Динамические системы, вып. 24 (2008), 39–48

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 517.9:532

Нормальные колебания системы вязких стратифицированных жидкостей

Д. О. Цветков

Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 95007. *E-mail: tsvet@crimea.edu*

Аннотация. Задача о нормальных колебаниях исходной гидросистемы приведена к задаче на собственные значения для операторного пучка С.Г.Крейна. На его основе показано, что в неподвижном сосуде, полностью заполненном системой двух вязких стратифицированных жидкостей, существуют диссипативные волны со сколь угодно большими декрементами затухания, также внутренние и поверхностные (вблизи границы раздела) волны со сколь угодно малыми декрементами затухания. Обсуждаются вопросы базисности мод различных типов волн, свойства спектра задачи.

Введение

Задачи о колебаниях стратифицированной жидкости, заполняющей ограниченную область пространства, находят приложения в теории сейш, в теории колебаний нефти в танкерах, при изучении колебаний криогенных жидкостей в закрытых резервуарах. Известно, что наличие вертикальной стратификации жидкости по плотности порождает в таких гидросистемах весьма интересные физические явления, связанные с действием сил плавучести. Не приводя подробной библиографии, упомянем лишь монографии [1], [2] и работы [3], [5], где изучаются те или иные аспекты теории колебаний такой системы. В данной работе изучаются нормальные колебания гидросистемы, состоящей из двух слоев вязких несмешивающихся стратифицированных жидкостей полностью заполняющих неподвижный сосуд. Отметим, что соответственная эволюционная задача изучена в работе [6].

1. Постановка начально-краевой задачи

Рассмотрим неподвижный сосуд, полностью заполненный системой из двух вязких стратифицированных несжимаемых жидкостей. Жидкости предполагаются тяжелыми и в силу этого действие капиллярных сил в задаче не учитывается. Обозначим через Ω_k $(k = 1, 2)$ область, занимаемую в состоянии покоя жидкостью плотности ρ_{0k} с коэффициентом динамической вязкости $\mu_k = \mathrm{const} > 0$ $(k = 1, 2)$, соответствующий участок твердой стенки — через S_k $(k = 1, 2)$, границу раздела жидкостей — через Γ.

Обозначим через $\vec{n}_k$ $(k = 1, 2)$ единичный вектор, нормальный к $\partial\Omega_k$ $(k = 1, 2)$ и направленный вне Ω_k, через g — ускорения свободного падения. Введем систему координат $Ox_1x_2x_3$ таким образом, что ось Ox_3 направлена против действия силы тяжести, а начало координат находится на поверхности Γ.

Будем рассматривать основной случай устойчивой стратификации жидкостей по плотностям $\rho_{0k} = \rho_{0k}(x_3)$ $(k = 1, 2)$:

$$0 < N^2_{k,\min} \le N^2_k(x_3) \le N^2_{k,\max} =: N^2_{0,k} < \infty, \quad N^2_k(x_3) := -\rho^{-1}_{0k}(x_3) g \rho'_{0k}(x_3), \tag{1.1}$$

где $N^2_k(x_3)$ — квадрат частоты плавучести.

Рассмотрим малые движения изучаемой гидросистемы, близкие к состоянию покоя. Пусть $\vec{u}_k$ $(k = 1, 2)$ — поля скоростей в жидкостях, а $\zeta = \zeta(t, \hat{x})$, $\hat{x} \in \Gamma$ представляет собой отклонение свободно движущийся поверхности $\Gamma(t)$ от Γ; $p_k = p_k(t, x)$, $x \in \Omega_k$ $(k = 1, 2)$ — отклонение полей давлений от равновесных; $\rho_k = \rho_k(t, x)$, $x \in \Omega_k$ $(k = 1, 2)$ — отклонения полей плотности от исходных $\rho_{0k}(x_3)$.

Линейная постановка начально-краевой задачи о колебаниях рассматриваемой гидросистемы выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered} \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial t} = \rho^{-1}_{0k}(x_3)(-\nabla p_k + \mu_k \Delta \vec{u}_k - \rho_k g \vec{e}_3) + \vec{f}_k \quad (\text{в } \Omega_k,\ k = 1, 2), \\ \operatorname{div} \vec{u}_k = 0, \qquad \frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \rho_{0k} \cdot \vec{u}_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k,\ k = 1, 2), \end{gathered} \tag{1.2}$$

$$\vec{u}_k = \vec{0} \quad (\text{на } S_k,\ k = 1, 2), \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1 = \vec{u}_2 \cdot \vec{n}_1 \quad (\text{на } \Gamma), \tag{1.3}$$

$$\begin{gathered} \vec{u}_1 = \vec{u}_2 \quad (\text{на } \Gamma), \qquad \tau_{k3}(\vec{u}_1) - \tau_{k3}(\vec{u}_2) = 0 \quad (k = 1, 2, \quad \text{на } \Gamma), \\ \tau_{33}(\vec{u}_1) - \tau_{33}(\vec{u}_2) + g \Delta\rho_0 \zeta = 0 \quad (\text{на } \Gamma), \qquad \Delta\rho_0 := \rho_{01} - \rho_{02}, \end{gathered} \tag{1.4}$$

$$\vec{u}_i(0, x) = \vec{u}^0_i(x), \quad \rho_k(0, x) = \rho^0_k(x) \quad \zeta(0, \hat{x}) = \zeta^0(\hat{x}). \tag{1.5}$$

