Динамические системы, вып. 27 (2009), 31–40

УДК 517.4

Рост обобщенных алгебр Темперли-Либа, связанных с графами Кокстера (три проектора)

М.В. Заводовский

Институт математики НАНУ,
Киев 01601, ул. Терещенковская, 3. *E-mail: mzv@imath.kiev.ua*

Аннотация. В данной статье изучается рост обобщенных алгебр Темперли-Либа, связанных с графами Кокстера, порожденных тремя проекторами. Приведена полная классификация обобщенных алгебр Темперли-Либа, связанных с графами Кокстера, порожденных тремя проекторами: конечномерные алгебры, алгебры полиномиального роста и алгебры экспоненциального роста.

Ключевые слова: алгебра, рост алгебры, алгебра Темперли-Либа.

1. Введение

Алгебры Темперли-Либа и их $*$-представления в гильбертовом пространстве изучались в ряде работ [9], [8] [4]–[7], в связи с моделями статистической физики. В [5] были введены обобщенные алгебры Темперли-Либа и среди них выделены конечномерные алгебры, связанные с графами Кокстера: A_n, B_n, D_n, E_n, F_n, H_n и I_n. Этот список графов отличается от списка графов в [1], для которых конечны группы Кокстера, связанные с этими графами.

В работе [2] изучен рост обобщенных алгебр Темперли-Либа, связанных с простыми графами.

В данной статье изучается рост обобщенных алгебр Темперли-Либа, связанных с графами Кокстера $\mathbf{\Gamma}$ (см. п.1), порожденных тремя проекторами. Доказано, что если $\mathbf{\Gamma}$ — связный граф Кокстера и $|V\mathbf{\Gamma}| = 3$, то соответствующая алгебра конечномерна тогда и только тогда, когда граф $\mathbf{\Gamma}$ совпадает с одним из графов A_3, B_3 или H_3; алгебра имеет линейный рост тогда и только тогда, когда граф $\mathbf{\Gamma}$ совпадает с одним из графов $\widetilde{A}_2$, $\widetilde{G}_2$, $\widetilde{I}_2(7)$ или $\widetilde{C}_2$; алгебра имеет экспоненциальный рост тогда и только тогда, когда граф $\mathbf{\Gamma}$ не совпадает ни с одним из графов A_3, B_3, H_3, $\widetilde{A}_2$, $\widetilde{G}_2$, $\widetilde{I}_2(7)$ или $\widetilde{C}_2$.

Отметим, что групповая алгебра группы Кокстера, связанная с графом $\widetilde{C}_2$ бесконечномерна и имеет экспоненциальный рост [1], а обобщенная алгебра Темперли-Либа, связанная с графом $\widetilde{C}_2$ имеет линейный рост. Таким образом и рост бесконечномерной обобщенной алгебры Темперли-Либа, связанной с графом $\mathbf{\Gamma}$, вообще говоря, не совпадает с ростом групповой алгебры группы Кокстера, связанной с $\mathbf{\Gamma}$.

2. Класс алгебр $TL_{\mathbf{\Gamma},\vec{\tau}}$

1. Графом Кокстера $\mathbf{\Gamma}$ называется пара (Γ, f), где Γ — неориентированный граф, а f — отображение множества ребер $E\Gamma$ графа Γ во множество $\{3,4,5,\dots\}\cup\{\infty\}$. Граф Кокстера $\mathbf{\Gamma} = (\Gamma, f)$ можно представлять как граф, в котором каждому ребру $(i,j) \in E\Gamma$ соответствует метка f_{ij}. Все метки имеют значения больше 3. Если некоторому ребру соответствует тройка, то принято не ставить такую метку.

