Динамические системы, вып. 23 (2007), 31–37

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 517.9

О положении равновесия автономной периодической задачи[1]

С. М. Чуйко, И. Ю. Курильченко
Славянский государственный педагогический университет,
Славянск 84112, *E-mail: chujko-slav@inbox.ru*

Аннотация. Доказано существование положения равновесия автономной слабонелинейной периодической краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, являющегося функцией малого параметра. Найдены итерационные процедуры для построения решений поставленной задачи и доказаны условия сходимости этих процедур к искомому решению. В качестве примера доказано существование положения равновесия автономной периодической задачи для возмущенного уравнения Ван-дер-Поля и предложены сходящиеся итерационные процедуры для построения решения, являющегося функцией малого параметра.

1. Постановка задачи. Исследуем задачу о нахождении положения равновесия слабонелинейной автономной периодической задачи, представляющего одно из решений [1, 2, 3]

$$z(t,\varepsilon) = \operatorname{col}\left(z^{(1)}(t,\varepsilon), \ldots, z^{(n)}(t,\varepsilon)\right),$$
$$z^{(i)}(\cdot,\varepsilon) \in C^1[0, T_1(\varepsilon)], \quad T_1(0) = T, \quad z^{(i)}(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0], \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dz/dt = Az + \varepsilon Z(z,\varepsilon), \tag{1}$$

удовлетворяющих краевому условию

$$\ell z(\cdot,\varepsilon) = z(0,\varepsilon) - z(T_1(\varepsilon),\varepsilon) = 0. \tag{2}$$

Решение задачи (1), (2) ищем в малой окрестности решения

$$z_0(t) = \operatorname{col}\left(z_0^{(1)}(t),\ \ldots\ ,\ z_0^{(n)}(t)\right),\ z_0^{(i)}(\cdot) \in C^1[0,T],\ i = 1, 2, \ldots,\ n$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке фонда фундаментальных исследований (код 2201020)

порождающей задачи

$$dz_0/dt = Az_0, \quad \ell z_0(\cdot) = z_0(0) - z_0(T) = 0. \tag{3}$$

Здесь A — постоянная ненулевая $(n \times n)$-матрица и $Z(z,\varepsilon)$ — n-мерная вектор-функция. Вектор-функцию $Z(z,\varepsilon)$ предполагаем непрерывно дифференцируемой по неизвестной $z(t,\varepsilon)$ в малой окрестности решения порождающей задачи и непрерывно дифференцируемой по малому параметру ε в малой положительной окрестности нуля.

При изучении положений равновесия в классических работах [4, 5, 6] хорошо изучены автономные системы обыкновенных дифференциальных уравнений без малого параметра; при этом положения равновесия представляют собой константы. В поставленной задаче (1), (2) малый параметр присутствует, при этом естественно возникает зависимость положения равновесия от этого параметра. Таким образом, целью данной работы является доказательство существования, а также нахождение положения равновесия в задаче (1), (2), как функции малого параметра.

Обозначим функцию $F(z(t,\varepsilon),\varepsilon) = Az + \varepsilon Z(z,\varepsilon)$; порождающая задача (3) имеет тривиальное решение $z_0(t) \equiv 0$, являющееся положением равновесия этой задачи. Очевидно $F(z_0(t),0) = 0$, кроме того,

$$\left.\frac{\partial F(z(t,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z}\right|_{\varepsilon=0} = A \neq 0,$$

следовательно, по теореме о неявной функции для некоторого значения $\varepsilon^* \le \varepsilon_0$ в достаточно малой окрестности порождающего решения $z_0(t) \equiv 0$ существует единственное положение равновесия

$$z(\varepsilon) = \mathrm{col}\big(z^{(1)}(\varepsilon), \ldots,\ z^{(n)}(\varepsilon)\big),\ z^{(i)}(\cdot) \in C[0,\varepsilon_0],\ i = 1,2,\ldots,\ n,\ 0 < \varepsilon \le \varepsilon^* \le \varepsilon_0$$

