Динамические системы, вып. 20 (2006), 27–34

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 517.977 : 531.39

Управление упругими колебаниями с использованием канонической формы

А. Л. Зуев
Институт прикладной математики и механики НАН НАН Украины,
Донецк 83114. *E-mail: al_zv@mail.ru*

Аннотация. Рассмотрена система дифференциальных уравнений с управлением, описывающая колебания твердого тела с присоединенной упругой балкой. Указан явный вид преобразования, приводящего исследуемую линейную систему к стандартной канонической форме (канонической форме Бруновского). Предложен конструктивный способ решения задачи управления системой с произвольным конечным числом степеней свободы.

1. Введение

Вопрос об управляемости механических систем с упругими элементами достаточно подробно исследован для модели балки Эйлера-Бернулли. Не претендуя на полноту изложения, выделим обзор [7] и недавние работы [1], [2], [9] в этой области. Несмотря на прогресс в качественной теории таких систем, вопрос об эффективном синтезе функций управления, обеспечивающих движение с заданными свойствами, требует дальнейшего исследования. В работе [9] предложен способ управления балкой Эйлера-Бернулли с защемленным концом в рамках теории flat-систем с бесконечным числом степеней свободы. В статьях [1], [10] рассмотрена более сложная механическая система с нескольким упругими балками, присоединенными к вращающемуся твердому телу. Линейная конечномерная аппроксимация такой модели рассматривается в настоящей статье. Целью работы является построение функции управления, которая переводит линеаризованную систему в любую наперед заданную точку фазового пространства для произвольного (но конечного) числа обобщенных координат, описывающих колебания упругой балки. При этом рассматриваемая система явным образом приводится к стандартной канонической форме управляемой системы (канонической форме Бруновского) [3], [6].

2. Уравнения движения и вспомогательный результат

В статьях [1], [10] рассмотрена плоская механическая система в виде твердого тела с несколькими присоединенными упругими балками. Для случая одной балки и конечного числа мод колебаний, линеаризованные уравнения движения в окрестности положения равновесия системы могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} &\dot{\xi}_0 = \eta_0, \\ &\dot{\eta}_0 = v, \\ &\dot{\xi}_j = \omega_j \eta_j, \\ &\dot{\eta}_j = -\omega_j \xi_j + b_j v, \quad (j = \overline{1,N}), \end{aligned} \tag{2.1}$$

где ξ_0 – угол поворота твердого тела относительно неподвижной оси; η_0 – угловая скорость вращения твердого тела; $v \in \mathbb{R}$ – управление; N – количество учитываемых мод колебаний упругой балки; ξ_j и η_j – координата и скорость для j-й моды колебаний балки при соответствующей нормировке. Коэффициенты системы (2.1) определяются в терминах собственных значений λ_j и функций $u_j(x)$ задачи Штурма-Лиувилля (см. [10], [1]):

$$\frac{d^4}{dx^4} u_j(x) = \lambda_j u_j(x), \; x \in (0,l),$$

$$u_j(0) = u_j'(0) = u_j''(l) = u_j'''(l) = 0,$$

$$\omega_j = c\sqrt{\lambda_j} > 0, \; b_j = -\int_0^l (x+d) u_j(x) dx \neq 0,$$

где l – длина балки, $c = \sqrt{EI/\rho}$ (E – модуль Юнга, I – момент инерции поперечного сечения балки, ρ – масса на единицу длины балки), $d \geq 0$ – расстояние от оси вращения до защемленного конца балки.

Перед доказательством основных результатов сформулируем вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Если все ω_j^2 различны и не равны нулю при $j = \overline{1,N}$, то матрица*

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ -\omega_1^2 & -\omega_2^2 & \dots & -\omega_N^2 \\ \omega_1^4 & \omega_2^4 & \dots & \omega_N^4 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-\omega_1^2)^{N-1} & (-\omega_2^2)^{N-1} & \dots & (-\omega_N^2)^{N-1} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

невырождена,

$$(W^{-1})_{kp} = \prod_{i \neq k} \frac{1}{\omega_i^2 - \omega_k^2} \sum_{(j_1,\dots,j_{N-p}) \in S_{kp}} (\omega_{j_1} \omega_{j_2} \cdots \omega_{j_{N-p}})^2, \tag{2.3}$$

$$S_{kp} = \{(j_1, j_2, ..., j_{N-p}) : 1 \leq j_1 < j_2 < ... < j_{N-p} \leq N, \; j_1, j_2, ..., j_{N-p} \neq k\}.$$

В случае $p = N$ сумма в формуле (2.3) полагается равной единице.