Пусть $\mathbf{\Gamma}$ — связный граф Кокстера и $|V\mathbf{\Gamma}| = 3$. Зададим для каждого ребра $(i,j) \in E\Gamma$ набор чисел $\vec{\tau}_{ij} = (\tau_{ij}^{(1)}, \dots, \tau_{ij}^{(m_{ij})})$, где $m_{ij} = [\frac{f_{ij}}{2}]$, если f_{ij} – нечетное и $m_{ij} = \frac{f_{ij}}{2} - 1$, если f_{ij} – четное. В дальнейшем будем предполагать, что $0 < \tau_{ij}^{(k)} < 1$ для всех i, j, k. Положим $\vec{\tau} = \cup_{(i,j)\in E\Gamma}\vec{\tau}_{ij}$. Рассмотрим обобщенную алгебру Темперли-Либа $TL_{\mathbf{\Gamma},\vec{\tau}}$, ассоциированную с графом $\mathbf{\Gamma}$ $TL_{\mathbf{\Gamma},\vec{\tau}} = \mathbb{C}\Big\langle p_1, p_2, p_3 \mid p_k^2 = p_k^* = p_k,\ F_{ij}(\vec{\tau}) = 0,\ F_{ij}^*(\vec{\tau}) = 0,\ (i,j) \in E\mathbf{\Gamma},\ p_ip_j = p_jp_i,\ (i,j) \notin E\mathbf{\Gamma}\Big\rangle$, где

$$F_{ij}(\vec{\tau}) = \begin{cases} \prod_{s=1}^{[\frac{f_{ij}}{2}]}(p_ip_jp_i - \tau_{ij}^{(s)}p_i), & \text{при } f_{ij} = 2k-1 \\ \prod_{s=1}^{\frac{f_{ij}}{2}-1}(p_ip_jp_i - \tau_{ij}^{(s)}p_i)p_j, & \text{при } f_{ij} = 2k \end{cases}$$

2. Так как алгебры $TL_{\mathbf{\Gamma},\vec{\tau}}$ конечнозаданы, то в зависимости от $\mathbf{\Gamma}$ и, вообще говоря, от $\vec{\tau}$ они либо конечномерны, либо имеют полиномиальный рост, либо экспоненциальный рост (более подробно о понятии роста алгебры см., например, [3]).

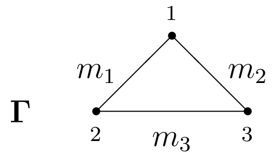
Предложение 1. *Пусть $\mathbf{\Gamma}$ — граф Кокстера ($|V\mathbf{\Gamma}| = 3$), $TL_{\mathbf{\Gamma},\vec{\tau}}$ — алгебра Темперли-Либа, связанная с $\mathbf{\Gamma}$. Тогда размерность или рост $TL_{\mathbf{\Gamma},\vec{\tau}}$ не зависят от $\vec{\tau}$.*

Доказательство. Пусть $TL_{\mathbf{\Gamma},\vec{\tau}}$ — алгебра Темперли-Либа, связанная с графом $\mathbf{\Gamma}$ ($|V\mathbf{\Gamma}| = 3$). Для доказательства утверждения достаточно показать, что старшие слова базиса Гребнера алгебры $TL_{\mathbf{\Gamma},\vec{\tau}}$ не зависят от $\vec{\tau}$. Напомним, базис Грёбнера некоторого идеала I алгебры многочленов $K[x_1,\dots,x_n]$ относительно порядка $\prec$ на мономах — это конечное множество G многочленов из $K[x_1,\dots,x_n]$, такое что старший (относительно $\prec$) член каждого многочлена из I делится на старший член хотя бы одного многочлена из G.

Заметим, что

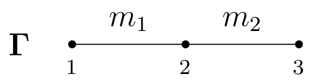
$$F_{ij}(\vec{\tau}) = \begin{cases} (p_ip_j)^{[\frac{f_{ij}}{2}]}p_i - \sum_{s=1}^{[\frac{f_{ij}}{2}]}\tau_{ij}^{(s)}(p_ip_j)^{[\frac{f_{ij}}{2}]-1-s}p_i = 0, & \text{при } f_{ij} = 2k-1 \\ (p_ip_j)^{\frac{f_{ij}}{2}} - \sum_{s=1}^{\frac{f_{ij}}{2}-1}\tau_{ij}^{(s)}(p_ip_j)^{\frac{f_{ij}}{2}-s}, & \text{при } f_{ij} = 2k \end{cases}$$

