Динамические системы, вып. 22 (2007), 37–45

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 517.977, 531.39

Оптимальное управление в задаче о колебаниях упругой системы[1]

А.Л. Зуев

Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
Донецк 83114. *E-mail: al_zv@mail.ru*

Аннотация. Рассмотрена математическая модель вращающейся механической системы с упругой балкой, которая была введена в предыдущей работе автора. Решена задача минимизации квадрата нормы управления при фиксированных начальном и конечном положениях системы. При этом использована каноническая форма Бруновского и сведение задачи оптимального управления к задаче Лагранжа.

1. Введение

Классический подход к решению задач оптимального управления, изложенный в известных монографиях [3, 2, 7, 8], предполагает использование принципа максимума Понтрягина или метода динамического программирования Беллмана. Следует подчеркнуть, что метод Беллмана позволяет эффективно свести задачу оптимального управления для линейной системы с квадратичным функционалом качества к решению матричного уравнения Риккати для случая, если граничное условие в конечный момент времени не задано (см. [8, Chap. 8.2]). В предлагаемой статье использован иной подход к решению задачи оптимального управления с граничными условиями на обоих концах отрезка времени. Такой подход опирается на сведение задачи оптимального управления к вариационной задаче Лагранжа относительно вспомогательной функции $y(t)$. В работе использован результат предыдущей статьи автора [1] о приведении управляемой системы к канонической форме Бруновского.

[1]Работа поддержана за счет бюджетных средств МОН Украины, предоставленных как грант Президента Украины №GP/F13/0173.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &\dot{\xi}_0 = \eta_0, \\ &\dot{\eta}_0 = v, \\ &\dot{\xi}_j = \omega_j \eta_j, \\ &\dot{\eta}_j = -\omega_j \xi_j + b_j v, \quad (j = \overline{1, N}), \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $x = (\xi_0, \eta_0, \xi_1, \eta_1, \dots, \xi_N, \eta_N)^T \in \mathbb{R}^{2N+2}$ – фазовый вектор, $v \in \mathbb{R}$ – управление. Система (2.1) введена в работе [1] для описания плоского вращения твердого тела с упругими балками в конечномерной постановке под действием управляющего момента.[2] Здесь число $N \geq 1$ характеризует количество обобщенных (модальных) координат, используемых для описания колебаний балки; способ вычисления коэффициентов ω_j, b_j указан в [1]. В цитируемой работе рассмотрена двухточечная задача управления, которую можно сформулировать следующим образом.

Задача 1. Для заданных

$$t_0 < t_1,\ x^0 = \left(\xi_0^0, \eta_0^0, ..., \xi_N^0, \eta_N^0\right)^T \in \mathbb{R}^{2N+2},\ x^1 = \left(\xi_0^1, \eta_0^1, ..., \xi_N^1, \eta_N^1\right)^T \in \mathbb{R}^{2N+2}$$

требуется найти функцию управления $v = v(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, для которой система (2.1) имеет решение $x(t)$, удовлетворяющее граничным условиям $x(t_0) = x^0$, $x(t_1) = x^1$.

В качестве допустимых управлений $v(t)$ в статье [1] рассматривались непрерывные функции. Возможно также использовать более широкие классы допустимых управлений $L_\infty[t_0, t_1]$, $L_2[t_0, t_1]$ и определять решения системы (2.1) с помощью формулы Коши (формулы вариации произвольных постоянных) (см. напр. [2, гл. 2], [6, Chap. 14]). Известно, что задача 1 в общем случае имеет бесконечно много решений, и реализация некоторых решений может приводить к слишком большим значениям нормы управления. Поэтому рассмотрим задачу оптимального управления следующего вида.

