Динамические системы, вып. 25 (2008), 37–50

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 123.4

О разрешимости и асимптотиках решений задачи Коши $x' = f(t, x, x')$, $x(0) = 0$

А. Е. Зернов*, **Ю. В. Кузина****

* Южноукраинский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского, Одесса 65027. *E-mail: zernov@ukr.net*

** Одесский институт финансов Украинского государственного университета финансов та международной торговли ,
Одесса 65080. *E-mail: yuliak@te.net.ua*

Аннотация. Исследуется задача Коши для неявного дифференциального уравнения. В работе не только доказано существование непрерывно дифференцируемых решений, но также исследовано асимптотическое поведение этих решений и определено их количество. Кроме того, изучено асимптотическое поведение первых производных найденных решений. При проведении исследований используются методы качественной теории дифференциальных уравнений и функционального анализа. Все полученные результаты являются эффективными.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, не разрешенные относительно производной, сингулярная задача Коши, асимптотическое поведение решений.

Как известно, задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной неизвестной функции, подробно исследована [7, 13]. Однако, прямые обобщения полученных результатов на дифференциальные уравнения, не разрешенные относительно производной неизвестной функции не представляются возможными. Проблема исследования поведения решений для таких уравнений была сформулирована и признана актуальной еще в 1885 году, когда редакция журнала "Acta mathematica"организовала конкурс; в состав жюри входили К. Вейерштрасс, Ш. Эрмит, Г. Миттаг-Леффлер. Одной из четырех предложенных к исследованию тем, разработка каждой из которых, по мнению жюри, имела большое значение для прогресса науки, была следующая: со ссылкой на Ш. Брио и Ж. Буке, начавших подобные исследования, предлагалось изучить решения дифферернциального уравнения $P(x, y, dy/dx) = 0$, где P — многочлен относительно своих аргументов. Вопросы о разрешимости и числе решений для уравнений такого вида рассматривались в работах [1, 2, 5, 13, 15, 16] и др. Сходимость последовательных приближений к решениям таких уравнений изучалась в работах [4, 12, 14, 17]. В то же время асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений неявного вида изучены сравнительно мало, здесь имеются лишь отдельные результаты [6, 8, 9, 10, 11]. В данной работе изучается асимптотическое поведение решений задачи Коши $x' = f(t, x, x')$, $x(0) = 0$ при $t \to 0$ с тривиальным начальным условием, к которой с помощью линейной замены переменных сводится задача с произвольными начальными условиями. Используются методы качественной теории дифференциальных уравнений [8] – [11]. В результате получены достаточные условия существования непрерывно дифференцируемых решений с определенными асимптотиками, а также условия единственности таких решений.

1. Рассмотрим задачу Коши для скалярного дифференциального уравнения первого порядка неявного вида

$$x'(t) = f(t, x(t), x'(t)), \tag{1}$$

$$x(0) = 0, \tag{2}$$

где $t \in (0, \tau)$ — действительная переменная, $x : (0, \tau) \to \mathbb{R}$ — неизвестная действительная функция переменной t, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция,

$$\mathcal{D} = \{(t, x, y) : t \in (0, \tau),\ |x| < r_1 t\alpha(t),\ |y| < r_2\alpha(t)\};$$

здесь r_1, r_2 — положительные постоянные, $\alpha : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ — непрерывно дифференцируемая функция, определяющая асимптотику решений,

$$\lim_{t\to+0} \alpha(t) = 0, \quad \lim_{t\to+0} t\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} = \alpha_0, \quad 0 \le \alpha_0 < +\infty$$

и при этом $|f(t, 0, 0)| \le \alpha(t)$, $\ t \in (0, \tau)$. Иначе говоря, с помощью функции $\alpha(t)$ определяются конкретные неравенства, которым удовлетворяет каждое решение в достаточно малой полуокрестности особой точки. Предположим, что

$$|f(t, x, y_1) - f(t, x, y_2)| \le l_y|y_1 - y_2|, \quad (t, x, y_i) \in \mathcal{D}, \quad i \in \{1, 2\}, \quad \text{где} \quad l_y < 1. \tag{3}$$

Пусть

$$(1 - l_y)^{-1} < \min\{(1 + \alpha_0)r_1, r_2\}.$$

Определение 1. Решением задачи (1), (2) называется непрерывно дифференцируемая функция $x : (0, \delta] \to \mathbb{R}$ $(0 < \delta < \tau)$ со следующими свойствами:
1) $(t, x(t), x'(t)) \in \mathcal{D}$, $t \in (0, \delta]$;
2) $x(t)$ тождественно удовлетворяет уравнению (1) при всех $t \in (0, \delta]$;
3) $\lim\limits_{t\to+0} x(t) = 0$.

Обозначим через $\mathcal{U}_1(\rho, M, q)$ множество всех непрерывно дифференцируемых функций $u\colon (0, \rho] \to \mathbb{R}$ таких, что

$$|u(t)| \le Mt\alpha(t), \quad |u'(t)| \le qM\alpha(t), \quad t \in (0, \rho]; \tag{4}$$

здесь ρ, M, q — постоянные, $\rho \in (0, \tau)$, $M > 0$, $q > 0$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*

$$\begin{aligned} &|f(t_1,x,y)-f(t_2,x,y)| \le l_t(\mu)|t_1-t_2|, \quad (t_i,x,y)\in\mathcal{D}, \quad 0<\mu\le t_1,t_2<\tau, \\ &|f(t,x_1,y)-f(t,x_2,y)| \le l_x(t)|x_1-x_2|, \quad (t,x_i,y)\in\mathcal{D}, \end{aligned} \tag{5}$$

где $i=1,2,\ l_t,l_x\colon (0,\tau)\to(0,+\infty)$ *— непрерывные функции,*

$$0<t_1<t_2<\tau \Rightarrow l_t(t_1)\ge l_t(t_2), \quad \lim_{t\to+0} t l_x(t)=0.$$

Тогда существуют такие ρ, M, q, *что у задачи (1), (2) имеется непустое множество решений* $x:(0,\rho]\to\mathbb{R}$, *принадлежащих множеству* $\mathcal{U}_1(\rho,M,q)$.