Доказательство. Утверждение леммы следует из известных свойств миноров матрицы Вандермонда (см. [4, с. 26, 32]). □

3. Приведение к стандартной канонической форме

Обозначим

$$x = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \\ \xi_1 \\ \eta_1 \\ \vdots \\ \xi_N \\ \eta_N \end{pmatrix}, \tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{\xi}_0 \\ \tilde{\eta}_0 \\ \tilde{\xi}_1 \\ \tilde{\eta}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\xi}_N \\ \tilde{\eta}_N \end{pmatrix}, \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_N \end{pmatrix}, \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_N \end{pmatrix}, \tilde{\xi} = \begin{pmatrix} \tilde{\xi}_1 \\ \tilde{\xi}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\xi}_N \end{pmatrix}, \tilde{\eta} = \begin{pmatrix} \tilde{\eta}_1 \\ \tilde{\eta}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\eta}_N \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Если $b_j \neq 0$ и все $\omega_j^2 \neq 0$ различны для $j = \overline{1, N}$, то существует невырожденное линейное преобразование*

$$\tilde{x} = \Phi x,\ \tilde{v} = \alpha v + \beta \xi, \quad (|\Phi| \neq 0,\ \alpha \neq 0), \tag{3.1}$$

приводящее систему (2.1) к канонической форме Бруновского:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\xi}}_{j-1} &= \tilde{\eta}_{j-1}, \\ \dot{\tilde{\eta}}_{j-1} &= \tilde{\xi}_j, \qquad (j = \overline{1, N}), \\ \dot{\tilde{\xi}}_N &= \tilde{\eta}_N, \\ \dot{\tilde{\eta}}_N &= \tilde{v}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Компоненты преобразования (3.1) задаются соотношениями

$$\Phi: \ \tilde{\xi}_0 = c_0 \xi_0 + \bar{c}\xi,\ \tilde{\eta}_0 = c_0 \eta_0 + \bar{c}\Omega\eta,\ \tilde{\xi} = -WC\Omega^2\xi,\ \tilde{\eta} = -WC\Omega^3\eta, \tag{3.3}$$

$$\alpha = -c_0 \sum_{j=1}^{N} \prod_{i \neq j} \frac{\omega_i^2 \omega_j^{2N}}{\omega_i^2 - \omega_j^2},\ \beta = (-1)^{N+1} \bar{c}\Omega^{2N+2}, \tag{3.4}$$

где

$$\bar{c} = (c_1, c_2, ..., c_N),\ C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_N \end{pmatrix},\ \Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_N \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

$$c_j = \frac{c_0}{\omega_j b_j} \prod_{i \neq j} \frac{\omega_i^2}{\omega_j^2 - \omega_i^2},\ (j = \overline{1, N}), \tag{3.6}$$

матрица W определена в (2.2), $c_0 \neq 0$ – произвольная константа.

Доказательство. Запишем систему (2.1) в матричном виде:

$$\dot{x} = Ax + bv,$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \omega_N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\omega_N & 0 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ b_1 \\ \vdots \\ 0 \\ b_N \end{pmatrix}.$$

Воспользуемся известной схемой приведения линейной управляемой системы к канонической форме (см. [6], [8, P. 176-177]). Для этого необходимо выбрать вектор

$$h = (c_0, d_0, c_1, d_1, ..., c_N, d_N)$$

так, чтобы выполнялись условия $hb = hAb = hA^2b = ... = hA^{2N}b = 0, \; hA^{2N+1}b = \alpha \neq 0$, т.е.