системы (1). Поскольку положение равновесия системы (1) удовлетворяет условию (2), постольку существует единственное решение задачи (1), (2), при $\varepsilon = 0$ обращающееся в нулевое решение задачи (3). Для вычисления этого решения при условии $\det A \neq 0$ применима итерационная процедура

$$z_{k+1}(\varepsilon) = -\varepsilon A^{-1} Z(z_k(\varepsilon),\varepsilon),\ z_0 \equiv 0,\ k = 0,1,2,\ldots. \tag{4}$$

Достаточным условием сходимости итерационной процедуры (4) является условие

$$\sup_{k\in N}\ \sup_{\varepsilon\in[0;\varepsilon^*]} \left|\left|\varepsilon \cdot A^{-1} \cdot \frac{\partial Z(z_k(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z}\right|\right| < 1. \tag{5}$$

В силу непрерывной дифференцируемости нелинейности системы (1) по неизвестной z, условие (5) выполняется для достаточно малых значений параметра ε. Таким образом, условие (5) определяет отрезок значений малого параметра

$\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$, на котором сохраняется сходимость итерационной процедуры (4). Норму вектор-функции $\varphi(t) = \mathrm{col}(\varphi^{(1)}(t), \ldots, \ \varphi^{(n)}(t)), \ \ \varphi^{(i)}(\cdot) \in C[a,b], \ \ i = 1, 2, \ldots, \ n$ считаем равной [7, с.385], [8, с.123]

$$||\varphi(t)|| = \max_{1 \le i \le n} ||\varphi^{(i)}(t)||, \ ||\varphi^{(i)}(t)|| = \max_{a \le t \le b} \ |\varphi^{(i)}(t)|.$$

Нормой $(n \times n)-$ матрицы $A(t) = a_{ij}(t), \ a_{ij}(\cdot) \in C[a,b]$ будем называть число

$$||A(t)|| = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} ||a_{ij}(t)||.$$

2. Ускорение сходимости итерационной процедуры. Согласно теореме Канторовича [8, 9], для нахождения положения равновесия системы (1) также применима итерационная процедура

$$z_{k+1}(\varepsilon) = z_k(\varepsilon) - \left\{ \frac{\partial F(z(t,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z} \right\}^{-1} \cdot F\Big(z_k(\varepsilon), \varepsilon\Big), \ z_0 \equiv 0, \ \ k = 0, 1, 2, \ldots. \quad (6)$$

В достаточно малой окрестности порождающего решения $z_0 \equiv 0$ и точки $\varepsilon = 0$ при условии

$$2\gamma_1(\varepsilon)\gamma_2(\varepsilon)\gamma_3(\varepsilon) < 1. \quad (7)$$

итерационная процедура (6) сходится, причем имеет место квадратичная сходимость. Здесь величины $\gamma_1(\varepsilon), \ \gamma_2(\varepsilon), \ \gamma_3(\varepsilon)$ гарантируют выполнение неравенств

$$\left|\left| \left\{ \frac{\partial F(z_0,\varepsilon)}{\partial z} \right\}^{-1} \right|\right| \le \gamma_1(\varepsilon), \quad \left|\left| F\Big(z_0, \varepsilon\Big) \right|\right| \le \gamma_2(\varepsilon), \quad \left|\left| \frac{\partial^2 F(z(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z^2} \right|\right| \le \gamma_3(\varepsilon).$$

Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма. *В малой окрестности порождающего решения $z_0(t) \equiv 0$ и точки $\varepsilon = 0$ задача (1), (2) имеет единственное решение*

$$z(\varepsilon) = \mathrm{col}\Big(z^{(1)}(\varepsilon), \ldots, z^{(n)}(\varepsilon)\Big), \ z^{(i)}(\cdot) \in C[0, \varepsilon^*],$$

$$i = 1, 2, \ldots, \ n, \ 0 < \varepsilon \le \varepsilon^* \le \varepsilon_0,$$

при $\varepsilon = 0$ обращающееся в нулевое решение задачи (3). Для вычисления этого решения в случае невырожденности матрицы A и при условии (5) применима итерационная процедура (4), а при условии (7) — итерационная процедура (6).