Символом $\tau_{kj}(\vec{u})$ в (1.4) обозначены напряжения в жидкости

$$\tau_{kj}(\vec{u}) = -p\delta_{kj} + \mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right).$$

2. Переход к операторному уравнению

Рассмотрим пространство $\widehat{L_2}(\Omega, \rho) = \vec{L}_2(\Omega_1, \rho_1) \oplus \vec{L}_2(\Omega_2, \rho_2)$ элементами которого являются матрицы-строки с компонентами — векторами: $\widehat{u} = (\vec{u}_1; \vec{u}_2)$, $\vec{u}_k = \vec{u}_k(x)$, $x \in \Omega_k$ $(k = 1, 2)$; скалярное произведение для произвольных элементов $\widehat{u}$ и $\widehat{v}$ определяется по формуле

$$(\widehat{u}, \widehat{v})_{\widehat{L_2}(\Omega,\rho)} := \sum_{k=1}^{2} \int_{\Omega_k} \rho_{0k} \vec{u}_k(x) \cdot \overline{\vec{v}_k(x)} \, d\Omega_k.$$

Лемма 1. *Имеет место следующее ортогональное разложение:*

$$\widehat{L_2}(\Omega,\rho) = \widehat{J_{0,S}}(\Omega,\rho) \oplus \widehat{G_{0,\Gamma}}(\Omega,\rho), \tag{2.1}$$

где $\widehat{J_{0,S}}(\Omega,\rho) := \widehat{J}_0(\Omega,\rho) \oplus \widehat{G_{h,S}}(\Omega,\rho) = \{\widehat{u} = (\vec{u}_1,\vec{u}_2) \in \widehat{L_2}(\Omega,\rho) \,:\, \mathit{div}\,\vec{u}_k = 0 \ (\text{ в } \Omega_k\,),$
$\vec{u}_k \cdot \vec{n}_k = 0 \ (\text{ на } S_k),\ \vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1 = \vec{u}_2 \cdot \vec{n}_1 \ (\text{ на } \Gamma\,),\ \vec{u}_1 = \vec{u}_2 \ (\text{ на } \Gamma\,)\,\}.$

$$\widehat{G_{0,\Gamma}}(\Omega,\rho) := \{\widehat{v} = (\vec{v}_1,\vec{v}_2) \in \widehat{L_2}(\Omega,\rho) |\ \vec{v}_k = \rho_{0k}^{-1}\nabla\varphi_k,\ \varphi_1 = \varphi_2 \ (\text{ на } \Gamma\,)\,\}. \qquad \square$$

Введем в рассмотрение пространство

$$\widehat{J_{0,S}^1}(\Omega,\rho) := \vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1,\rho_1) \oplus \vec{J}^1_{0,S_2}(\Omega_2,\rho_2), \tag{2.2}$$

где $\vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k,\rho_k) := \{\, \vec{u}_k \in \vec{H}^1(\Omega_k,\rho_k) |\ \mathrm{div}\,\vec{u}_k = 0 \ (\text{ на } \Omega_k\,),\ \vec{u}_k = \vec{0} \ (\text{ на } S_k\,)\,\}$ (причем на границе раздела Γ выполнено условие $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$)); со скалярным произведением

$$(\widehat{u},\widehat{v})_{\widehat{J^1_{0,S}}(\Omega,\rho)} = \widehat{E}(\widehat{u},\widehat{v}) = \sum_{k=1}^{2} E(\vec{u}_k,\vec{v}_k).$$

Можно показать, как и в [4], п.2.2.6, что $\widehat{J^1_{0,S}}(\Omega,\rho)$ плотно вложено в пространство $\widehat{J_{0,S}}(\Omega,\rho)$.