$$\Phi b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \alpha \end{pmatrix}, \text{ где } \Phi = \begin{pmatrix} h \\ hA \\ \vdots \\ hA^{2N+1} \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Положим $d_0 = d_1 = ... = d_N = 0$ и вычислим матрицу Φ:

$$\Phi = \begin{pmatrix} c_0 & 0 & c_1 & 0 & \dots & c_N & 0 \\ 0 & c_0 & 0 & c_1\omega_1 & \dots & 0 & c_N\omega_N \\ 0 & 0 & -c_1\omega_1^2 & 0 & \dots & -c_N\omega_N^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_1\omega_1^3 & \dots & 0 & -c_N\omega_N^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & (-1)^N c_1\omega_1^{2N} & 0 & \dots & (-1)^N c_N\omega_N^{2N} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^N c_1\omega_1^{2N+1} & \dots & 0 & (-1)^N c_N\omega_N^{2N+1} \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Легко видеть, что $hA^{2j}b = 0$ для всех $j = \overline{0, N}$ при таком выборе коэффициентов d_0, d_1, ..., d_N. Используя четные строки матрицы Φ, приходим к выводу, что условия $hA^{2j+1}b = 0$, $j = \overline{0, N-1}$ эквивалентны следующей системе линейных уравнений относительно c_0, c_1, ..., c_N:

$$W \begin{pmatrix} b_1\omega_1 c_1 \\ b_2\omega_2 c_2 \\ \vdots \\ b_N\omega_N c_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решая эту систему с помощью обратной матрицы (2.3), получим формулу (3.6) для коэффициентов c_1, c_2, ..., c_N, в зависимости от произвольной константы c_0. Покажем, что при любом $c_0 \neq 0$ выполнено оставшееся условие $hA^{2N+1}b \neq 0$ в (3.7):

$$hA^{2N+1}b = (-1)^N \sum_{j=1}^{N} b_j c_j \omega_j^{2N+1} = (-1)^N c_0 \sum_{j=1}^{N} \prod_{i \neq j} \frac{\omega_i^2 \omega_j^{2N}}{\omega_j^2 - \omega_i^2} = -c_0 \sum_{j=1}^{N} \prod_{i \neq j} \frac{\omega_i^2 \omega_j^{2N}}{\omega_i^2 - \omega_j^2}, \tag{3.9}$$

т.е. полученное выражение совпадает с $\alpha \neq 0$ в (3.4).

Определим $\tilde{x} = \Phi x$. Принимая во внимание структуру матрицы (3.8) и обозначения (3.5), приходим к выводу, что компоненты такого отображения $x \mapsto \tilde{x}$ удовлетворяют формулам (3.3). Покажем невырожденность Φ, используя свойства определителей:

$$|\Phi| = c_0^2 \begin{vmatrix} -c_1\omega_1^2 & 0 & \dots & -c_N\omega_N^2 & 0 \\ 0 & -c_1\omega_1^3 & \dots & 0 & -c_N\omega_N^3 \\ c_1\omega_1^4 & 0 & \dots & c_N\omega_N^4 & 0 \\ 0 & c_1\omega_1^5 & \dots & 0 & c_N\omega_N^5 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^N c_1\omega_1^{2N} & 0 & \dots & (-1)^N c_N\omega_N^{2N} & 0 \\ 0 & (-1)^N c_1\omega_1^{2N+1} & \dots & 0 & (-1)^N c_N\omega_N^{2N+1} \end{vmatrix} =$$

$$= (c_0 c_1 \dots c_N)^2 (\omega_1 \omega_2 \dots \omega_N)^5 |W|^2 = (c_0 c_1 \dots c_N)^2 (\omega_1 \omega_2 \dots \omega_N)^5 \prod_{1 \leq i < j \leq N} (\omega_j^2 - \omega_i^2)^2.$$