Естественно выяснить вопрос и о количестве решений задачи (1), (2).

Теорема 2. *Пусть выполнено условие:*

$$|f(t,x_1,y)-f(t,x_2,y)| \le l_x|x_1-x_2|, \quad (t,x_i,y)\in\mathcal{D}, \quad i\in\{1,2\}, \tag{6}$$

причем $l_x+l_y<1$. *Тогда существуют такие* ρ,M,q, *что у задачи (1), (2) имеется единственное решение* $x:(0,\rho]\to\mathbb{R}$, *принадлежащее множеству* $\mathcal{U}_1(\rho,M,q)$.

Доказательство теоремы 1. Прежде всего выберем постоянные ρ,M,q. Пусть выполнены следующие условия:

$$1+\alpha_0<q<\frac{m_0(1+\alpha_0)-1}{m_0 l_y}, \quad \Big(1+\alpha_0-q l_y\Big)^{-1}<M<m_0, \tag{7}$$

где

$$m_0=\Big((1+\alpha_0)(1-l_y)\Big)^{-1}. \tag{8}$$

Постоянная ρ достаточно мала, $\rho\in(0,\tau)$.

Обозначим через $\mathcal{B}$ пространство непрерывно дифференцируемых функций $x:[0,\rho]\to\mathbb{R}$ с нормой

$$||x||_{\mathcal{B}}=\max_{t\in[0,\rho]}\Big(|x(t)|+|x'(t)|\Big). \tag{9}$$

Пусть $\mathcal{U}$ — подмножество $\mathcal{B}$, каждый элемент u которого удовлетворяет условиям (4), причем $u(0)=0,\ u'(0)=0$ и, кроме того,

$$\forall\mu\in(0,\rho] \ \ \forall t_1,t_2\in[\mu,\rho]:|u'(t_1)-u'(t_2)|\le K(\mu)|t_1-t_2|, \tag{10}$$

где

$$K(\mu)=(1-l_y)^{-1}\Bigg(l_t(\mu)+\mu^{-1}\Bigg).$$

$\mathcal{U}$ — замкнутое, ограниченное, выпуклое и (на основании теоремы Арцела) компактное множество.

Будем рассматривать дифференциальное уравнение

$$x'(t) = f(t, u(t), u'(t)), \tag{11}$$

где $u \in \mathcal{U}$ — произвольная фиксированная функция. Пусть

$$\mathcal{D}_0 = \{(t, x) : t \in (0, \rho],\ x \in \mathbb{R}\}.$$

В $\mathcal{D}_0$ для уравнения (11) выполнены условия теоремы существования и единственности решения и непрерывной зависимости решений от начальных данных. Введем обозначения

$$\Phi_1 = \{(t, x) : t \in (0, \rho],\ |x| = Mt\alpha(t)\},$$
$$\mathcal{D}_1 = \{(t, x) : t \in (0, \rho],\ |x| < Mt\alpha(t)\},$$
$$\mathrm{H} = \{(t, x) : t = \rho,\ |x| < M\rho\alpha(\rho)\}.$$

Пусть функция $A_1 : \mathcal{D}_0 \to [0, +\infty)$ определяется равенством

$$A_1(t, x) = x2(t\alpha(t))^{-2}$$

и пусть $a_1 : \mathcal{D}_0 \to \mathbb{R}$ — производная функции A_1 в силу уравнения (11). Заметим, что

$$a_1(t, x) = 2\Big(t\alpha(t)\Big)^{-2} t^{-1}\left(txf\Big(t, u(t), u'(t)\Big) - x2\left(1 + t\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}\right)\right) < 0$$

при $(t, x) \in \Phi_1$. Докажем, что для любой точки $(t_0, x_0) \in \Phi_1$ интегральная кривая уравнения (11), проходящая через эту точку, при достаточно малых $|t - t_0|$ (где $t \le \rho$) расположена следующим образом: эта кривая лежит в $\mathcal{D}_1$ при $t > t_0$ и эта кривая лежит вне $\overline{\mathcal{D}}_1$ при $t < t_0$. Действительно, пусть $P(t_0, x_0)$ — любая точка на Φ_1 и пусть $J_P : (t, x_P(t))$ — интегральная кривая (11), такая, что $x_P(t_0) = x_0$. Тогда

$$A_1(t_0, x_P(t_0)) = A_1(t_0, x_0) = M2, \quad a_1(t_0, x_P(t_0)) = a_1(t_0, x_0) < 0.$$

Поэтому если $t_0 \in (0, \rho)$, то существует такое $\delta > 0$, что

$$\mathrm{sign}\Big(A_1(t, x_P(t)) - A_1(t_0, x_P(t_0))\Big) = -\mathrm{sign}(t - t_0), \quad |t - t_0| < \delta,$$

откуда

$$\mathrm{sign}\Big(|x_P(t)|(t\alpha(t))^{-1} - M\Big) = -\mathrm{sign}(t - t_0), \quad |t - t_0| < \delta.$$

Это означает, что $(t, x_P(t)) \in \mathcal{D}_1$ при $t \in (t_0, t_0+\delta)$ и $(t, x_P(t)) \overline{\in} \overline{\mathcal{D}}_1$ при $t \in (t_0-\delta, t_0)$. Если же $t_0 = \rho$, то существует такое $\delta > 0$, что

$$A_1(t, x_P(t)) > A_1(t_0, x_P(t_0)), \quad t \in (\rho - \delta, \rho),$$

откуда

$$|x_P(t)|\Big(t\alpha(t)\Big)^{-1} > M, \quad t \in (\rho - \delta, \rho).$$

Это означает, что $(t, x_P(t)) \overline{\in} \overline{\mathcal{D}}_1$ при $t \in (\rho_\delta, \rho)$.