Задача 2. Для заданных $t_0 < t_1$ и $x^0, x^1 \in \mathbb{R}^{2N+2}$ требуется найти функцию управления $\bar{v} \in L_2[t_0, t_1]$, которая минимизирует значения функционала

$$J(v) = \int_{t_0}^{t_1} |v(t)|^2 dt \tag{2.2}$$

в классе всех управлений $v \in L_2[t_0, t_1]$, решающих задачу 1.

Поскольку система (2.1) автономна, то без ограничения общности в дальнейшем будем считать, что $t_0 = 0$, $t_1 = \tau > 0$. Сформулируем основной результат о разрешимости задачи 2.

---

[2] Процедура вывода нелинейных бесконечномерных уравнений движения системы с упругими балками приведена в статье [9]

Теорема 1. *Пусть $b_j \neq 0$, $\omega_j \neq 0$, и все числа ω_j^2 различны для $j = \overline{1,N}$. Тогда для любых $x^0, x^1 \in \mathbb{R}^{2N+2}$, $\tau > 0$ существует единственное оптимальное управление $\bar{v}(t)$, $t \in [0,\tau]$, решающее задачу 2. Указанное оптимальное управление является гладким и задается формулой*

$$\bar{v}(t) = k_0 + k_1 t + \sum_{j=1}^{N} \left(U_j \cos(\omega_j t) + V_j \sin(\omega_j t)\right),\ t \in [0,\tau]$$

где коэффициенты k_0, k_1, U_j, V_j удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений:

$$\frac{\tau^2}{2}k_0 + \frac{\tau^3}{6}k_1 + \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1-\cos(\omega_j\tau)}{\omega_j^2}U_j + \frac{\omega_j\tau - \sin(\omega_j\tau)}{\omega_j^2}V_j\right) = \xi_0^1 - \xi_0^0 - \eta_0^0\tau;$$

$$\tau k_0 + \frac{\tau^2}{2}k_1 + \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\sin(\omega_j\tau)}{\omega_j}U_j + \frac{1-\cos(\omega_j\tau)}{\omega_j}V_j\right) = \eta_0^1 - \eta_0^0;$$

$$\frac{\cos(\omega_j\tau)-1}{\omega_j}k_0 + \frac{\omega_j\tau\cos(\omega_j\tau) - \sin(\omega_j\tau)}{\omega_j^2}k_1 - \frac{\sin^2(\omega_j\tau)}{2\omega_j}U_j + \frac{\sin(2\omega_j\tau) - 2\omega_j\tau}{4\omega_j}V_j +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\left(\frac{\cos(\omega_i+\omega_j)\tau}{\omega_i+\omega_j} + \frac{\cos(\omega_j-\omega_i)\tau}{\omega_j-\omega_i} + \frac{2\omega_j}{\omega_i^2-\omega_j^2}\right)U_i +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\left(\frac{\sin(\omega_i+\omega_j)\tau}{\omega_i+\omega_j} + \frac{\sin(\omega_i-\omega_j)\tau}{\omega_j-\omega_i}\right)V_i = \frac{\xi_j^1\cos(\omega_j\tau) - \eta_j^1\sin(\omega_j\tau) - \xi_j^0}{b_j};$$

$$\frac{\sin(\omega_j\tau)}{\omega_j}k_0 + \frac{\omega_j\tau\sin(\omega_j\tau) + \cos(\omega_j\tau) - 1}{\omega_j^2}k_1 + \frac{2\omega_j\tau + \sin(2\omega_j\tau)}{4\omega_j}U_j + \frac{\sin^2(\omega_j\tau)}{2\omega_j}V_j +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\left(\frac{\cos(\omega_i-\omega_j)\tau}{\omega_j-\omega_i} - \frac{\cos(\omega_i+\omega_j)\tau}{\omega_i+\omega_j} + \frac{2\omega_i}{\omega_i^2-\omega_j^2}\right)V_i +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\left(\frac{\sin(\omega_i+\omega_j)\tau}{\omega_i+\omega_j} + \frac{\sin(\omega_i-\omega_j)\tau}{\omega_i-\omega_j}\right)U_i = \frac{\xi_j^1\sin(\omega_j\tau) + \eta_j^1\cos(\omega_j\tau) - \eta_j^0}{b_j},\ j = \overline{1,N}. \tag{2.3}$$

Доказательство этой теоремы будет проведено в разделе 4.