Итак, $|\Phi| \neq 0$ при выполнении условий теоремы. Вычисляя производные координат вектора $\tilde{x}$ в силу системы (2.1), получим:

$$\dot{\tilde{\xi}}_j = \frac{d}{dt}(hA^{2j}x) = hA^{2j+1}x + hA^{2j}bv = hA^{2j+1}x = \tilde{\eta}_j, \ (j = \overline{0, N}),$$

$$\dot{\tilde{\eta}}_j = \frac{d}{dt}(hA^{2j+1}x) = hA^{2j+2}x + hA^{2j+1}bv = hA^{2j+2}x = \tilde{\xi}_{j+1}, \ (j = \overline{0, N-1}),$$

$$\dot{\tilde{\eta}}_N = \frac{d}{dt}(hA^{2N+1}x) = hA^{2N+2}x + hA^{2N+1}bv. \tag{3.10}$$

Поскольку

$$hA^{2N+2}x = (-1)^{N+1} \sum_{j=1}^{N} c_j \omega_j^{2N+2} \xi_j,$$

то из (3.10) с учетом (3.4) и (3.9) следует $\dot{\tilde{\eta}}_N = \alpha v + \beta \xi = \tilde{v}$. Таким образом, система (2.1) в новых переменных $\tilde{x}$, $\tilde{v}$ имеет вид (3.2). □

Замечание 1. Существование преобразования (3.1) следует из известного результата (см. [5, с. 68]) о приведении линейной системы к стандартной канонической форме при выполнении условия полной управляемости. В доказанной теореме такое преобразование построено явным образом для произвольного числа упругих координат N.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия Теоремы 1. Тогда для любых значений*

$$t_0 < t_1,\ x^0 = \begin{pmatrix} \xi_0^0 \\ \eta_0^0 \\ \vdots \\ \xi_N^0 \\ \eta_N^0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2N+2},\ x^1 = \begin{pmatrix} \xi_0^1 \\ \eta_0^1 \\ \vdots \\ \xi_N^1 \\ \eta_N^1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2N+2}$$

существует управление $v = v_{x^0x^1}(t)$, при котором система (2.1) имеет решение $x(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, удовлетворяющее граничным условиям $x(t_0) = x^0$, $x(t_1) = x^1$. Указанное управление определяется формулой

$$v_{x^0x^1}(t) = \alpha^{-1}\left(\frac{d^{2N+2}}{dt^{2N+2}} + \sum_{p=1}^{N} \gamma_p \frac{d^{2p}}{dt^{2p}}\right) y(t),\ t \in [t_0, t_1], \tag{3.11}$$

где $y \in C^{2N+2}[t_0, t_1]$ – произвольная функция, удовлетворяющая граничным условиям:

$$y(t_i) = \sum_{j=0}^{N} c_j \xi_j^i,\ \dot y(t_i) = c_0\eta_j^0 + \sum_{j=1}^{N} c_j\omega_j\eta_j^i,$$

$$\begin{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2}y \\ \frac{d^4}{dt^4}y \\ \vdots \\ \frac{d^{2N}}{dt^{2N}}y \end{pmatrix}_{t=t_i} = -WC\Omega^2 \begin{pmatrix} \xi_1^i \\ \xi_2^i \\ \vdots \\ \xi_N^i \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \frac{d^3}{dt^3}y \\ \frac{d^5}{dt^5}y \\ \vdots \\ \frac{d^{2N+1}}{dt^{2N+1}}y \end{pmatrix}_{t=t_i} = -WC\Omega^3 \begin{pmatrix} \eta_1^i \\ \eta_2^i \\ \vdots \\ \eta_N^i \end{pmatrix},\ i = 0, 1, \tag{3.12}$$

$$\gamma_p = \sum_{k=1}^{N}\left(\prod_{l\neq k} \frac{\omega_k^{2N}}{\omega_k^2 - \omega_l^2} \sum_{(j_1,\dots,j_{N-p})\in S_{kp}} (\omega_{j_1}\cdots\omega_{j_{N-p}})^2\right). \tag{3.13}$$

В формуле (3.13) сумма по $(j_1, ..., j_{N-p}) \in S_{kp}$ полагается равной единице при $p = N$.