Наряду с введенными пространствами, понадобятся еще гильбертово пространство $\widehat{\mathfrak{L}_2}(\Omega)$ скалярных функций со скалярным произведением

$$(\widehat{\varphi},\widehat{\psi})_{\widehat{\mathfrak{L}_2}(\Omega)} := g^2 \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Omega_k} \big[\rho_{0k}(x_3) N_k^2(x_3)\big]^{-1} \varphi_k(x)\overline{\psi_k(x)}\, d\Omega_k$$

и гильбертово пространство $L_2(\Gamma) = H_0 \oplus \{1_\Gamma\}$ со скалярным произведением

$$(\eta,\zeta)_0 := \int\limits_{\Gamma} \eta(\hat{x})\overline{\zeta(\hat{x})}\, d\Gamma.$$

Будем считать, что решения задачи (1.2) — (1.5) и заданные функции являются гладкими функциями переменной t со значениями в гильбертовых пространствах $\vec{L}_2(\Omega_k,\rho_k)$ $(k = 1, 2)$. В связи с этим в дальнейшем производные $\partial/\partial t$ заменим на d/dt.

Перепишем первое уравнение (1.2) в виде

$$\frac{d\widehat{u}}{dt} = -\widehat{\rho_0^{-1}\nabla p} + \widehat{\mu\rho_0^{-1}\Delta u} - \widehat{g\rho_0^{-1}\rho\vec{e}_3} + \widehat{f}, \tag{2.3}$$

где $\widehat{u} = (\vec{u}_1,\vec{u}_2)$, $\widehat{\rho_0^{-1}\nabla p} = (\rho_{01}^{-1}\nabla p_1, \rho_{02}^{-1}\nabla p_2)$, $\widehat{\mu\rho_0^{-1}\Delta u} = (\mu_1\rho_{01}^{-1}\Delta\vec{u}_1, \mu_2\rho_{02}^{-1}\Delta\vec{u}_2)$, $\widehat{g\rho_0^{-1}\rho\vec{e}_3} = (g\rho_{01}^{-1}\rho_1\vec{e}_3, g\rho_{02}^{-1}\rho_2\vec{e}_3)$, $\widehat{f} = (\vec{f}_1,\vec{f}_2)$.

Введем ортопроекторы $P_{0,S}$ и $P_{0,\Gamma}$ на подпространства $\widehat{J_{0,S}}(\Omega,\rho)$ и $\widehat{G_{0,\Gamma}}(\Omega,\rho)$ соответственно. В силу условия соленоидальности и условия прилипания на S_k $(k=1,2)$ для поля $\widehat{u}$, считаем, что оно принадлежит пространству $\widehat{J_{0,S}}(\Omega,\rho)$, точнее, пространству $\widehat{J^1_{0,S_1}}(\Omega,\rho)$ (см. (3.1)), плотно вложенному в $\widehat{J_{0,S}}(\Omega,\rho)$.

Подействуем введенными ортопроекторами $P_{0,S}$ и $P_{0,\Gamma}$ на обе части уравнения (2.3). Будем иметь

$$\frac{d\widehat{u}}{dt} = -\widehat{\rho_0^{-1}\nabla\varphi'} + P_{0,S}\left(\mu\widehat{\rho_0^{-1}\Delta u}\right) - P_{0,S}\left(g\widehat{\rho_0^{-1}\rho\vec{e}_3}\right) + P_{0,S}\widehat{f}, \tag{2.4}$$

$$0 = -\widehat{\rho_0^{-1}\nabla\varphi''} + P_{0,\Gamma}\left(\mu\widehat{\rho_0^{-1}\Delta u}\right) - P_{0,\Gamma}\left(g\widehat{\rho_0^{-1}\rho\vec{e}_3}\right) + P_{0,\Gamma}\widehat{f}. \tag{2.5}$$

Из уравнения (2.5) при известных $\widehat{u}=(\vec{u}_1,\vec{u}_2)$ и $\widehat{\rho}=(\rho_1,\rho_2)$ поле $\widehat{\rho_0^{-1}\nabla\varphi''} \in \widehat{G_{0,\Gamma}}(\Omega,\rho)$ вычисляется непосредственно. В то же время это поле не входит в (2.4). Поэтому в дальнейшем будем рассматривать основное уравнение (2.4).

Для перехода к операторной формулировке исследуемой задачи рассмотрим две вспомогательные задачи.

ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА I. По заданным функциям $\vec{P}_{0,S_k}f_k$ найти функции $\vec{w}_k(x)$, $p'_k(x)$ $(k=1,2)$ являющиеся решением краевой задачи

$$\rho_{0k}^{-1}\nabla p'_k - P_{0,S_k}(\mu_k\rho_{0k}^{-1}\Delta\vec{w}_k) = P_{0,S_k}\vec{f}_k, \quad \operatorname{div}\vec{w}_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \quad \vec{w}_k = \vec{0} \quad (\text{на } S_k),$$
$$\vec{w}_1 = \vec{w}_2 \ (\text{на } \Gamma), \quad \vec{w}_1\cdot n_1 = \vec{w}_2\cdot\vec{n}_1 \ (\text{на } \Gamma), \quad \tau_{i3}(\vec{w}_1) - \tau_{i3}(\vec{w}_2) = 0 \ (\text{на } \Gamma,\ i=\overline{1,3}).$$

Это аналог первой вспомогательной задачи С.Г.Крейна (см. [4], с.116).