3. Вспомогательные построения

Если выполнены условия теоремы 1, то каждое непрерывное управление $v(t)$, решающее задачу 1, можно представить в таком виде [1, теорема 2]:

$$v(t) = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{d^{2N+2}}{dt^{2N+2}} + \sum_{p=1}^{N}\gamma_p\frac{d^{2p}}{dt^{2p}}\right)y(t),\ t \in [t_0, t_1], \tag{3.1}$$

где

$$\alpha = c_0 \sum_{j=1}^{N} \Bigl(\omega_j^{2N} \prod_{\substack{1 \le i \le N \\ i \ne j}} \frac{\omega_i^2}{\omega_j^2 - \omega_i^2} \Bigr), \tag{3.2}$$

$$\gamma_p = \sum_{k=1}^{N} \Bigl\{ \omega_k^{2N} \Bigl(\prod_{\substack{1 \le l \le N \\ l \ne k}} \frac{1}{\omega_k^2 - \omega_l^2} \Bigr) \sum_{\substack{1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_{N-p} \le N \\ j_1, j_2, \ldots, j_{N-p} \ne k}} (\omega_{j_1} \omega_{j_2} \cdots \omega_{j_{N-p}})^2 \Bigr\}, \tag{3.3}$$

а функция $y \in C^{2N+2}[t_0, t_1]$ удовлетворяет граничным условиям:

$$y(t_i) = \sum_{j=0}^{N} c_j \xi_j^i, \ \dot y(t_i) = c_0 \eta_0^i + \sum_{j=1}^{N} c_j \omega_j \eta_j^i,$$

$$\left(\begin{array}{c} \frac{d^2}{dt^2} y \\ \frac{d^4}{dt^4} y \\ \vdots \\ \frac{d^{2N}}{dt^{2N}} y \end{array} \right)_{t=t_i} = -W \left(\begin{array}{c} c_1 \omega_1^2 \xi_1^i \\ c_2 \omega_2^2 \xi_2^i \\ \vdots \\ c_N \omega_N^2 \xi_N^i \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \frac{d^3}{dt^3} y \\ \frac{d^5}{dt^5} y \\ \vdots \\ \frac{d^{2N+1}}{dt^{2N+1}} y \end{array} \right)_{t=t_i} = -W \left(\begin{array}{c} c_1 \omega_1^3 \eta_1^i \\ c_2 \omega_2^3 \eta_2^i \\ \vdots \\ c_N \omega_N^3 \eta_N^i \end{array} \right), \ i = 0, 1. \tag{3.4}$$

Здесь c_0 – произвольная ненулевая константа,

$$c_j = -\frac{c_0}{\omega_j b_j} \prod_{\substack{1 \le i \le N \\ i \ne j}} \frac{\omega_i^2}{\omega_i^2 - \omega_j^2}, \ W = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ -\omega_1^2 & -\omega_2^2 & \ldots & -\omega_N^2 \\ \omega_1^4 & \omega_2^4 & \ldots & \omega_N^4 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-\omega_1^2)^{N-1} & (-\omega_2^2)^{N-1} & \ldots & (-\omega_N^2)^{N-1} \end{array} \right). \tag{3.5}$$

В случае $p = N$ сумма в формуле (3.3) полагается равной единице; все произведения с пустым множеством индексов также считаются равными единице. Приведем более удобную форму записи управления (3.1).