Доказательство. Приведем систему (2.1) к канонической форме (3.2) с помощью преобразования (3.1). Если функция $y(t)$ принадлежит классу $C^{2N+2}[t_0, t_1]$ и удовлетворяет граничным условиям (3.12), то

$$\tilde x(t) = \left(y(t), \frac{d}{dt}y(t), ..., \frac{d^{2N+1}}{dt^{2N+1}}y(t)\right)^T,$$

очевидно, является решением системы (3.2) с управлением

$$\tilde v(t) = \frac{d^{2N+2}}{dt^{2N+2}}y(t).$$

Согласно формулам (3.1) соответствующая вектор-функция $x(t) = \Phi^{-1}\tilde{x}(t)$ удовлетворяет граничным условиям

$$x(t_0) = x^0,\ x(t_1) = x^1$$

и системе (2.1) с управлением

$$v(t) = \alpha^{-1}(\tilde{v}(t) - \beta\xi(t)). \tag{3.14}$$

Учитывая, что $\tilde{\xi} = -WC\Omega^2\xi$ в (3.3), перепишем соотношение (3.14) следующим образом:

$$v(t) = \alpha^{-1}\frac{d^{2N+2}}{dt^{2N+2}}y(t) + \alpha^{-1}\beta\Omega^{-2}C^{-1}W^{-1}\left(\frac{d^2}{dt^2}y(t), \frac{d^4}{dt^4}y(t), ..., \frac{d^{2N}}{dt^{2N}}y(t)\right)^T.$$

Проведя выкладки с использованием Леммы 1, получим формулу (3.11). □

Доказанная теорема сводит поиск управления к определению функции $y(t)$ исходя из $2N + 2$ граничных условий (3.12). В частности, такую функцию $y(t)$ можно искать в виде многочлена. Отметим, что в формулу для управления (3.11) входят только производные четного порядка от $y(t)$.

4. Заключение

Полученные результаты позволяют решать двухточечную задачу управления для системы (2.1) *явным образом* при произвольном количестве упругих координат. Представляет несомненный интерес дальнейшее исследование применимости такого подхода при добавлении к правой части системы (2.1) нелинейных членов, входящих в уравнения [1], [10]. Вопрос о влиянии предложенного управления на высокочастотные моды колебаний балки с номерами выше N также требует дальнейшего анализа в рамках теории систем с распределенными параметрами.

Список цитируемых источников

1. *Зуев А.Л.* Управление системой с упругими компонентами в нерезонансном случае // Український математичний вісник. — 2006. — Т. 3, № 1. — С. 89–103.
2. *Ковалев А.М., Зуев А.Л., Щербак В.Ф.* Синтез стабилизирующего управления твердым телом с присоединенными упругими элементами // Проблемы управления и информатики. — 2002. — № 6, С. 5–16.
3. *Попов В.М.* Решение новой задачи устойчивости регулируемых систем // Автоматика и телемеханика. — 1964. — Т. 25, № 9. – С. 1257-1262.
4. *Проскуряков И.В.* Сборник задач по линейной алгебре. 3-е изд. — М.: Наука, 1967. — 382 с.
5. *Уонэм М.* Линейные многомерные системы управления: Геометрический подход. — М.: Наука, 1980. — 376 с.

6. *Brunovský P.* A classification of linear controllable systems // Kybernetica. — 1970. — Vol. 6. — P. 173–188.
7. *Lagnese J.E., Leugering G.* Controllability of Thin Elastic Beams and Plates // The control handbook / Ed. Levine W.S. — Boca Raton: CRC Press - IEEE Press, 1996. — P. 1139-1156.
8. *Respondek W.* Introduction to Geometric Nonlinear Control; Linearization, Observability, Decoupling // Mathematical Control Theory / Ed. Agrachev A.A. — Trieste: ICTP Lecture Notes, 2002. — P. 169–222.
9. *Rudolph J.* Flatness Based Control of Distributed Parameter Systems. — Aachen: Shaker Verlag, 2003. — 201 p.
10. *Zuyev A.* Partial asymptotic stabilization of nonlinear distributed parameter systems // Automatica. — 2005. — Vol. 41, № 1. — P. 1–10.

Получено 27.11.2006