Рассмотрим алгебру $TL_{\mathbf{\Gamma},\vec{\tau}}$



Базис Гребнера состоит из следующих элементов: $p_k^2 - p_k$ $(k = 1, 2, 3)$, $F_{ij}(\vec{\tau})$, $F^*_{ij}(\vec{\tau})$ $((i,j) \in E\mathbf{\Gamma})$ и $p_ip_j - p_jp_i$ $((i,j) \notin E\mathbf{\Gamma})$. Старшие слова базиса Гребнера не зависят от $\vec{\tau}$. Следовательно, размерность или рост алгебры $TL_{\mathbf{\Gamma},\vec{\tau}}$ не зависят от $\vec{\tau}$.

Рассмотрим теперь алгебру $TL_{\mathbf{\Gamma},\vec{\tau}}$



Базис Гребнера для $TL_{\mathbf{\Gamma},\vec{\tau}}$ состоит из:

1) элементы, соответствующие определяющим соотношениям алгебры

2) если m_1 — четное, то $p_1p_3p_2((p_1p_2)^{\frac{m_1}{2}-1} - \sum_{k=1}^{\frac{m_1}{2}-1} \tau_k(p_1p_2)^{\frac{m_1}{2}-1-k})$

если m_1 — нечетное,то $p_1p_3((p_2p_1)^{[\frac{m_1}{2}]} - \sum_{k=1}^{[\frac{m_1}{2}]} \tau_k(p_2p_1)^{[\frac{m_1}{2}]-k})$

3) если m_2 — четное, то $p_1p_3p_2((p_1p_2)^{\frac{m_2}{2}-1} - \sum_{k=1}^{\frac{m_2}{2}-1} \tau_k(p_1p_2)^{\frac{m_2}{2}-1-k})$

если m_2 — нечетное,то $p_1p_3((p_2p_1)^{[\frac{m_2}{2}]} - \sum_{k=1}^{[\frac{m_2}{2}]} \tau_k(p_2p_1)^{[\frac{m_2}{2}]-k})$

Старшие слова базиса не зависят от $\vec{\tau}$. Так как линейный базис сосотоит из всевозможных слов, которые не содержат в качестве подслов старшие слова базиса Гребнера, то размерность или рост самой алгебры $TL_{\mathbf{\Gamma},\vec{\tau}}$ не зависят от $\vec{\tau}$.

□

3. Пусть $\mathbf{\Gamma_1} = (V\mathbf{\Gamma_1}, E\mathbf{\Gamma_1})$ — граф Кокстера. Построим новый граф Кокстера $\mathbf{\Gamma_2}$ следующим образом. Множества вершин графов совпадают $V\mathbf{\Gamma_1} = V\mathbf{\Gamma_2}$. Множества ребер также совпадают, только отличаются на каком-то фиксированном ребре меткой: зафиксируем ребро $(i,j) \in E\mathbf{\Gamma_1}$, которому соответствует метка $m_{ij}^{(1)}$ в графе $\mathbf{\Gamma_1}$, тогда в графе $\mathbf{\Gamma_2}$ этому ребру будет соответствовать метка $m_{ij}^{(2)} > m_{ij}^{(1)}$. Будем говорить, что граф $\mathbf{\Gamma_2}$ получен из графа $\mathbf{\Gamma_1}$ увеличением значения метки на ребре (i,j). С графами Кокстера $\mathbf{\Gamma_1}$ и $\mathbf{\Gamma_2}$ свяжем алгебры $TL_{\mathbf{\Gamma_1},\vec{\tau}_1}$ и $TL_{\mathbf{\Gamma_2},\vec{\tau}_2}$.