Лемма 2. *Если $\widehat{f}\in\widehat{J_{0,S}}(\Omega,\rho)$, то вспомогательная задача I имеет единственное обобщенное решение $\widehat{w}=\mu^{-1}A^{-1}\widehat{f}$, где A – оператор вспомогательной задачи I. Оператор A есть неограниченный самосопряженный положительно определенный оператор, обладающий следующими свойствами*

1. $\mathcal{D}(A)\subset\mathcal{D}(A^{\frac12}) = \widehat{J^1_{0,S}}(\Omega,\rho)\subset\widehat{J_{0,S}}(\Omega,\rho)$, $\quad\overline{\mathcal{D}(A)} = \widehat{J_{0,S}}(\Omega,\rho)$.

2. Для любого $\widehat{u}\in\mathcal{D}(A)$ и $\widehat{v}\in\widehat{J^1_{0,S}}(\Omega,\rho)$ имеем $(A\widehat{u},\widehat{v}) = \widehat{E}(\widehat{u},\widehat{v})$. Если $\widehat{u}$, $\widehat{v}\in\widehat{J^1_{0,S}}(\Omega,\rho)$, то $\widehat{E}(\widehat{u},\widehat{v}) = (A^{\frac12}\widehat{u},A^{\frac12}\widehat{v})$.

3. Обратный оператор A^{-1} есть компактный и положительный, действующий в пространстве $\widehat{J_{0,S}}(\Omega,\rho)$.

4. Собственные значения $\lambda_k(A)$ оператора A имеют асимтотическое поведение (см. [7]):

$$\lambda_k(A) = c_A^{-\frac23}k^{\frac23}[1+o(1)] \quad (k\to\infty), \quad c_A = \frac{1}{3\pi^2}\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{(\rho_i^0)^{3/2}}\int\limits_{\Omega_i}(\rho_{0i}(x_3))^{\frac32}d\Omega_i. \tag{2.6}$$

ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА II. По заданной функции ψ найти функции

$\vec{v}_k(x),\ p_k''(x)\ \ (k=1,2)$ являющиеся решением краевой задачи

$$\rho_{0k}^{-1}\nabla p_k'' - P_{0,S_k}(\mu_k\rho_{0k}^{-1}\Delta\vec{v}_k) = 0, \quad \operatorname{div}\vec{v}_k = 0 \ (\text{в } \Omega_k), \quad \vec{v}_k = \vec{0} \ (\text{на } S_k),$$
$$\vec{v}_1\cdot n_1 = \vec{v}_2\cdot\vec{n}_1 \ (\text{на } \Gamma), \quad \tau_{i3}(\vec{v}_1) - \tau_{i3}(\vec{v}_2) = 0 \ (\text{на } \Gamma,\ i=1,2).$$
$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 \ (\text{на } \Gamma), \quad \tau_{33}(\vec{v}_1) - \tau_{33}(\vec{v}_2) = \psi \ (\text{на } \Gamma), \quad \int\limits_{\Gamma}\psi\, d\Gamma = 0.$$

Лемма 3. *Если $\psi \in L_{2,\Gamma}$, то существует единственное обобщенное решение вспомогательной задачи II: $\widehat{v} = \mu^{-1}T\psi$, где T — оператор, изометрически действующий из $H_\Gamma^{-1/2}$ в $\widehat{J_{0,S}^1}(\Omega,\rho)$ (см. подробнее [4], с.280).*

Разыскивая теперь решения задачи (1.2) — (1.5) (с учетом (2.5)) в виде

$$\widehat{u} = \widehat{w} + \widehat{v}, \quad \widehat{\rho_0^{-1}\nabla\varphi}' = \widehat{\rho_0^{-1}\nabla p}' + \widehat{\rho_0^{-1}\nabla p}'', \tag{2.7}$$

где $(\widehat{w},\widehat{p}\,')$ — решение вспомогательной задачи I, а $(\widehat{v},\widehat{p}\,'')$ — решение вспомогательной задачи II; пользуясь определением операторов A и T, приходим к следующему выводу.

Теорема 1. *Задача* (1.2) — (1.5) *равносильна системе эволюционных уравнений*

$$\frac{d\widehat{u}}{dt} + \mu A\widehat{w} + C\widehat{\rho} = \widehat{f}, \quad \frac{d\widehat{v}}{dt} + \mu^{-1}g\Delta\rho_0 B\widehat{u} = 0, \quad \frac{d\widehat{\rho}}{dt} - C^*\widehat{u} = 0, \tag{2.8}$$