Поскольку точное решение $z(\varepsilon)$ неизвестно, постольку на практике имеет смысл использовать следующее условие сходимости $2 \cdot \gamma_1(\varepsilon) \cdot \gamma_2(\varepsilon) \cdot \tilde{\gamma}_3(k, \varepsilon) < 1$, где

$$\left|\left| \frac{\partial^2 F(z_k(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z^2} \right|\right| \le \tilde{\gamma}_3(k, \varepsilon);$$

норма второй производной (по Фреше) функции $F(z(\varepsilon), \varepsilon)$ представляет собой

$$\left\|\frac{\partial^2 F(z(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z^2}\right\| = \sup_{||x||\le 1}\left\| \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial F(z(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z}\cdot x\right\}\cdot x \right\|.$$

Доказанная лемма является частным случаем утверждения доказанного А. Д. Мышкисом [4]; при этом проясняется структура найденного положения равновесия задачи (1), (2), а именно — зависимость положения равновесия от малого параметра в достаточно малой окрестности порождающего решения $z_0(t) \equiv 0$.

3. Периодическая задача для уравнения типа Ван-дер-Поля. Используем итерационные процедуры (4) и (6) для нахождения положений равновесия $z(\varepsilon) = \mathrm{col}\Big(z^{(a)}(\varepsilon),\ z^{(b)}(\varepsilon)\Big)$ возмущенного уравнения Ван-дер-Поля

$$dz/dt = Az + \varepsilon Z(z,\varepsilon), \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Z(z,\varepsilon) = \begin{bmatrix} \sin(\varepsilon) \\ \left[1 - \left(z^{(a)}\right)^2\right]\cdot z^{(b)} \end{bmatrix}. \tag{8}$$

В малой окрестности порождающего решения $z_0(t) \equiv 0$ и точки $\varepsilon = 0$ уравнение (8) имеет единственное положение равновесия. Матрица A невырождена, следовательно для вычисления положения равновесия возмущенного уравнения Ван-дер-Поля применима итерационная процедура

$$z_{k+1}^{(a)}(\varepsilon) = \varepsilon\cdot\left[1 - \left(z_k^{(a)}\right)^2\right]\cdot z_k^{(b)}, \quad z_{k+1}^{(b)}(\varepsilon) = -\varepsilon\sin(\varepsilon),\ k = 0,1,2,\dots. \tag{9}$$

Для определения значений малого параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$, на котором сохраняется сходимость итерационной процедуры (9), используем условие (5). Неравенство

$$\left\|\varepsilon\cdot A^{-1}\cdot\frac{\partial Z(z_k(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z}\right\| = \varepsilon\cdot\left[||2z_k^{(a)}z_k^{(b)}|| + \left\|\left(z_k^{(a)}\right)^2 - 1\right\|\right] < 1$$

выполняется для $\varepsilon < 0,778\,608 \approx \varepsilon_* \le \varepsilon^*$; в этом случае

$$\sup_{k\in N}\sup_{\varepsilon\in[0;\varepsilon^*]}\left\|\varepsilon\cdot A^{-1}\cdot\frac{\partial Z(z_k(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z}\right\| = \left\|\varepsilon_*\cdot A^{-1}\cdot\frac{\partial Z(z_2(\varepsilon),\varepsilon_*)}{\partial z}\right\| \approx 0,999\,999\ .$$