Лемма 1. *Формула (3.1) эквивалентна следующей:*

$$v(t) = \frac{1}{c_0 \omega_1^2 \omega_2^2 \ldots \omega_N^2} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_1^2 \right) \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_2^2 \right) \ldots \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_N^2 \right) \frac{d^2 y(t)}{dt^2}, \ t \in [t_0, t_1]. \tag{3.6}$$

Доказательство. Раскрывая скобки в формуле (3.6) и приравнивая коэффициенты при соответствующих производных от $y(t)$ в (3.1) и (3.6), получим:

$$\alpha = c_0 \omega_1^2 \omega_2^2 \ldots \omega_N^2, \ \gamma_p = \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_{N-p+1} \le N} \omega_{j_1}^2 \omega_{j_2}^2 \ldots \omega_{j_{N-p+1}}^2. \tag{3.7}$$

Для доказательства леммы достаточно установить равенства (3.7), где α и γ_p определяются выражениями (3.2) и (3.3). С этой целью вычислим определитель матрицы, образованной строками W из (3.5):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ -\omega_1^2 & -\omega_2^2 & \dots & -\omega_N^2 \\ (-\omega_1^2)^2 & (-\omega_2^2)^2 & \dots & (-\omega_N^2)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-\omega_1^2)^{N-2} & (-\omega_2^2)^{N-2} & \dots & (-\omega_N^2)^{N-2} \\ (-\omega_1^2)^{N-m} & (-\omega_2^2)^{N-m} & \dots & (-\omega_N^2)^{N-m} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+m} \omega_k^{2(N-m)} \Delta_k, \tag{3.8}$$

где $1 \leq m \leq N$, Δ_k – минор, полученный вычеркиванием последней строки и k-го столбца матрицы W. Формула (3.8) получена разложением определителя по элементам нижней строки. Из известной формулы для определителя Вандермонда [4, с. 32] следует, что

$$|W| = \prod_{i<l} (\omega_i^2 - \omega_l^2), \ \Delta_k = \prod_{\substack{i<l \\ i,l \neq k}} (\omega_i^2 - \omega_l^2).$$

Подстановка этих выражений в формулу (3.8) при $m = 1$ дает такое тождество:

$$|W| = \prod_{i<l} (\omega_i^2 - \omega_l^2) = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+1} \omega_k^{2(N-1)} \prod_{\substack{i<l \\ i,l \neq k}} (\omega_i^2 - \omega_l^2). \tag{3.9}$$

Заметим также, что для произвольного фиксированного индекса j, $1 \leq j \leq N$, выполняется равенство:

$$|W| = \prod_{i<l} (\omega_i^2 - \omega_l^2) = \Big(\prod_{i<j} (\omega_i^2 - \omega_j^2) \Big) \Big(\prod_{i>j} (\omega_j^2 - \omega_i^2) \Big) \Big(\prod_{\substack{i<l \\ i,l \neq j}} (\omega_i^2 - \omega_l^2) \Big). \tag{3.10}$$

Учитывая, что строки матрицы в (3.8) линейно зависимы при $1 < m \leq N$, получим

$$\sum_{k=1}^{N} (-1)^k \omega_k^{2(N-m)} \prod_{\substack{i<l \\ i,l \neq k}} (\omega_i^2 - \omega_l^2) = 0, \quad (1 < m \leq N). \tag{3.11}$$

Перепишем формулу (3.2) для α следующим образом:

$$\alpha = c_0 \omega_1^2 \dots \omega_N^2 \sum_{j=1}^{N} \frac{\omega_j^{2(N-1)}}{\prod_{i \neq j} (\omega_j^2 - \omega_i^2)} = c_0 \omega_1^2 \dots \omega_N^2 \sum_{j=1}^{N} \frac{(-1)^{j-1} \omega_j^{2(N-1)}}{\Big(\prod_{i<j} (\omega_i^2 - \omega_j^2) \Big) \Big(\prod_{i>j} (\omega_j^2 - \omega_i^2) \Big)}.$$