где $B\widehat{u} := T\gamma_1\vec{u}_1$, $\quad C\widehat{\rho} = P_{0,S}\left(\widehat{g\rho_0^{-1}\rho\vec{e}_3}\right) = (C_1\rho_1, C_2\rho_2)$, $C_k\rho_k = P_{0,S_k}(g\rho_{0k}^{-1}\rho_k\vec{e}_3)$, $C^*\widehat{u} = (C_1^*\vec{u}_1, C_2^*\vec{u}_2)$, $C_k^*\vec{u}_k = -\nabla\rho_{0k}\cdot\vec{u}_k$; *а начальные функции*

$$\widehat{v}(0) = \widehat{v}^0, \quad \widehat{w}(0) = \widehat{w}^0, \quad \widehat{\rho}(0) = \widehat{\rho}^0, \tag{2.9}$$

определяются по начальным данным следующим образом. Функции $\widehat{v}^0 = (\vec{v}_1^0, \vec{v}_2^0)$ есть решение вспомогательной задачи II с граничной функцией ψ^0, а $\widehat{u}^0 = \widehat{w}^0 + \widehat{v}^0$.

Лемма 4. *Операторы $C:\ \widehat{\mathfrak{L}_2}(\Omega) \to \widehat{J_{0,S}}(\Omega,\rho)$ и $C^*:\ \widehat{J_{0,S}}(\Omega,\rho) \to \widehat{\mathfrak{L}_2}(\Omega)$ определенные соотношениями (см. после* (2.8)*), взаимно сопряжены и ограничены.*

Доказательство леммы такое же, с учетом введенных выше пространств, как и при малых движениях одной вязкой стратифицированной жидкости (см., например, [5]).

3. Основное уравнение спектральной задачи

Рассмотрим нормальные колебания данной гидросистемы, то есть такие решения системы (2.8) (при $\widehat{f} \equiv 0$) зависящие от t по закону $\exp(-\lambda t)$. Это приводит к следующей спектральной задаче:

$$\lambda\widehat{u} = \mu A\widehat{w} - \lambda^{-1}CC^*\widehat{u}, \quad \lambda\widehat{v} = \mu^{-1}g\Delta\rho_0 B\widehat{u}. \tag{3.1}$$

Выполнив в (3.1) замены

$$\widehat{w} = A^{-\frac{1}{2}}x, \quad \widehat{v} = A^{-\frac{1}{2}}y, \quad \widehat{u} = A^{-\frac{1}{2}}z \quad (z = x + y) \tag{3.2}$$

и исключая x и y, придем к задаче на собственные значения для операторного пучка $L(\lambda)$:

$$L(\lambda)z = 0, \qquad L(\lambda) := I - \lambda\mu^{-1}A^{-1} - (\lambda\mu)^{-1} \cdot \left(g\Delta\rho_0\widehat{B} + \widehat{E}\right), \tag{3.3}$$
$$\widehat{B} := A^{\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}, \qquad \widehat{E} := A^{-\frac{1}{2}}CC^*A^{-\frac{1}{2}}, \qquad z \in \widehat{J_{0,S}}(\Omega, \rho).$$

Лемма 5. *Оператор $\widehat{B} + \widehat{E}$ — неотрицательный, вполне непрерывный из класса $\mathfrak{S}_p$ при $p > 2$.*

Доказательство. Компактность и неотрицательность следует из соответствующих свойств операторов $\widehat{B}$ (см. [4], с. 282) и $\widehat{E}$ (см. лемму 2 пункт 3 и лемму 4). Докажем последнее утверждение леммы.

С учетом выше сказанного, для ненулевых s-чисел справедливо:

$$s_k(\widehat{B}) = \lambda_k(\widehat{B}), \quad s_k(\widehat{E}) = \lambda_k(\widehat{E}),$$

где при $k \to \infty$ (см. [7])

$$\lambda_k(\widehat{B}) = c_{\widehat{B}}^{\frac{1}{2}}k^{-\frac{1}{2}}[1 + o(1)], \qquad c_{\widehat{B}} = \frac{1}{16\pi} \cdot \frac{g\Delta\rho_0 \mathrm{mes}\Gamma}{(\rho_1^0 + \rho_2^0)^2}, \tag{3.4}$$
$$\lambda_k(\widehat{E}) = c_{\widehat{E}}^{\frac{2}{3}}k^{-\frac{2}{3}}[1 + o(1)], \qquad c_{\widehat{E}} = \frac{1}{9\pi^2} \cdot \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{\rho_k^0} \int_{\Omega_k} (\rho_{0k}(x_3)N_k^2(x_3))^{\frac{3}{2}} d\Omega_k.$$