При условии прекращения итераций $||F(z_k(\varepsilon_*),\varepsilon_*)|| < 10^{-15}$, итерационная процедура (9) сходится на 30-м шагу; при этом

$$z_{30}^{(a)}(\varepsilon_*) \approx -0,368\,070\ ; \quad z_{30}^{(b)}(\varepsilon_*) \approx -0,546\,807\ .$$

Для построения итерационной процедуры (6) согласно методу Ньютона-Канторовича приходим к итерационной процедуре

$$z_{k+1}^{(a)}(\varepsilon) = z_k^{(a)}(\varepsilon) - \frac{1}{1+2\varepsilon z_k^{(a)} z_k^{(b)}} \left[\left(1-(z_k^{(a)})^2\right)\left(z_k^{(b)} + \varepsilon \sin(\varepsilon)\right) + \right.$$

$$\left. + z_k^{(b)} - \varepsilon \left(1-(z_k^{(a)})^2\right) z_k^{(b)} \right], \tag{10}$$

$$z_{k+1}^{(b)}(\varepsilon) = \left(z_k^{(b)} + \varepsilon \sin(\varepsilon)\right)\left(1+2\varepsilon z_k^{(a)} z_k^{(b)}\right), \ k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Для оценки длины отрезка $[0, \varepsilon^*]$, на котором сохраняется сходимость итерационной процедуры (6), найдем величины $\gamma_1(\varepsilon),\ \gamma_2(\varepsilon)$ и $\gamma_3(k, \varepsilon)$. Обращая матрицу

$$\left\{ \frac{\partial F(z_0, \varepsilon)}{\partial z} \right\}^{-1} = \begin{bmatrix} \varepsilon & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

находим ее норму

$$\left\| \left\{ \frac{\partial F(z_0, \varepsilon)}{\partial z} \right\}^{-1} \right\| = 1 + \varepsilon = \gamma_1(\varepsilon).$$

Аналогично

$$\left\| F\Big(z_0, \varepsilon\Big) \right\| = \left\| \begin{bmatrix} \varepsilon \sin \varepsilon \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = \varepsilon \sin \varepsilon = \gamma_2(\varepsilon).$$

Для вычисления второй производной (по Фреше)

$$\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial F(z(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial z} \cdot x \right\} \cdot x,$$

совпадающей с второй производной (по Фреше) функции

$$Z(z(\varepsilon), \varepsilon) = \begin{bmatrix} Z^{(a)}(z(\varepsilon), \varepsilon) \\ Z^{(b)}(z(\varepsilon), \varepsilon) \end{bmatrix},$$

$$Z^{(a)}(z(\varepsilon), \varepsilon) = \sin \varepsilon, \quad Z^{(b)}(z(\varepsilon), \varepsilon) = \left[1 - \Big(z^{(a)}\Big)^2 \right] \cdot z^{(b)}$$

воспользуемся формулой [10]

$$\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial F(z(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial z} \cdot x \right\} \cdot x = \begin{bmatrix} x^* \cdot H_a(z) \cdot x \\ x^* \cdot H_b(z) \cdot x \end{bmatrix};$$

здесь

$$H_a(z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 Z^{(a)}(z(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial (z^{(a)})^2} & \frac{\partial^2 Z^{(a)}(z(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z^{(a)} \partial z^{(b)}} \\ \frac{\partial^2 Z^{(a)}(z(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z^{(a)} \partial z^{(b)}} & \frac{\partial^2 Z^{(a)}(z(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial (z^{(b)})^2} \end{bmatrix}, \quad H_b(z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 Z^{(b)}(z(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial (z^{(a)})^2} & \frac{\partial^2 Z^{(b)}(z(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z^{(a)} \partial z^{(b)}} \\ \frac{\partial^2 Z^{(b)}(z(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z^{(a)} \partial z^{(b)}} & \frac{\partial^2 Z^{(b)}(z(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial (z^{(b)})^2} \end{bmatrix} -$$