Отсюда следует, что среди интегральных кривых уравнения (11), пересекающих множество Н, имеется по крайней мере одна кривая, которая определена при всех $t \in (0, \rho]$ и расположена в $\mathcal{D}_1$ при $t \in (0, \rho]$. Действительно, при возрастании t ни одна из интегральных кривых уравнения (11), пересекающих Φ_1, не может пересечь Φ_1 снова. Поэтому каждая из этих кривых пересекает $\overline{\mathrm{H}}$. Определим отображение $\psi : \Phi_1 \to \overline{\mathrm{H}}$, сопоставляя каждой точке $P \in \Phi_1$ точку $\psi(P) \in \overline{\mathrm{H}}$, принадлежащую той же интегральной кривой уравнения (11), что и точка P. Пусть $\psi(\Phi_1) = \{\psi(P) : P \in \Phi_1\}$ — множество образов всех точек Φ_1. Так как множество Φ_1 незамкнуто, то его образ $\psi(\Phi_1)$ — незамкнутое множество. Так как $\overline{\mathrm{H}}$ — замкнутое множество, то множество $\overline{\mathrm{H}} \backslash \psi(\Phi_1)$ непусто. Рассмотрим интегральную кривую $J_u : (t, x_u(t))$ уравнения (11), удовлетворяющую условию $(\rho, x_u(\rho)) \in \overline{\mathrm{H}} \backslash \psi(\Phi_1)$. Очевидно, что при уменьшении t эта интегральная кривая не может пересечь Φ_1. Поэтому интегральная кривая $J_u : (t, x_u(t))$ определена при всех $t \in (0, \rho]$ и остается в $\mathcal{D}_1$ при всех $t \in (0, \rho]$. Нетрудно убедиться в том, что

$$|x_u(t)| \leq Mt\alpha(t), \quad |x'_u(t)| \leq qM\alpha(t), \quad t \in (0, \rho]. \tag{12}$$

Положим $x_u(0) = 0$, $x'_u(0) = 0$ и докажем, что

$$\forall \mu \in (0, \rho] \ \ \forall t_i \in [\mu, \rho], \quad i \in \{1, 2\} : |x'_u(t_1) - x'_u(t_2)| \leq K(\mu)|t_1 - t_2|. \tag{13}$$

Выберем $\mu \in (0, \rho]$ и $t_i \in [\mu, \rho]$, $i \in \{1, 2\}$; пусть $t_1 < t_2$. Из тождеств

$$x'_u(t_i) = f(t_i, u(t_i), u'(t_i)), \quad i \in \{1, 2\} \tag{14}$$

получаем

$$\begin{aligned}
&|x'_u(t_1) - x'_u(t_2)| \leq l_t(\mu)|t_1 - t_2| + l_x(t_1)|u(t_1) - u(t_2)| + l_y|u'(t_1) - u'(t_2)| \leq \\
&(l_t(\mu) + \mu^{-1})|t_1 - t_2| + l_y K(\mu)|t_1 - t_2| = \\
&(1 - l_y)K(\mu)|t_1 - t_2| + l_y K(\mu)|t_1 - t_2| = K(\mu)|t_1 - t_2|.
\end{aligned}$$

На основании сказанного, $x_u \in \mathcal{U}$. Докажем теперь, что среди интегральных кривых уравнения (11), пересекающих Н, $J_u : (t, x_u(t))$ является единственной интегральной кривой, остающейся в $\mathcal{D}_1$ при всех $t \in (0, \rho]$. Действительно, рассмотрим однопараметрические семейства множеств

$$\begin{aligned}
\Phi_2(\nu) &= \{(t, x) : t \in (0, \rho], \ |x - x_u(t)| = \nu t\alpha(t)(-\ln t)\}, \\
\mathcal{D}_2(\nu) &= \{(t, x) : t \in (0, \rho], \ |x - x_u(t)| < \nu t\alpha(t)(-\ln t)\},
\end{aligned}$$

где ν — параметр, $\nu \in (0, 1]$. Пусть функция $A_2 : \mathcal{D}_0 \to [0, +\infty)$ определяется равенством

$$A_2(t, x) = \Big(x - x_u(t)\Big)2\Big(t\alpha(t)(-\ln t)\Big)^{-2}$$

и пусть $a_2 : \mathcal{D}_0 \to \mathbb{R}$ — производная функции A_2 в силу уравнения (11). Так как

$$a_2(t, x) = -2\Big(t\alpha(t)(-\ln(t))\Big)^{-2} t^{-1}\Big(x - x_u(t)\Big)2\left(1 + t\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} + \frac{1}{\ln t}\right),$$

то $a_2(t,x)<0$, если $(t,x)\in\mathcal{D}_0$, $x\neq x_u(t)$. В частности, $a_2(t,x)<0$ при $(t,x)\in\Phi_2(\nu)$ для всех $\nu\in(0,1]$. Поэтому для любой точки (t_0,x_0) любой кривой $\Phi_2(\nu)$ интегральная кривая уравнения (11), проходящая через эту точку, при достаточно малых $|t-t_0|$ (где $t\leq\rho$) расположена следующим образом: эта интегральная кривая лежит в $\mathcal{D}_2(\nu)$ при $t>t_0$ и эта кривая лежит вне $\overline{\mathcal{D}}_2(\nu)$ при $t<t_0$ (это доказывается так же, как и аналогичное утверждение относительно Φ_1 выше). Пусть теперь $P_*(t_*,x_*)\in\overline{\mathcal{D}}_1\backslash\{(0,0)\}$, $x_*\neq x_u(t_*)$. Существует такое $\nu_*\in(0,1]$, что $P_*\in\Phi_2(\nu_*)$. Пусть $J_*:(t,x^*(t))$ — интегральная кривая уравнения (11), проходящая через точку P_*. На основании сказанного, интегральная кривая $J_*:(t,x^*(t))$ лежит вне $\overline{\mathcal{D}}_2(\nu_*)$ при $t\in(t_-,t_*)$, где (t_-,t_*) — левый максимальный интервал существования решения x^*. С другой стороны, существует такое $t_{**}\in(0,\rho)$, что если $(t,x)\in\overline{\mathcal{D}}_1$ и при этом $t\in(0,t_{**})$, то $(t,x)\in\mathcal{D}_2(\nu_*)$. Положим

$$t^*=\min\{t_*,t_{**}\}.$$

На основании сказанного, если $t\in(t_-,t^*)$, то интегральная кривая $J_*:(t,x^*(t))$ расположена вне $\overline{\mathcal{D}}_1$. Наше утверждение доказано.