После приведения дроби под знаком суммы к общему знаменателю $|W|$ и применения формулы (3.10), получим

$$\alpha = \frac{c_0\omega_1^2 \dots \omega_N^2}{|W|} \sum_{j=1}^{N} \Big((-1)^{j-1} \omega_j^{2(N-1)} \prod_{\substack{i<l \\ i,l\neq j}} (\omega_i^2 - \omega_l^2) \Big).$$

Отсюда с учетом разложения (3.9) следует, что $\alpha = c_0\omega_1^2\omega_2^2 \dots \omega_N^2$. Итак, остается доказать равенство (3.7) для γ_p. Приводя выражение (3.3) к общему знаменателю $|W|$ с помощью представления (3.10), будем иметь

$$\gamma_p = \frac{1}{|W|} \sum_{k=1}^{N} \Big\{ (-1)^{k-1} \omega_k^{2N} \Big(\prod_{\substack{i<l \\ i,l\neq k}} (\omega_i^2 - \omega_l^2) \Big) \sum_{\substack{1\le j_1 < \dots < j_{N-p} \le N \\ j_1,\dots,j_{N-p}\neq k}} (\omega_{j_1}\omega_{j_2} \cdots \omega_{j_{N-p}})^2 \Big\}. \tag{3.12}$$

Рассуждая по индукции, получим

$$\omega_k^{2N} \sum_{\substack{j_1 < \dots < j_{N-p} \\ j_1,\dots,j_{N-p}\neq k}} (\omega_{j_1} \cdots \omega_{j_{N-p}})^2 = \omega_k^{2(N-1)} \sum_{j_1<\dots<j_{N-p+1}} (\omega_{j_1} \cdots \omega_{j_{N-p+1}})^2 -$$

$$-\omega_k^{2(N-1)} \sum_{\substack{j_1 < \dots < j_{N-p+1} \\ j_1,\dots,j_{N-p+1}\neq k}} (\omega_{j_1} \cdots \omega_{j_{N-p+1}})^2 =$$

$$= \sum_{m=1}^{p} (-1)^{m-1} \omega_k^{2(N-m)} \sum_{j_1<\dots<j_{N-p+m}} (\omega_{j_1} \cdots \omega_{j_{N-p+m}})^2. \tag{3.13}$$

Подставим (3.13) в (3.12) и воспользуемся свойством (3.11) для значений индекса $m > 1$. В результате останутся только слагаемые, соответствующие $m = 1$:

$$\gamma_p = \frac{1}{|W|} \sum_{k=1}^{N} \Big\{ (-1)^{k-1} \omega_k^{2(N-1)} \Big(\prod_{\substack{i<l \\ i,l\neq k}} (\omega_i^2 - \omega_l^2) \Big) \sum_{j_1<\dots<j_{N-p+1}} (\omega_{j_1} \cdots \omega_{j_{N-p+1}})^2 \Big\} =$$

$$= \sum_{j_1<\dots<j_{N-p+1}} (\omega_{j_1} \cdots \omega_{j_{N-p+1}})^2.$$

Здесь использовано представление (3.9). Итак, равенства (3.7) доказаны. □

4. Доказательство теоремы 1

Рассмотрим сначала задачу 2 в классе непрерывных функций управления $v(t)$ на отрезке $t \in [0,\tau]$. Из представления (3.1) и леммы 1 следует, что задача 2 эквивалентна задаче Лагранжа о минимизации функционала $\tilde{J}(y)$:

$$\tilde{J}(y) = \int_0^\tau F\left(y, \dot{y}, \ddot{y}, ..., y^{(2N+2)}\right) dt \to \min, \tag{4.1}$$

$$F\left(y, \dot{y}, \ddot{y}, ..., y^{(2N+2)}\right) = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega_1^2\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega_2^2\right)\dots\left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega_N^2\right)\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right\}^2,$$