(2×2)-матрицы Гессе. В данном примере

$$H_a(z) = O_2, \quad H_b(z) = -2 \begin{bmatrix} z^{(b)} & z^{(a)} \\ z^{(a)} & 0 \end{bmatrix},$$

при этом

$$\tilde{\gamma}_3(k, \varepsilon) = \Big|\Big| H_b(z_k) \Big|\Big| = 2 \cdot \Big[\Big|\Big| z_k^{(a)} \Big|\Big| + \Big|\Big| z_k^{(b)} \Big|\Big| \Big].$$

Таким образом, получаем условие сходимости итерационной процедуры (10)

$$4 \cdot \varepsilon \cdot (1 + \varepsilon) \cdot \sin(\varepsilon) \cdot \Big[\Big|\Big| z_k^{(a)} \Big|\Big| + \Big|\Big| z_k^{(b)} \Big|\Big| \Big] < 1;$$

это условие выполняется при $\varepsilon < 0,578\ 866 \approx \varepsilon_* \leq \varepsilon^*$; в этом случае невязка четвертого приближения $||F(z_4(\varepsilon), \varepsilon)|| < 10^{-15}$, при этом

$$z_4^{(a)}(0,1) \approx -0,177\ 539; \quad z_4^{(b)}(0,1) \approx -0,316\ 683.$$

Условием сходимости итерационной процедуры (10) является также требование

$$z_k(\varepsilon) \in [-r; r], \quad r \approx 2 \cdot \gamma_2(\varepsilon_*) = 2 \cdot \varepsilon_* \cdot \sin(\varepsilon_*) \approx 0,633\ 366.$$

Воспользовавшись средствами системы Mathcad 12, заключаем, что последнее условие выполняется. Для сравнения скорости сходимости итерационных процедур (9) и (10), вычислим положение равновесия уравнения (8) по формуле (9) при максимальном значении $\varepsilon = \varepsilon_*$ для схемы (10). В этом случае невязка только тринадцатого приближения полученного методом простых итераций (9), удовлетворяет условию $||F(z_{13}(\varepsilon_*), \varepsilon_*)|| < 10^{-15}$, в отличие от четвертого приближения по схеме (10) Ньютона-Канторовича.

Доказанная лемма является частным случаем теоремы [4], доказанной А. Д. Мышкисом, с другой стороны в данной постановке сняты ограничения на область задания нелинейности дифференциальной системы (1), кроме малости окрестности точки $z_0 = 0$. Кроме того, наличие положения равновесия $z = z(\varepsilon)$ задачи (1), (2) при определенных условиях согласно теореме Хопфа влечет за собой существование периодического решения. В свою очередь бифуркация Хопфа имеет место в различных динамических моделях биологических явлений [12].

Список цитируемых источников

1. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems.— Utrecht; Boston: VSP, 2004.— XIV + 317 pp.
2. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний.- М. Гостехиздат. 1956. 491 с.
3. *Бойчук А.А., Чуйко С.М.* Автономные слабонелинейные краевые задачи // Дифференц. уравнения. 1992. – **28**, № 10 С. 1668 – 1674.

4. *Мышкис А.Д.* Обобщения теоремы о точке покоя динамической системы внутри замкнутой траектории // Математ. сборник // 1954. – **34**, № 3 С. 525 – 540.
5. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. 2 изд. М. Наука. 1981. 568 с.
6. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.– Ленинград. ОГИЗ. 1947. 448 с.
7. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М. Наука. 1988. 552 с.
8. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М. Наука. 1977. 744 с.
9. *Деннис Дж., Шнабель Р.* Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. М. Мир. 1988. 440 с.
10. *Постников М.М.* Введение в теорию Морса. М. Наука. 1971. 567 с.
11. *Гребеников Е.А., Рябов Ю.А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. М. Наука. 1979. 432 с.
12. *Марри Дж.* Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. М. Мир. 1983. 397 с.

Получена 01.04.2007