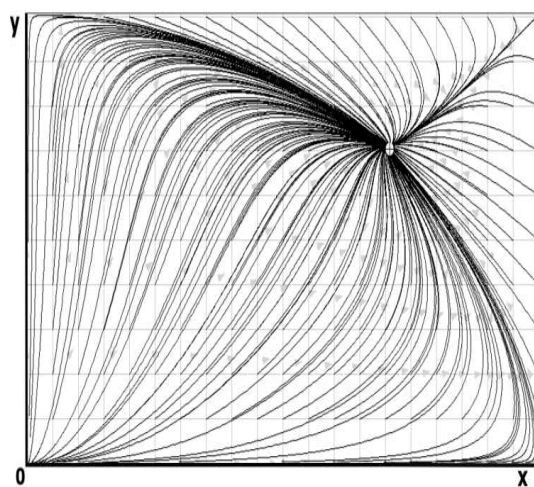


Рис. 2

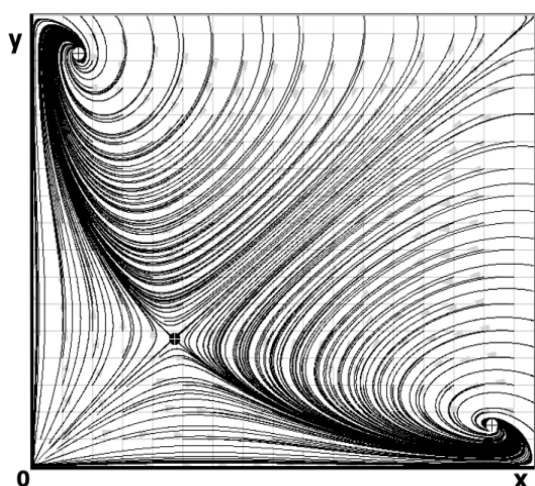


Рис. 3

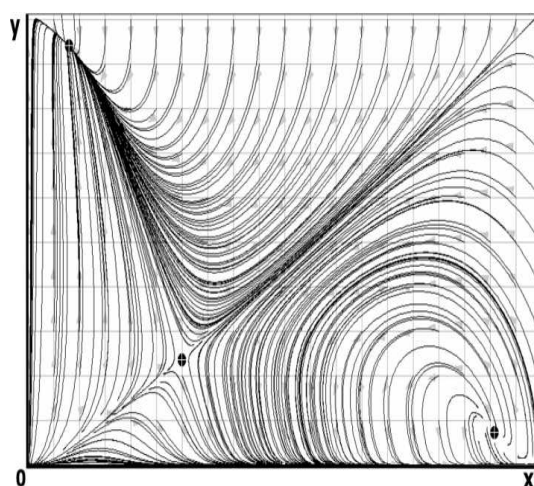


Рис. 4

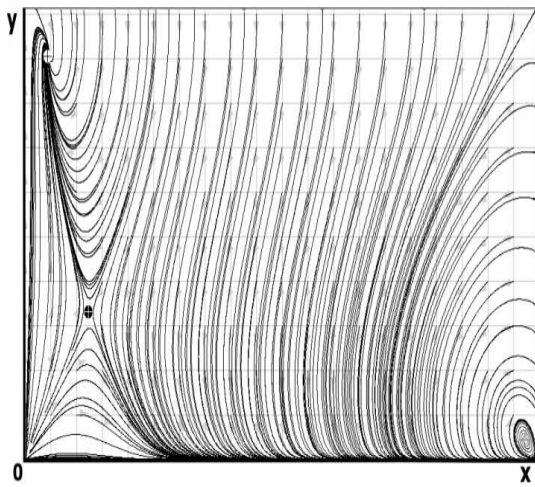


Рис. 5

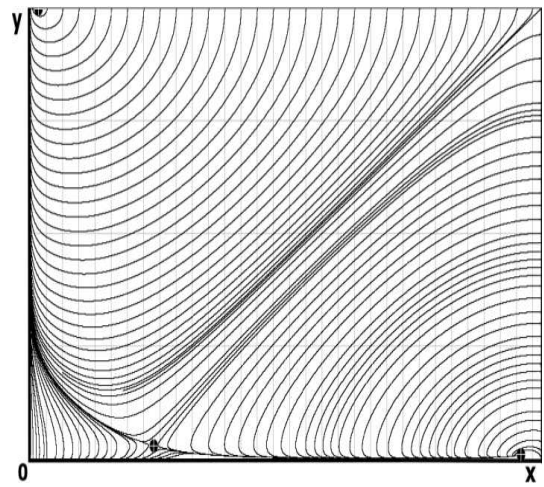


Рис. 6

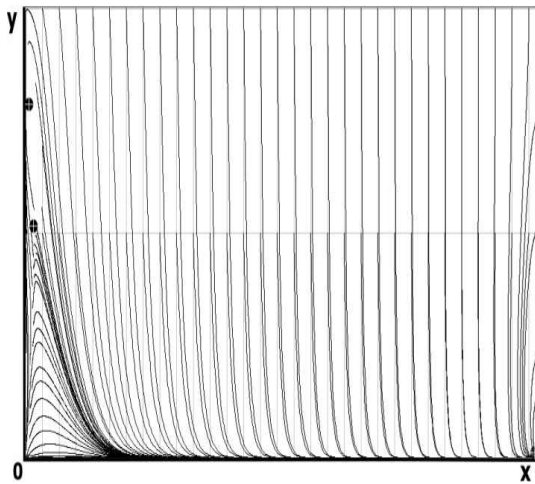


Рис. 7

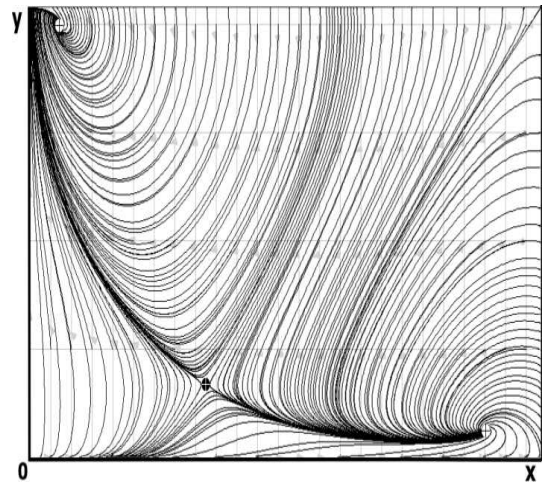


Рис. 8

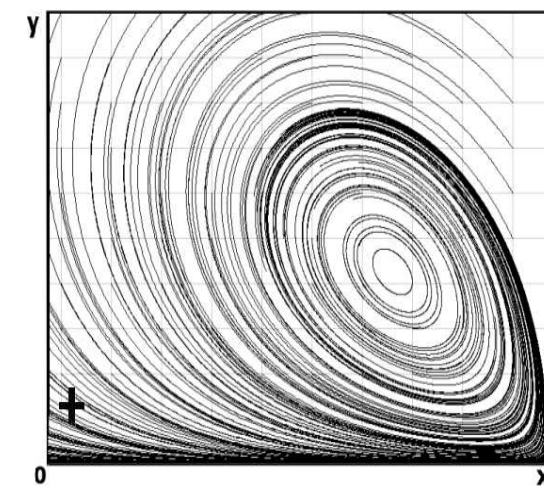
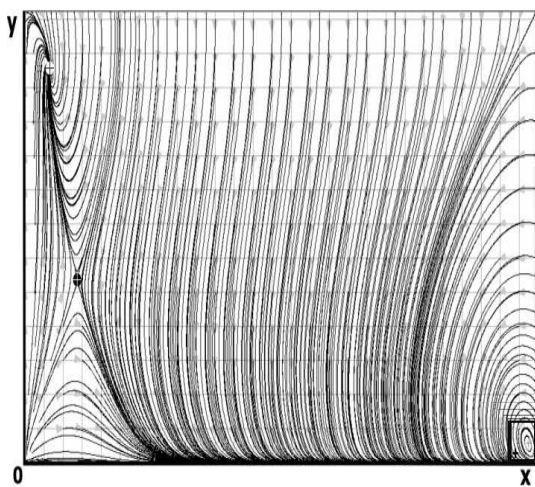


Рис. 9 (общий вид и выделенный центр)

7. Заключение

Таким образом, в работе найдены все топологически неэквивалентные фазовые портреты модели (1.1) для случая ненулевого дискриминанта матрицы Якоби. Их оказалось восемь, и они демонстрируют большое потенциальное разнообразие сценариев экологической конкуренции.

Очень интересна возможность колебательных режимов конкуренции, которые известны в природе, но не описываются классическими моделями. Особенно любопытны случаи с предельным циклом, т.е. асимптотические режимы с незатухающими колебаниями. Как правило, они отличаются малой амплитудой и соответствуют случаю очевидного доминирования одной из популяций. В основе их лежит простой экологический механизм. В условиях полного подавления одной из популяций вторая практически полностью переключает свой энергетический потенциал на процессы собственного воспроизводства, что позволяет угнетенной популяции несколько поднять свою численность. Это, в свою очередь, вызывает частичное использование энергии популяции-доминанта для угнетения конкурента, численность последнего вновь становится очень малой, и цикл повторяется.

Список цитируемых источников

1. Чернышенко В. С., Белозеров В. Е., Чернышенко С. В. Исследование обобщенной модели экологической конкуренции с учетом популяционных стратегий видов // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Днепропетровск: Изд-во Днепропетровського національного університету. – 2006. – с.268 – 288.
2. Khalil H. K. Nonlinear Systems (Second Edition). – New-York: Prentice Hall, Upper Saddle River, 1995. – 730 p.
3. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. – М.: Наука, 1976. – 648 с.
4. Магницкий Н. А., Сидоров С. В. Новые методы хаотической динамики. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 320 с.
5. Belozyorov V. Ye. On stability cones for quadratic systems of differential equations // Journal of dynamics and control systems. – 2005. – Vol. 11, №3. – P. 29–53.

Получено 26.11.2006