Лемма 1. *Пусть $\mathbf{\Gamma_1}$ и $\mathbf{\Gamma_2}$ — графы Кокстера, $TL_{\mathbf{\Gamma_1},\vec{\tau}_1}$ и $TL_{\mathbf{\Gamma_2},\vec{\tau}_2}$ — связанные с ними обобщенные алгебры Темперли-Либа. Пусть граф $\mathbf{\Gamma_2}$ получен из графа $\mathbf{\Gamma_1}$ увеличением метки на некотором ребре. Тогда размерность или рост алгебры $TL_{\mathbf{\Gamma_1},\vec{\tau}_1}$ не больше размерности или роста алгебры $TL_{\mathbf{\Gamma_2},\vec{\tau}_2}$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{\Gamma_1}$ и $\mathbf{\Gamma_2}$ — графы Кокстера, $TL_{\mathbf{\Gamma_1},\vec{\tau}_1}$ и $TL_{\mathbf{\Gamma_2},\vec{\tau}_2}$ — связанные с ними обобщенные алгебры Темперли-Либа. Пусть граф $\mathbf{\Gamma_2}$ получен из графа $\mathbf{\Gamma_1}$ увеличением метки на некотором ребре $(i,j) \in E\mathbf{\Gamma_1}$. Пусть в графе $\mathbf{\Gamma_2}$ ребру $(i,j) \in E\mathbf{\Gamma_2}$ соответствует метка $m_{ij}^{(2)}$, причем $m_{ij}^{(2)} > m_{ij}^{(1)}$. Покажем, что базис алгебры $TL_{\mathbf{\Gamma_1},\vec{\tau}_1}$ содержится в базисе алгебры $TL_{\mathbf{\Gamma_2},\vec{\tau}_2}$.

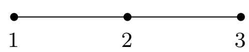
Достаточно доказать лемму при $m_{ij}^{(2)} = m_{ij}^{(1)} + 1$. Предположим, что $m_{ij}^{(2)}$ четное (если $m_{ij}^{(2)}$ — нечетное, то доказательство аналогично). Заметим, что элемент $(p_i p_j)^{\frac{m_{ij}^{(1)}}{2}}$ будет базисным элементов в алгебре $TL_{\mathbf{\Gamma_2},\vec{\tau}_2}$. Но он не будет базисным для алгебры $TL_{\mathbf{\Gamma_2},\vec{\tau}_1}$. Тогда базис алгебры $TL_{\mathbf{\Gamma_2},\vec{\tau}_2}$ содержит в себе базис $TL_{\mathbf{\Gamma_1},\vec{\tau}_1}$. $\square$

3. Конечномерные алгебры $TL_{\mathbf{\Gamma},\vec{\tau}}$

Для конечномерных обобщенных алгебр Темперли-Либа, связанных с графами A_3, B_3 и H_3, мы построим базисы Гребнера, линейные базисы и приведем значения размерностей.

3.1. $TL_{A_3,\tau}$

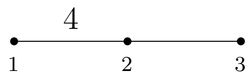
Рассмотрим алгебру $TL_{A_3,\tau} = \mathbb{C}\Big\langle p_1, p_2, p_3 \mid p_k^2 = p_k,\ p_1p_2p_1 = \tau p_1,\ p_2p_1p_2 = \tau p_2,\ p_2p_3p_2 = \tau p_2,\ p_3p_2p_3 = \tau p_3,\ p_1p_3 = p_3p_1 \Big\rangle$, ассоциированную с графом Дынкина A_3

A_3 

Базис Гребнера для $TL_{A_3,\tau}$ состоит из элементов $\{p_1^2 - p_1, p_2^2 - p_2, p_3^2 - p_3, p_1p_2p_1 - \tau p_1, p_2p_1p_2 - \tau p_2, p_2p_3p_2 - \tau p_2, p_3p_2p_3 - \tau p_3, p_3p_1 - p_1p_3, p_3p_2p_1p_3 - \tau p_1p_3, p_1p_3p_2p_1 - \tau p_1p_3\}$. Тогда линейный базис состоит из элементов $\{e, p_1, p_2, p_3, p_1p_2, p_1p_3, p_2p_1, p_2p_3, p_3p_2, p_1p_2p_3, p_1p_3p_2, p_2p_1p_3, p_3p_2p_1, p_2p_1p_3p_2\}$. Таким образом, $\dim TL_{A_3,\tau} = 14$.