Так как $\lim\limits_{k\to\infty} k^{\frac{1}{2}} s_k(\widehat{B}) = \lim\limits_{k\to\infty} k^{\frac{1}{2}}\lambda_k(\widehat{B}) = c_{\widehat{B}}^{\frac{1}{2}}$, $\lim\limits_{k\to\infty} k^{\frac{1}{2}} s_k(\widehat{E}) = \lim\limits_{k\to\infty} k^{\frac{1}{2}}\lambda_k(\widehat{E}) = 0$, то (см. [8], с.52) $\lim\limits_{k\to\infty} k^{\frac{1}{2}}\lambda_k(\widehat{B} + \widehat{E}) = c_{\widehat{B}}^{\frac{1}{2}}$. Таким образом,

$$\lambda_k(\widehat{B} + \widehat{E}) = \lambda_k(\widehat{B})[1 + o(1)] = c_{\widehat{B}}^{\frac{1}{2}}k^{-\frac{1}{2}}[1 + o(1)], \tag{3.5}$$

откуда, следует, утверждение леммы. □

Лемма 6. *Ядро оператора $B_E = g\Delta\rho_0\widehat{B} + \widehat{E}$ состоит из функций $z = A^{-\frac{1}{2}}\widehat{u}$, где $\widehat{u}$ удовлетворяет условиям*

$$(u_k)_3 = 0 \quad (\text{ в } \Omega_k,\ k = 1, 2\,), \qquad (u_1)_3 = 0 \quad (\text{ на } \Gamma\,). \tag{3.6}$$

Доказательство. Пусть $z = A^{-\frac{1}{2}}\widehat{u} \in \ker B_E$, тогда с учетом определения операторов $\widehat{B}$ и $\widehat{E}$, имеем

$$\begin{aligned}(B_E z, z)_{\widehat{J_{0,S}}(\Omega,\rho)} &= g\Delta\rho_0(\widehat{B}z, z)_{\widehat{J_{0,S}}(\Omega,\rho)} + (\widehat{E}z, z)_{\widehat{J_{0,S}}(\Omega,\rho)} = \\ &= g\Delta\rho_0(\gamma_1\vec{u}_1, \gamma_1\vec{u}_1)_{L_{2,\Gamma}} + (C^*\widehat{u}, C^*\widehat{u})_{\widehat{\mathfrak{L}_2}(\Omega)} = \\ &= g\Delta\rho_0 \int_{\Gamma} |(u_1)_3|^2\, d\Gamma + \sum_{k=1}^{2} \int_{\Omega_k} \rho_{0k}(x_3)N_k^2(x_3)\,|(u_k)_3|^2\, d\Omega_k = 0.\end{aligned}$$

Таким образом, ядро оператора B_E состоит из функций $z = A^{-\frac{1}{2}}\widehat{u}$, где $\widehat{u}$ удовлетворяет условиям (3.6), при этом $\dim(\ker B_E) = \infty$. Более того, пространство $\widehat{J_{0,S}}(\Omega,\rho) \ominus \ker B_E$ — также бесконечномерно. □

4. Общая теорема о спектре

Итак, задача о нормальных колебаниях исходной гидросистемы, приведена к задаче на собственные значения для операторного пучка С.Г. Крейна (3.3):

$$L(\lambda)z = 0, \qquad L(\lambda) := I - \lambda\mu^{-1}A^{-1} - (\lambda\mu)^{-1}\cdot\left(g\Delta\rho_0\widehat{B} + \widehat{E}\right).$$

Уравнение вида (3.3) в произвольном гильбертовом пространстве помимо работ [4], [9] — [11] исследовалось многими авторами, которые применяли как теорию самосопряженных квадратичных пучков, так и теорию операторов в пространстве с индефинитной метрикой. Поэтому перечислим без доказательств свойства решений задачи (3.3).

Теорема 2. *1. Спектр задачи о нормальных колебаниях системы слоев вязкой стратифицированной жидкости дискретен и состоит из счетного множества конечнократных изолированных собственных значений с предельными точками ноль и бесконечность.*

2. Все собственные значения расположены в правой полуплоскости ($Re\,\lambda \geq 0$), причем все они, за исключением конечного числа, вещественные.

3. Невещественные собственные значения расположены симметрично относительно вещественной оси в полукольце

$$\frac{\mu}{2\|A^{-1}\|} < |\lambda| < 2\mu^{-1}\left(g\Delta\rho_0\|\widehat{B}\| + N_0^2\|A^{-1}\|\right), \quad Re\,\lambda \geq 0, \tag{4.1}$$

а вещественные собственные значения, которым отвечают не только собственные, но и присоединенные векторы, — в замкнутом полукольце (4.1).

4. Если стратификация жидкости N_0^2 настолько мала, а вязкость μ настолько велика, что выполнено условие

$$N_0^2 \leq \left(\frac{\mu^2}{4\|A^{-1}\|} - \|\widehat{B}\|\right)/\|A^{-1}\|, \tag{4.2}$$

то невещественных собственных значений не существует.