Определим оператор $\mathrm{T}:\mathcal{U}\to\mathcal{U}$, полагая $\mathrm{T}u=x_u$. Докажем, что $\mathrm{T}:\mathcal{U}\to\mathcal{U}$ — непрерывный оператор. Пусть $u_i\in\mathcal{U},\ i\in\{1,2\}$ — произвольные фиксированные функции и пусть $\mathrm{T}u_i=x_i,\ i\in\{1,2\}$. Тогда $x_i\in\mathcal{U},\ i\in\{1,2\}$ и при $t\in(0,\rho]$ справедливы тождества

$$x'_i(t)=f(t,u_i(t),u'_i(t)),\quad i\in\{1,2\}. \tag{15}$$

Если $u_1=u_2$, то и $x_1=x_2$. Пусть теперь $||u_1-u_2||_{\mathcal{B}}=h,\ h>0$. Положим

$$\begin{aligned}\Phi_3&=\{(t,x):t\in(0,\rho],\ |x-x_2(t)|=h^\nu(t\alpha(t))^{1-\nu}\},\\ \mathcal{D}_3&=\{(t,x):t\in(0,\rho],\ |x-x_2(t)|<h^\nu(t\alpha(t))^{1-\nu}\},\end{aligned}$$

где ν — постоянная, $\nu\in(0,1)$. Пусть функция $A_3:\mathcal{D}_0\to[0,+\infty)$ определяется равенством

$$A_3(t,x)=\Big(x-x_2(t)\Big)2\Big(t\alpha(t)\Big)^{-2(1-\nu)}$$

и пусть $a_3:\mathcal{D}_0\to\mathbb{R}$ — производная функции A_3 в силу уравнения

$$x'(t)=f(t,u_1(t),u'_1(t)). \tag{16}$$

Так как

$$a_3(t,x)=2\Big(t\alpha(t)\Big)^{-2(1-\nu)}t^{-1}\Bigg((x-x_2(t))t\Big(f(t,u_1(t),u'_1(t))-f(t,u_2(t),u'_2(t))\Big)-$$

$$-(1-\nu)\Big(x-x_2(t)\Big)2\Bigg(1+t\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}\Bigg)\Bigg) \tag{17}$$

и при этом

$$|u_1(t)-u_2(t)| = |u_1(t)-u_2(t)|^{\nu}|u_1(t)-u_2(t)|^{1-\nu} \le$$
$$||u_1-u_2||^{\nu}_{\mathcal{B}}\Big(|u_1(t)|+|u_2(t)|\Big)^{1-\nu} \le h^{\nu}\Big(2Mt\alpha(t)\Big)^{1-\nu}, \quad t\in(0,\rho],$$

$$|u'_1(t)-u'_2(t)| = |u'_1(t)-u'_2(t)|^{\nu}|u'_1(t)-u'_2(t)|^{1-\nu} \le$$
$$||u_1-u_2||^{\nu}_{\mathcal{B}}\Big(|u'_1(t)|+|u'_2(t)|\Big)^{1-\nu} \le h^{\nu}\Big(2M\alpha(t)\Big)^{1-\nu}, \quad t\in(0,\rho],$$

то нетрудно показать, что $a_3(t,x)<0$ при $(t,x)\in\Phi_3$. Поэтому для любой точки $(t_0,x_0)\in\Phi_3$ интегральная кривая уравнения (16), проходящая через эту точку, при достаточно малых $|t-t_0|$ (где $t\le\rho$) расположена следующим образом: она лежит в $\mathcal{D}_3$ при $t>t_0$ и она лежит вне $\overline{\mathcal{D}}_3$ при $t<t_0$ (это доказывается так же, как и аналогичное утверждение относительно Φ_1 выше). При этом

$$|x_1(t)-x_2(t)| \le |x_1(t)|+|x_2(t)| \le 2Mt\alpha(t) < h^{\nu}\Big(t\alpha(t)\Big)^{1-\nu}$$

при $t\in(0,t(h)]$, где $t(h)\in(0,\rho)$ достаточно мало. Это означает, что интегральная кривая $J:(t,x_1(t))$ уравнения (16) лежит в $\mathcal{D}_3$ при $t\in(0,t(h)]$. На основании сказанного выше, если t будет монотонно возрастать от $t=t(h)$ до $t=\rho$, то интегральная кривая $J:(t,x_1(t))$ не сможет пересечь Φ_3. Значит, эта интегральная кривая лежит в $\mathcal{D}_3$ при всех $t\in(0,\rho]$. Следовательно,

$$|x_1(t)-x_2(t)| < h^{\nu}\Big(t\alpha(t)\Big)^{1-\nu}, \quad t\in(0,\rho]. \tag{18}$$

Из (15) следует, что

$$|x'_1(t)-x'_2(t)| < \frac{h^{\nu}}{t}\Big(t\alpha(t)\Big)^{1-\nu}, \quad t\in(0,\rho]. \tag{19}$$