3.2. TL_{B_3,τ_1,τ_2}

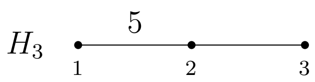
Рассмотрим алгебру $TL_{B_3,\tau_1,\tau_2} = \mathbb{C}\Big\langle p_1, p_2, p_3 \mid p_k^2 = p_k,\ p_1p_2p_1p_2 = \tau_1 p_1p_2,\ p_2p_1p_2p_1 = \tau_1 p_2p_1,\ p_2p_3p_2 = \tau_2 p_2,\ p_3p_2p_3 = \tau_2 p_3,\ p_1p_3 = p_3p_1 \Big\rangle$, ассоциированную с графом B_3

B_3 

Базис Гребнера состоит из элементов $\{p_1^2 - p_1, p_2^2 - p_2, p_3^2 - p_3, p_1p_2p_1p_2 - \tau_1 p_1p_2, p_2p_1p_2p_1 - \tau_1 p_2p_1, p_2p_3p_2 - \tau_2 p_2, p_3p_2p_3 - \tau_2 p_3, p_3p_1 - p_1p_3, p_3p_2p_1p_3 - \tau_2 p_1p_3, p_1p_3p_2p_1p_2 - \tau_1 p_1p_3p_2\}$. Тогда линейный базис состоит из элементов $\{e, p_1, p_2, p_3, p_1p_2, p_1p_3, p_2p_1, p_2p_3, p_3p_2, p_1p_2p_1, p_1p_2p_3, p_1p_3p_2, p_2p_1p_2, p_2p_1p_3, p_3p_2p_1, p_1p_2p_1p_3, p_1p_3p_2p_1, p_2p_1p_2p_3, p_2p_1p_3p_2, p_3p_2p_1p_2, p_1p_2p_1p_3p_2, p_2p_1p_3p_2p_1, p_3p_2p_1p_2p_3, p_1p_2p_1p_3p_2p_1\}$. Таким образом, $\dim TL_{B_3,\tau_1,\tau_2} = 24$.

3.3. $TL_{H_3,\tau_1,\tau_2,\tau_3}$

Рассмотрим алгебру $TL_{H_3,\tau_1,\tau_2,\tau_3} = \mathbb{C}\Big\langle p_1, p_2, p_3 \mid p_k^2 = p_k,\ p_1p_2p_1p_2p_1 = \tau_1 p_1p_2p_1 + \tau_2 p_1,\ p_2p_1p_2p_1p_2 = \tau_1 p_2p_1p_2 + \tau_2 p_2,\ p_2p_3p_2 = \tau_3 p_2,\ p_3p_2p_3 = \tau_3 p_3,\ p_1p_3 = p_3p_1\Big\rangle$, ассоциированную с графом H_3