5. При выполнении условия (4.2) имеют место следующие двухсторонние оценки для собственных чисел пучка $L(\lambda)$:

$$\mu\lambda_k(A) - 2\mu^{-1}\left[\|\widehat{B}\| + 2N_0^2\|A^{-1}\|\right] \leq \lambda_k^+ \leq \mu\lambda_k(A), \quad k\in\mathbb{N}, \tag{4.3}$$

$$\mu^{-1}\lambda_k(\widehat{B}) \leq \lambda_k^- \leq \mu^{-1}\lambda_k(\widehat{B})\left[1 - 2\mu^{-1}\lambda_k(\widehat{B})\|A^{-1}\|\right]^{-1}, \tag{4.4}$$

при этом для ветвей $\{\lambda_k^+\}_{k=1}^\infty$ *и* $\{\lambda_k^-\}_{k=1}^\infty$ *справедливы асимптотические формулы:*

$$\lambda_k^+ = \mu\lambda_k(A)[1+o(1)], \quad \lambda_k^- = \mu^{-1}\lambda_k(\widehat{B})[1+o(1)], \quad k\to\infty, \tag{4.5}$$

где $\lambda_k(A)$ *и* $\lambda_k(\widehat{B})$ *— собственные значения операторов* A *и* $\widehat{B}$ *с асимптотическим поведением* (2.6) *и* (3.4).

5. О двухратной базисности мод нормальных колебаний

Для несамосопряженных спектральных задач, у решений которых могут быть присоединенные векторы, возникает вопрос о полноте, а в некоторых случаях — и о базисности системы собственных и присоединенных векторов отвечающего задаче операторного пучка $L(\lambda)$ из (3.3) и ассоциированного с ним линейного пучка операторов.

Для краткости введем обозначения

$$H = \widehat{J_{0,S}}(\Omega,\rho), \quad H_1 = H\ominus H_2, \quad H_2 = \ker B_E.$$

Пусть P_1 — ортопроектор на H_1, $P_2 = I - P_1$. Действуя операторами P_1 и P_2 на уравнение (3.3) и обозначая $\nu = \lambda - \lambda^{-1}$, $\psi = P_1 z/\lambda \in H_1$, переходим от (3.3) к равносильному векторно-матричному уравнению

$$\eta = \nu M\eta + F\eta, \qquad \eta\in\mathcal{H} := H\oplus H_1, \tag{5.1}$$

$$\eta = (z,\eta)^t\in\mathcal{H}, \quad M = \mu^{-1}\operatorname{diag}\left(A^{-1}; -P_1B_EP_1\right),$$

$$F = \begin{pmatrix} \mu^{-2}A^{-1}P_2A^{-1} & \mu^{-1}\left(A^{-1}P_1 + B_EP_1\right) \\ \mu^{-1}\left(P_1A^{-1} + P_1B_EP_1\right) & 0\end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

Определение. Будем говорить, что система собственных и присоединенных векторов (с.с.п.в) задачи (3.3) образует двукратный (с оператором B_E) p-базис в H, если с.с.п.в. ассоциированной с (3.3) задачи (5.1) образует p-базис в $\mathcal{H}$; если $\ker B_E = H_2 = \{0\}$, то говорят о двукратной p-базисности.

Очевидно, для задачи (3.3) всегда найдется такое число $a>0$, что после замены $\lambda\mapsto a\lambda$ оператор $I-F$ в задаче (5.1) будет обратимым. Будим считать, что необходимая замена $\lambda\mapsto a\lambda$ в (3.3) уже проведена, т.е. $I-F$ обратим. Перепишем (5.1) в виде

$$\eta = \nu J^{-1}M\eta, \qquad J = I - F. \tag{5.3}$$

Введем далее новое скалярное произведение в $\mathcal{H}$: $[\psi_1,\psi_2] := (J\psi_1,\psi_2)_{\mathcal{H}}$, $\forall\psi_1,\psi_2\in\mathcal{H}$; оно индефинитно при $\lambda_1(F) = \lambda_{\max}(F) > 1$ и дефинитно при $\lambda_1(F) < 1$. Легко проверить также, что $J^{-1}M$ самосопряжен относительно нового скалярного произведения.

Теорема 3. *Система собственных и присоединенных векторов задачи* (3.3) *образуют двукратный (с оператором* B_E*) p-базис в* $H = \widehat{J_{0,S}}(\Omega,\rho)$ *при* $p>2$.

Доказательство. 1. В дефинитном случае, когда новая норма эквивалентна старой, (5.3) равносильно уравнению

$$\varphi = \nu J^{-1/2} M J^{-1/2} \varphi, \quad \varphi = J^{1/2}\eta,$$

с вполне непрерывным самосопряженным оператором, имеющим нулевое ядро. По теореме Гильберта-Шмидта, система его собственных элементов $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует ортогональный базис в $\mathcal{H}$.