в классе функций $y \in C^{2N+2}[0,\tau]$, удовлетворяющих граничным условиям (3.4). Пусть $y = \bar{y}(t)$ – решение задачи (4.1), (3.4), тогда соответствующее ему по формуле (3.6) управление $\bar{v}(t)$ будет оптимальным для задачи 2 (в классе непрерывных управлений). Если $\bar{y} \in C^{4N+4}$, то $\bar{y}(t)$ удовлетворяет уравнению Эйлера-Пуассона для функционала $\tilde{J}$ [5, с. 310]:

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \sum_{k=1}^{2N+2}(-1)^k\frac{d^k}{dt^k}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}}\right)\Bigg|_{y=\bar{y}(t)} = 0, \quad t \in [0,\tau], \tag{4.2}$$

а также граничным условиям (3.4). Введем линейный дифференциальный оператор $D : C^{2N}[0,\tau] \to C[0,\tau]$,

$$y(t) \mapsto Dy(t) = \left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega_1^2\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega_2^2\right)\dots\left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega_N^2\right)y(t).$$

Тогда, как нетрудно видеть, уравнение (4.2) можно представить в следующем виде:

$$\frac{d^4}{dt^4}D^2\bar{y}(t) = 0, \quad t \in [0,\tau]. \tag{4.3}$$

Поскольку решение $\bar{y}(t)$ уравнения (4.3) связано с оптимальным управлением $\bar{v}(t)$ соотношением (3.6), то $\bar{v}(t) = \frac{1}{c_0\omega_1^2\dots\omega_N^2}\frac{d^2}{dt^2}D\bar{y}(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2}{dt^2}D\bar{v}(t) = 0, \quad t \in [0,\tau]. \tag{4.4}$$

Запишем характеристическое уравнение для (4.4):

$$\lambda^2(\lambda^2+\omega_1^2)(\lambda^2+\omega_2^2)\dots(\lambda^2+\omega_N^2) = 0.$$

Отсюда следует, что всякое решение дифференциального уравнения (4.4) представимо в виде

$$\bar{v}(t) = k_0 + k_1 t + \sum_{j=1}^{N}\left(U_j\cos(\omega_j t) + V_j\sin(\omega_j t)\right), \ t \in [0,\tau]. \tag{4.5}$$

Согласно теореме 2 из [1], граничные условия (3.4) на $y=\bar{y}(t)$ означают, что соответствующее решение $x(t)$ системы (2.1) с управлением $v=\bar{v}(t)$ обладает свойствами $x(0)=x^0$ и $x(\tau)=x^1$. Вместо интегрирования уравнения (4.3) с громоздкими граничными условиями (3.4), определим константы k_0, k_1, U_j, V_j с помошью подстановки управления (4.5) непосредственно в граничную задачу (2.1), $x(0)=x^0$, $x(\tau)=x^1$. Применение формулы Коши для линейной неоднородной системы (2.1) с $v=\bar{v}(t)$ и начальными условиями $x(0)=x^0$ дает:

$$\begin{pmatrix} \xi_j(t) \\ \eta_j(t) \end{pmatrix} = e^{tA_j}\begin{pmatrix} \xi_j^0 \\ \eta_j^0 \end{pmatrix} + \int_0^t e^{(t-s)A_j}\begin{pmatrix} 0 \\ b_j\bar{v}(s) \end{pmatrix} ds, \quad j=\overline{0,N},\ (b_0=1), \tag{4.6}$$

где

$$A_0=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e^{tA_0}=\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_j=\begin{pmatrix} 0 & \omega_j \\ -\omega_j & 0 \end{pmatrix},\ \ e^{tA_j}=\begin{pmatrix} \cos\omega_j t & \sin\omega_j t \\ -\sin\omega_j t & \cos\omega_j t \end{pmatrix},\ j=\overline{1,N}.$$

Интегрируя первые два уравнения системы (2.1) с управлением $v=\bar{v}(t)$, получим

$$\eta_0(t)=\eta_0^0+\int_0^t \bar{v}(s)\,ds,\ \xi_0(t)=\xi_0^0+\int_0^t \eta_0(s)\,ds.$$