Поскольку ρ достаточно мало, то из (18), (19) следует, что

$$|x_1(t)-x_2(t)|+|x'_1(t)-x'_2(t)| \le \frac{h^{\nu}}{t}, \quad t\in(0,\rho]. \tag{20}$$

Перейдем непосредственно к доказательству непрерывности оператора $\mathrm{T}:\mathcal{U}\to\mathcal{U}$. Пусть $\varepsilon>0$ дано. Существует такое $t_\varepsilon\in(0,\rho)$, что

$$2Mt\alpha(t)+2qM\alpha(t) \le \frac{\varepsilon}{2}, \quad t\in(0,t_\varepsilon].$$

Поэтому

$$|x_1(t)-x_2(t)|+|x'_1(t)-x'_2(t)| \le |x_1(t)|+|x_2(t)|+|x'_1(t)|+|x'_2(t)| \le \frac{\varepsilon}{2}, \quad t\in(0,t_\varepsilon].$$

Если $t\in[t_\varepsilon,\rho]$, то из (20) следует, что

$$|x_1(t)-x_2(t)|+|x'_1(t)-x'_2(t)| \le \frac{h^{\nu}}{t_\varepsilon}, \quad t\in[t_\varepsilon,\rho].$$

Пусть $h < \delta(\varepsilon)$, где

$$\delta(\varepsilon) = \left(\frac{\varepsilon t_\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{\nu}}.$$

Тогда

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |x'_1(t) - x'_2(t)| \le \frac{\varepsilon}{2}, \quad t \in [t_\varepsilon, \rho].$$

Значит,если $h < \delta(\varepsilon)$, то

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |x'_1(t) - x'_2(t)| \le \frac{\varepsilon}{2}, \quad t \in [0, \rho]$$

и потому

$$||x_1 - x_2||_{\mathcal{B}} \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

В итоге, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что если $||u_1 - u_2||_{\mathcal{B}} = h < \delta(\varepsilon)$, то

$$||\mathrm{T}u_1 - \mathrm{T}u_2||_{\mathcal{B}} = ||x_1 - x_2||_{\mathcal{B}} \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Проведенные рассуждения не зависят от выбора функций $u_i \in \mathcal{U}$, $i \in \{1, 2\}$. Поэтому непрерывность оператора $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ доказана.

Для завершения доказательства теоремы 1 достаточно применить к оператору $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ теорему Шаудера о неподвижной точке. □

Доказательство теоремы 2. Вначале выберем те же постоянные ρ, M, q, что и при доказательстве теоремы 1. Обозначим через $\mathcal{B}$ пространство непрерывно дифференцируемых функций $x : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ с нормой (9). Пусть $\mathcal{U}$ — это подмножество $\mathcal{B}$, каждый элемент $u : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ которого удовлетворяет условиям (4), причем $u(0) = 0, \ u'(0) = 0$. Множество $\mathcal{U}$ замкнуто и ограничено. Будем рассматривать задачу Коши (11), (2), где $u \in \mathcal{U}$ — произвольная фиксированная функция. Рассмотрим те же множества $\mathcal{D}_0, \Phi_1, \mathcal{D}_1, \mathrm{H}$, что и при доказательстве теоремы 1. В $\mathcal{D}_0$ для уравнения (11) выполнены условия теоремы существования и единственности решения и непрерывной зависимости решений от начальных данных. С помощью тех же рассуждений, что и при доказательстве теоремы 1, устанавливается, что среди интегральных кривых уравнения (11), пересекающих H, существует одна и только одна интегральная кривая (обозначим ее через $J : (t, x_u(t))$), которая определена при $t \in (0, \rho]$ и лежит в $\mathcal{D}_1$ при всех $t \in (0, \rho]$. Легко установить, что выполнены неравенства (12). Положим $x_u(0) = 0, \ x'_u(0) = 0$. Тогда $x_u \in \mathcal{U}$. Определим оператор $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$, полагая $\mathrm{T}u = x_u$. Докажем, что $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ — сжимающий оператор. Пусть $u_i \in \mathcal{U}, \ i \in \{1, 2\}$ — произвольные фиксированные функции и пусть $\mathrm{T}u_i = x_i, \ i \in \{1, 2\}$. Тогда $x_i \in \mathcal{U}, \ i \in \{1, 2\}$ и при $t \in (0, \rho]$ справедливы тождества (15). Если $u_1 = u_2$, то и $x_1 = x_2$. Пусть далее $||u_1 - u_2||_{\mathcal{B}} = h$, $h > 0$. Положим

$$\Phi_3 = \{(t, x) : t \in (0, \rho], \ |x - x_2(t)| = \eta h t\},$$
$$\mathcal{D}_3 = \{(t, x) : t \in (0, \rho], \ |x - x_2(t)| < \eta h t\},$$

где η — постоянная, такая, что $\eta > l_x + l_y$. Пусть функция $A_3 : \mathcal{D}_0 \to [0, +\infty)$ определяется равенством

$$A_3(t,x) = \Big(x - x_2(t)\Big)2t^{-2}$$

и пусть $a_3 : \mathcal{D}_0 \to \mathbb{R}$ — производная функции A_3 в силу уравнения (16). Так как

$$a_3(t,x) = 2t^{-3}\Bigg(t(x - x_2(t))\Big(f(t, u_1(t), u'_1(t)) - f(t, u_2(t), u'_2(t))\Big) - \Big(x - x_2(t)\Big)2\Bigg),$$