Заметим теперь, что оператор

$$T := J^{-1/2} - I = \left(J^{-1} - I\right)\left(J^{-1/2} + I\right)^{-1} = -J^{-1}F\left(J^{-1/2} + I\right)^{-1} \tag{5.4}$$

в силу свойств $J^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ и $\left(J^{-1/2} + I\right)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ принадлежит тому же классу $\mathfrak{S}_p$, что и F, а $F \in \mathfrak{S}_p$ при $p > 2$. Последнее свойство можно установить, опираясь на определение (5.2) оператора F и асимптотические формулы (2.6) и (3.4), а также на неравенства, связывающие s-числа суммы и произведения операторов. Из (5.4) и указанного свойства оператора T следует факт p-базисности собственных элементов $\eta_n = J^{-1/2}\varphi_n = (I + T)\varphi_n$ задачи (5.1) при $p > 2$.

2. В индефинитном случае, когда оператор F имеет ровно κ собственных значений (см. подробнее, например, [4]), больших единицы, приходим к пространству Л.С. Понтрягина Π_κ и вполне непрерывному J-самосопряженному оператору $J^{-1}M$, действующем в нем. Данная ситуация разобрана в [8]. Оказывается, в этом случае $\mathcal{H}$ разбивается на J-ортогональную сумму двух инвариантных относительно $J^{-1}M$ подпространств: $\mathcal{H} = \mathfrak{L}_+ \oplus \mathfrak{L}_-$, причем $\mathfrak{L}_-$ не более чем 2κ-мерно, а на $\mathfrak{L}_+$ квадратная форма $[\psi, \psi]$ положительна, так что оператор $J^{-1}M$ имеет в $\mathfrak{L}_+$ полную J-ортогональную систему собственных векторов $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Так как ортогональному разложению $\mathcal{H} = \mathfrak{L}_+ \oplus \mathfrak{L}_-$ отвечает матричное представление $J^{-1}M$ в виде диагонального оператора, то в $\mathfrak{L}_+$ получаем задачу, уже разобранную в п.1, а в конечномерном подпространстве $\mathfrak{L}_-$ утверждение теоремы очевидно. Теорема доказана. □

6. Физический вывод

В задаче о нормальных колебаниях системы вязких стратифицированных жидкостей, полностью заполняющих неподвижный сосуд, существуют диссипативные волны, обусловленные наличием сил вязкости, внутренние волны, появляющиеся из-за действия сил плавучести, и поверхностные волны вблизи границы раздела. Диссипативным волнам, как и в однородной жидкости, отвечают апериодические затухающие режимы с декрементами затухания, стремящимися к бесконечности (см. (4.3), (4.5)). Для внутренних и поверхностных волн апериодические режимы нормальных колебаний имеют как угодно малые декременты затухания (см. (4.4), (4.5)), т.е. они могут существовать длительное время. Если стратификация жидкости достаточно мала (выполнено условие (4.2)), то нормальные режимы являются только апериодические движения. При увеличении стратификации декременты затухания диссипативных волн движутся влево, а внутренних и поверхностных вправо; при этом происходит внутренний резонанс указанных типов волн с появлением невещественных декрементов затухания (см. (4.1)), т.е. возникновения конечного числа осциллированных во времени затухающих режимов колебаний.

Список цитируемых источников

1. *Краусс В.К.* Внутренние волны. — Л.: Гидрометеоиздат, 1968.
2. *Габов С.А., Свешников А.Г.* Задачи динамики стратифицированных жидкостей. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.
3. *Копачевский Н.Д.* Малые движения и нормальные колебания системы тяжелых вязких вращающихся жидкостей //Ротапринт ФТИНТ. — Харьков., 1978. – 60 с.
4. *Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан* Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989. – 416 с.
5. *Цветков Д.О.* Математические проблемы теории колебания стратифицированной жидкости: Дисс... канд. физ.-мат. наук: 01.01.03. — Симферополь, 2005. — 180 с.
6. *Цветков Д.О.* Малые движения системы вязких стратифицированных жидкостей // Межведомственный научный сборник "Динамические системы". – 2007. – Вып. 23. – С. 63 – 71.
7. *Суслина Т.А.* Асимптотика спектра некоторых задач, связанных с колебаниями жидкостей // ЛЭИС. – Л., 1995. — 79 с.: Деп. в ВИНИТИ 21.11.85, №8058.
8. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965. — 448 с.
9. *Аскеров Н.К., Лаптев Г.И.* Задача о колебаниях вязкой жидкости и связанные с ней опрераторные уравнения. — Функциональный анализ и его приложения — 1968. – Вып. 2, № 2. – С. 21 – 31.
10. *Азизов Т.Я., Иохвидов И.С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. — М.: Наука, 1986. – 352 с.
11. *Azizov T. Ya., Hardt V., Kopachevsky N.D., Mennicken R.* To the problem on small motions and normal oscillations of a viscous fluid in a partially filled container // Math. Nachr. – 2003. – V. 248 – 249. – P. 3 – 39.

Получена 01.06.2008