Затем умножим обе части формулы (4.6) на e^{-tA_j} $(1\le j\le N)$ и запишем граничное условие $x(\tau)=x^1$ по компонентам ξ_0, η_0, ..., ξ_N, η_N. В результате получим систему (2.3) из $2N+2$ линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно $2N+2$ неизвестных k_0, k_1, U_j, V_j. Остается показать, что эта система имеет единственное решение при любых $\tau>0$ и $x^0,x^1\in\mathbb{R}^{2N+2}$, а также, что соответствующее управление (4.5) является оптимальным для задачи 2.

Для всякого ненулевого управления $v\in L_2[0,\tau]$ функционал (2.2), очевидно, удовлетворяет неравенству $J(v)>0$. Поэтому задача 2 имеет решение $\bar{v}\in L_2[0,\tau]$ при любых $\tau>0$ и $x^0,x^1\in\mathbb{R}^{2N+2}$ на основании [6, Proposition 14.1], [7]. Кроме того, любое оптимальное управление $\bar{v}(t)$ является гладким, поскольку максимальное значение гамильтониана в принципе максимума Понтрягина достигается для управления в виде линейной функции от сопряженных переменных (см. [6, Chap. 14.3]). Следовательно, ввиду представления (3.1), (3.4), решение $y=\bar{y}(t)$ задачи Лагранжа (4.1) существует и является гладкой функцией, и формула (4.5) определяет оптимальное управление при некоторых значениях коэффициентов, определяемых условиями (2.3). Если предположить, что решение системы (2.3) неединственно при некоторых $\tau>0$ и $x^0,x^1\in\mathbb{R}^{2N+2}$, то возможно выбрать другие векторы граничных условий $\tilde{x}^0,\tilde{x}^1$ в правой части (2.3) таким образом, что система окажется несовместной. Сделанное предположение противоречит существованию оптимального управления для системы (2.1) с граничными условиями $x(0)=\tilde{x}^0$, $x(\tau)=\tilde{x}^1$. $\square$

5. Заключение

Доказанная теорема конструктивно определяет управление с наименьшей "энергией" (в смысле функционала (2.2)), переводящее систему из любого начального состояния в наперед заданное при произвольном количестве обобщенных координат N. Ключевой момент в построении оптимального управления связан с использованием соотношения (3.1), которое параметризует управления через вспомогательную функцию $y(t)$ (выход Бруновского). В данной работе рассмотрена линейная система, и представляет дальнейший интерес изучение свойств решений задач оптимального управления для классов управляемых систем при наличии нелинейного аналога соотношения (3.1).

Список цитируемых источников

1. *Зуев А.Л.* Управление упругими колебаниями с использованием канонической формы // Динамические системы. — 2006. — Вып. 20. — С. 27–34.
2. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления — М.: Наука, 1972. — 576 с.
3. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. 2-е изд. — М.: Наука, 1969. — 384 с.
4. *Проскуряков И.В.* Сборник задач по линейной алгебре. 3-е изд. — М.: Наука, 1967. — 382 с.
5. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1969. — 424 с.
6. *Agrachev A.A., Sachkov Yu.L.* Lectures on Geometric Control Theory. — Trieste: SISSA, 2001. — 208 p.
7. *Agrachev A.A., Sachkov Yu.L.* Control Theory from the Geometric Viewpoint. — Berlin: Springer, 2004. — 412 p.
8. *Sontag E.D.* Mathematical Control Theory, Deterministic Finite Dimensional Systems, Second Edition. — New York: Springer-Verlag, 1998. — 531 p.
9. *Zuyev A.* Partial asymptotic stabilization of nonlinear distributed parameter systems // Automatica. — 2005. — Vol. 41, № 1. — P. 1–10.

Получена 30.03.2007