то нетрудно убедиться в том, что $a_3(t,x) < 0$ при $(t,x) \in \Phi_3$. Поэтому для любой точки $(t_0, x_0) \in \Phi_3$ интегральная кривая уравнения (16), проходящая через эту точку, при достаточно малых $|t - t_0|$ (где $t \le \rho$) располагается следующим образом: она лежит в $\mathcal{D}_3$ при $t > t_0$ и она лежит вне $\overline{\mathcal{D}}_3$ при $t < t_0$ (это доказывается так же, как и аналогичное утверждение для Φ_1 при доказательстве теоремы 1). При этом

$$|x_1(t) - x_2(t)| \le |x_1(t)| + |x_2(t)| \le 2Mt\alpha(t) < \eta h t$$

при $t \in (0, t(h)]$, где $t(h) \in (0, \rho)$ достаточно мало. Это означает, что интегральная кривая $J : (t, x_1(t))$ уравнения (16) лежит в $\mathcal{D}_3$ при $t \in (0, t(h)]$. На основании сказанного выше, при возрастании t от $t = t(h)$ до $t = \rho$ указанная интегральная кривая не пересечет Φ_3; поэтому она лежит в $\mathcal{D}_3$ при всех $t \in (0, \rho]$. Следовательно,

$$|x_1(t) - x_2(t)| \le \eta h t, \quad t \in (0, \rho].$$

Из (15) следует, что

$$|x'_1(t) - x'_2(t)| < (l_x + l_y)h, \quad t \in (0, \rho]$$

и потому

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |x'_1(t) - x'_2(t)| \le (l_x + l_y + \eta t)h, \quad t \in (0, \rho]. \tag{21}$$

Пусть $\theta = \dfrac{1}{2}(1 + l_x + l_y)$; очевидно, $0 < \theta < 1$. Так как ρ достаточно мало, то из (21) следует, что

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |x'_1(t) - x'_2(t)| \le \theta h, \quad t \in (0, \rho],$$

откуда

$$||x_1 - x_2||_{\mathcal{B}} \le \theta h,$$

или

$$||\mathrm{T}u_1 - \mathrm{T}u_2||_{\mathcal{B}} \le \theta ||u_1 - u_2||_{\mathcal{B}},$$

где $\theta \in (0,1)$. Проведенные рассуждения не зависят от выбора функций $u_i \in \mathcal{U}, i \in \{1,2\}$. Следовательно, $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ — сжимающий оператор. Для завершения доказательства теоремы 2 достаточно применить к оператору $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ теорему Банаха о неподвижной точке. □

2. Далее рассматриваем задачу Коши (1), (2), где $t \in (0,\tau)$ — действительная переменная, $x : (0,\tau) \to \mathbb{R}$ — неизвестная действительная функция. Пусть

$$f(t, x(t), x'(t)) = \alpha(t) + \varphi(t, x(t), x'(t)),$$

где $\alpha : (0,\tau) \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $\alpha(t) \neq 0,\ t \in (0,\tau)$,

$$\lim_{t\to+0} \alpha(t) = 0, \quad t\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} = \alpha_0 + \gamma(t), \quad t \in (0,\tau), \quad 0 \le \alpha_0 < +\infty,$$

$\gamma : (0,\tau) \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $\lim\limits_{t\to+0} \gamma(t) = 0$, $\varphi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция; здесь

$$\mathcal{D} = \{(t,x,y) : t \in (0,\tau), \quad |x - ct\alpha(t)| < r_1 t|\alpha(t)|\xi(t), \quad |y - \alpha(t)| < r_2|\alpha(t)|\xi(t)\},$$

где r_1, r_2 — положительные постоянные, $c = (1+\alpha_0)^{-1}$, $\xi : (0,\tau) \to (0,+\infty)$ — непрерывно дифференцируемая функция,определяющая асимптотику решений,

$$\lim_{t\to+0} \xi(t) = 0, \quad \lim_{t\to+0} t\frac{\xi'(t)}{\xi(t)} = \xi_0, \quad 0 \le \xi_0 < +\infty;$$

пусть

$$|\varphi(t, ct\alpha(t), \alpha(t))| < |\alpha(t)|\beta(t), \quad t \in (0,\tau),$$

где $\beta : (0,\tau) \to (0,+\infty)$ — непрерывная функция, $\lim\limits_{t\to+0} \beta(t) = 0$; будем предполагать, что

$$\lim_{t\to+0} \frac{\beta(t)}{\xi(t)} = l_1, \quad \lim_{t\to+0} \frac{|\gamma(t)|}{\xi(t)} = l_2, \quad 0 \le l_i < +\infty, \quad i \in \{1,2\}.$$

Предположим, что выполнено условие (3). Пусть

$$l_1 + l_2 < (1 - l_y)\min\{r_1, r_2\}.$$

Точно так же, как и в первой части работы, определяется решение $x : (0,\rho] \to \mathbb{R}$ задачи (1), (2). Обозначим через $\mathcal{U}_2(\rho, M)$ множество всех непрерывно дифференцируемых функций $u : (0,\rho] \to \mathbb{R}$ таких, что

$$|u(t) - ct\alpha(t)| \le Mt|\alpha(t)|\xi(t), \quad |u'(t) - \alpha(t)| \le M|\alpha(t)|\xi(t), \quad t \in (0,\rho]; \tag{22}$$

здесь ρ, M — постоянные, $\rho \in (0,\tau),\ M > 0$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия (5), (**??**), где $l_t : (0,\tau) \to (0,+\infty)$ и $l_x : (0,\tau) \to (0,+\infty)$ — непрерывные функции, $0 < t_1 < t_2 < \tau \Rightarrow l_t(t_1) \ge l_t(t_2)$, $\lim\limits_{t\to+0} tl_x(t) = 0$. Тогда существуют такие ρ, M, что у задачи (1), (2) имеется непустое множество решений $x : (0,\rho] \to \mathbb{R}$, принадлежащих множеству $\mathcal{U}_2(\rho, M)$.*

И к вопросу о единственности решения.

Теорема 4. *Пусть выполнено условие (6), причем* $l_x + l_y < 1$. *Тогда существуют такие* ρ, M, *что у задачи (1), (2) имеется единственное решение* $x : (0, \rho] \to \mathbb{R}$, *принадлежащее множеству* $\mathcal{U}_2(\rho, M)$.

Доказательство теоремы 3. Прежде всего, выберем постоянные ρ, M. Пусть выполнено условие

$$(l_1 + l_2)(1 - l_y)^{-1} < M < \min\{r_1, r_2\}, \tag{23}$$

$\rho \in (0, \tau), \rho$ достаточно мало. Обозначим через $\mathcal{B}$ пространство непрерывно дифференцируемых функций $x : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ с нормой (9). Пусть $\mathcal{U}$ — это подмножество $\mathcal{B}$, каждый элемент $u : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ которого удовлетворяет при $t \in (0, \rho]$ условиям (22), причем $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$ и, кроме того, выполнено условие (10). $\mathcal{U}$ — замкнутое, ограниченное, выпуклое и (на основании теоремы Арцела) компактное множество. Будем рассматривать дифференциальное уравнение (11), где $u \in \mathcal{U}$ — произвольная фиксированная функция. Далее проводятся те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 1. При этом следует взять

$$\begin{aligned}
&\Phi_1 = \{(t, x) : t \in (0, \rho],\ |x - ct\alpha(t)| = Mt|\alpha(t)|\xi(t)\},\\
&\mathcal{D}_1 = \{(t, x) : t \in (0, \rho],\ |x - ct\alpha(t)| < Mt|\alpha(t)|\xi(t)\},\\
&\mathrm{H} = \{(t, x) : t = \rho,\ |x - c\rho\alpha(\rho)| < M\rho|\alpha(\rho)|\xi(\rho)\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Phi_2(\nu) = \{(t, x) : t \in (0, \rho],\ |x - x_u(t)| = \nu t|\alpha(t)|\xi(t)(-\ln t)\},\\
&\mathcal{D}_2(\nu) = \{(t, x) : t \in (0, \rho],\ |x - x_u(t)| < \nu t|\alpha(t)|\xi(t)(-\ln t)\},\\
&\text{где}\ \ \nu \text{ — параметр,}\ \ \nu \in (0, 1];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Phi_3 = \{(t, x) : t \in (0, \rho],\ |x - x_2(t)| = h^\nu(t|\alpha(t)|\xi(t))^{1-\nu}\},\\
&\mathcal{D}_3 = \{(t, x) : t \in (0, \rho],\ |x - x_2(t)| < h^\nu(t|\alpha(t)|\xi(t))^{1-\nu}\},\\
&\text{где}\ \ \nu \text{ — постоянная,}\ \ \nu \in (0, 1);
\end{aligned}$$

Как и при доказательстве теоремы 1, строится оператор $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ и к нему применяется теорема Шаудера о неподвижной точке. □

Доказательство теоремы 4. Полностью аналогично доказательству теоремы 2. Как и при доказательстве теоремы 2, строится оператор $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ и к нему применяется теорема Банаха о неподвижной точке. Здесь $\mathcal{U}$ — это множество всех непрерывно дифференцируемых функций $u : [0, \rho] \to \mathbb{R}$, каждая из которых удовлетворяет условиям (22), причем $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$, постоянная M удовлетворяет неравенствам (23), $\rho \in (0, \tau)$, ρ достаточно мало. □

3. В заключение рассматривается задача Коши (1), (2), где $t \in (0,\tau)$ — действительная переменная, $x : (0,\tau) \to \mathbb{R}$ — неизвестная действительная функция, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция,

$$\mathcal{D} = \{(t,x,y) : t \in (0,\tau),\ |x - ct| < r_1 t\beta(t),\ |y - c| < r_2\beta(t)\};$$

здесь r_1, r_2 — положительные постоянные, c — постоянная, $\beta : (0,\tau) \to (0,+\infty)$ — непрерывно дифференцируемая функция,определяющая асимптотику решений, такие, что

$$|f(t,ct,c) - c| \le \beta(t), \quad t \in (0,\tau),$$

$$\lim_{t\to+0} \beta(t) = 0, \quad \lim_{t\to+0} t\frac{\beta'(t)}{\beta(t)} = \beta_0, \quad 0 \le \beta_0 < +\infty.$$

Предположим, что выполнено условие (3), где $0 < l_y < 1$. Пусть, кроме того,

$$(1 - l_y)^{-1} < \min\{(1 + \beta_0)r_1,\ l_y r_2\}.$$

Точно так же, как и в первой части работы, определяется решение $x : (0,\rho] \to\mathbb{R}$ задачи (1), (2). Обозначим через $\mathcal{U}_3(\rho, M, q)$ множество всех непрерывно дифференцируемых функций $u : (0,\rho] \to \mathbb{R}$ таких, что

$$|u(t) - ct| \le Mt\beta(t), \quad |u'(t) - c| \le qM\beta(t), \quad t \in (0,\rho]; \tag{24}$$

здесь ρ, M, q — постоянные, $\rho \in (0,\tau), M > 0, q > 0$.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия (5), (**??**), где $l_t : (0,\tau) \to (0,+\infty)$ и $l_x : (0,\tau) \to (0,+\infty)$ — непрерывные функции, $0 < t_1 < t_2 < \tau \Rightarrow l_t(t_1) \ge l_t(t_2)$, $\lim\limits_{t\to+0} tl_x(t) = 0$. Тогда существуют такие ρ, M, q, что у задачи (1), (2) имеется непустое множество решений $x : (0,\rho] \to\mathbb{R}$, принадлежащих множеству $\mathcal{U}_3(\rho, M, q)$.*

И к вопросу о единственности решения.

Теорема 6. *Пусть выполнено условие (6), причем $l_x + l_y < 1$. Тогда существуют такие ρ, M, q, что у задачи (1), (2) имеется единственное решение $x : (0,\rho] \to\mathbb{R}$, принадлежащее множеству $\mathcal{U}_3(\rho, M, q)$.*

Доказательство теоремы 5. Вначале выберем постоянные ρ, M, q. Пусть выполнены условия

$$1 + \beta_0 < q < \frac{m_0(1 + \beta_0) - 1}{m_0 l_y}, \quad (1 + \beta_0 - ql_y)^{-1} < M < m_0, \tag{25}$$

где $m_0 = \Big((1 + \beta_0)(1 - l_y)\Big)^{-1}, \rho \in (0,\tau), \rho$ достаточно мало. Обозначим через $\mathcal{B}$ пространство непрерывно дифференцируемых функций $x : [0,\rho] \to \mathbb{R}$ с нормой

(9). Пусть $\mathcal{U}$ — это подмножество $\mathcal{B}$, каждый элемент $u : [0,\rho] \to \mathbb{R}$ которого удовлетворяет при $t \in (0,\rho]$ условиям (24), причем $u(0) = 0$, $u'(0) = c$ и, кроме того, выполнено условие (10). $\mathcal{U}$ — замкнутое, ограниченное, выпуклое и (на основании теоремы Арцела) компактное множество. Будем рассматривать дифференциальное уравнение (11), где $u \in \mathcal{U}$ — произвольная фиксированная функция. Далее достаточно провести те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 1. При этом следует взять

$$\begin{aligned}
&\Phi_1 = \{(t,x) : t \in (0,\rho],\ |x - ct| = Mt\beta(t)\},\\
&\mathcal{D}_1 = \{(t,x) : t \in (0,\rho],\ |x - ct| < Mt\beta(t)\},\\
&\mathrm{H} = \{(t,x) : t = \rho,\ |x - c\rho| < M\rho\beta(\rho)\};\\
&\\
&\Phi_2(\nu) = \{(t,x) : t \in (0,\rho],\ |x - x_u(t)| = \nu t\beta(t)(-\ln t)\},\\
&\mathcal{D}_2(\nu) = \{(t,x) : t \in (0,\rho],\ |x - x_u(t)| < \nu t\beta(t)(-\ln t)\},\\
&\text{где}\ \ \nu\ \text{— параметр,}\quad \nu \in (0,1];\\
&\\
&\Phi_3 = \{(t,x) : t \in (0,\rho],\ |x - x_2(t)| = h^\nu (2Mt\beta(t))^{1-\nu}\},\\
&\mathcal{D}_3 = \{(t,x) : t \in (0,\rho],\ |x - x_2(t)| < h^\nu (2Mt\beta(t))^{1-\nu}\},\\
&\text{где}\ \ \nu\ \text{— постоянная,}\quad \nu \in (0,1);
\end{aligned}$$

Как и при доказательстве теоремы 1, строится оператор $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ и к нему применяется теорема Шаудера о неподвижной точке. □

Доказательство теоремы 6. Полностью аналогично доказательству теоремы 2. Строится оператор $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$, к которому применяется теорема Банаха о неподвижной точке. Здесь $\mathcal{U}$ — это множество всех непрерывно дифференцируемых функций $u : [0,\rho] \to \mathbb{R}$, каждая из которых удовлетворяет условиям (24), причем $u(0) = 0$, $u'(0) = c$, постоянные M, q удовлетворяют неравенствам (25), $\rho \in (0,\tau)$, ρ достаточно мало. □

Список цитируемых источников

1. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 304 с.
2. *Блинов С.П.* Геометрический метод решения систем дифференциальных уравнений. — Минск, 1974. — 46 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 2024–74 Деп.
3. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1968.
4. *Витюк А.Н.* Обобщенная задача Коши для системы дифференциальных уравнений, не решенной относительно производных // Дифференциальные уравнения. — 1971. — Т. 7, № 9. — С. 1575–1580.
5. *Давыдов А.А* Нормальная форма дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной, в окрестности особой точки // Функц. анал. прилож. — 1985. — Т.19, №2, — С. 1 - 10.

6. *Даутов М.А., Муратов Л.М.* Асимптотическое представление решений полиномиального дифференциального уравнения первого порядка // Известия высш. учебн. заведений. Математика. — 1964. — № 4. — С. 61–68.
7. *Еругин Н.П., Штокало И.З., Бондаренко П.С. и др.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. — Киев: Вища школа, 1974. — 472 с.
8. *Зернов А.Е.* О разрешимости и асимптотических свойствах решений одной сингулярной задачи Коши // Дифференциальные уравнения. — 1992. — Т.28, № 5. — С. 755–760.
9. *Зернов А.Е., Кузина Ю.В.* Геометричний аналіз задачі Коші для неявного диференціального рівняння // Матем. Студії. — 2008. — Т. 29, № 1. — С. 63–70.
10. *Зернов А.Е., Кузина Ю.В.* Геометрический анализ некоторой сингулярной задачи Коши // Нелін. коливання. — 2004. — Т. 7, № 1. — С. 67–80.
11. *Кузина Ю.В.* Асимптотическое поведение решений некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной неизвестной функции: Дис... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. — Одесса, 2006.
12. *Рудаков В. П.* О существовании и единственности решения систем дифференциальных уравнений первого порядка, частично разрешенных относительно производных // Известия высш. учебн. заведений. Математика. — 1971. — № 9. — С. 79–84.
13. *Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О.* Диференціальні рівняння. — К: Либідь, 2003. — С. 600.
14. *Anichini G., Conti G.* Boundary value problems for implicit ODE's in a singular case // Differential Equations and Dynamical Systems. — 1999. — B. 7, № 4. — P. 437–459.
15. *Conti R.* Sulla risoluzione dell'equazione $F(t, x, \frac{dx}{dt}) = 0$ // Ann. mat. pura ed appl. — 1959. — № 48. — P. 97–102.
16. *Frigon M., Kaczynski Z.* Boundary value problems for systems of implicit differential equations // J. Math. Anal. and Appl. — 1993. — B. 179, № 2. — P. 317–326.
17. *Kowalski Z.*The polygonal method of solving the differential equation $y' = h(t, y, y, y')$ // Ann. polon. math. — 1963. —B. 13, № 2. — P. 173–204.

Получена 3.11.2008