Базис Гребнера состоит из элементов $\{p_1^2 - p_1,\ p_2^2 - p_2,\ p_3^2 - p_3,\ p_1p_2p_1p_2p_1 - \tau_1p_1p_2p_1 - \tau_2p_1,\ p_2p_1p_2p_1p_2 - \tau_1p_2p_1p_2 - \tau_2p_2,\ p_2p_3p_2 - \tau_3p_2,\ p_3p_2p_3 - \tau_3p_3,\ p_3p_1 - p_1p_3,\ p_3p_2p_1p_3 - \tau_3p_1p_3,\ p_1p_3p_2p_1p_2p_1 - \tau_1p_1p_3p_2p_1 - \tau_2p_1p_3\}$. Тогда линейный базис состоит из элементов $\{e,\ p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_1p_2,\ p_1p_3,\ p_2p_1,\ p_2p_3,\ p_3p_2,\ p_1p_2p_1,\ p_1p_2p_3,\ p_1p_3p_2,\ p_2p_1p_2,\ p_2p_1p_3,\ p_3p_2p_1,\ p_1p_2p_1p_2,\ p_1p_2p_1p_3,\ p_1p_3p_2p_1,\ p_2p_1p_2p_1,\ p_2p_1p_2p_3,\ p_2p_1p_3p_2,\ p_3p_2p_1p_2,\ p_1p_2p_1p_2p_3,\ p_1p_2p_1p_3p_2,\ p_1p_3p_2p_1p_2,\ p_2p_1p_2p_1p_3,\ p_2p_1p_3p_2p_1,\ p_3p_2p_1p_2p_1,\ p_3p_2p_1p_2p_3,\ p_1p_2p_1p_3p_2p_1,\ p_1p_3p_2p_1p_2p_3,\ p_2p_1p_2p_1p_3p_2,\ p_2p_1p_3p_2p_1p_2,\ p_3p_2p_1p_2p_1p_3,\ p_1p_2p_1p_3p_2p_1p_2,\ p_2p_1p_2p_1p_3p_2p_1,\ p_2p_1p_3p_2p_1p_2p_3,\ p_3p_2p_1p_2p_1p_3p_2,\ p_1p_2p_1p_3p_2p_1p_2p_3,\ p_2p_1p_2p_1p_3p_2p_1p_2,\ p_3p_2p_1p_2p_1p_3p_2p_1,\ p_2p_1p_2p_1p_3p_2p_1p_2p_3,\ p_3p_2p_1p_2p_1p_3p_2p_1p_2,\ p_3p_2p_1p_2p_1p_3p_2p_1p_2p_3\}$. Таким образом, $\dim TL_{H_3,\tau_1,\tau_2,\tau_3} = 44$.

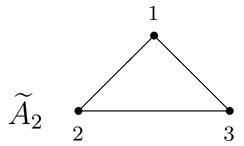
4. Алгебры $TL_{\mathbf{\Gamma},\vec{\tau}}$ полиномиального роста

Если задан конечный базис Гребнера, то вычисление роста алгебры сводится к вычислению роста специально ориентированного графа (см. [3]). Вершинами графа роста алгебры являются все нормальные слова длины меньшей на единицу, чем максимальная длина старшего слова элементов в базисе Гребнера. Ребро от слова u к слову v существует, если и только если для некоторых образующих x_i и x_j (возможно совпадающих) слова ux_i и x_jv равны и являются нормальными.

Для обобщенных алгебр Темперли-Либа, связанных с графами $\widetilde{A}_2$, $\widetilde{G}_2$, $\widetilde{I}_2(7)$ и $\widetilde{C}_2$, мы построим базисы Гребнера, построим графы роста и покажем, что эти алгебры имеют линейный рост.

4.1. $TL_{\widetilde{A}_2,\tau}$

Рассмотрим алгебру $TL_{\widetilde{A}_2,\tau} = \mathbb{C}\Big\langle p_1, p_2, p_3 \mid p_k^2 = p_k,\ p_1p_2p_1 = \tau p_1,\ p_2p_1p_2 = \tau p_2,\ p_2p_3p_2 = \tau p_2,\ p_3p_2p_3 = \tau p_3,\ p_1p_3p_1 = \tau p_1,\ p_3p_1p_3 = \tau p_3\Big\rangle$, ассоциированную с графом $\widetilde{A}_2$



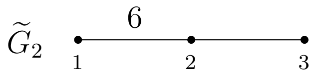
Базис Гребнера для $TL_{\widetilde{A}_2,\tau}$ состоит из элементов $\{p_1^2 - p_1,\ p_2^2 - p_2,\ p_3^2 - p_3,$ $p_1p_2p_1 - \tau p_1,\ p_2p_1p_2 - \tau p_2,\ p_2p_3p_2 - \tau p_2,\ p_3p_2p_3 - \tau p_3,\ p_1p_3p_1 - \tau p_1,\ p_3p_1p_3 - \tau p_3\}$, а граф роста имеет вид

$$\begin{tikzcd}
 & p_1p_2 \arrow[dl] & \\
p_2p_3 \arrow[rr] & & p_3p_1 \arrow[ul]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & p_3p_2 \arrow[dl] & \\
p_2p_1 \arrow[rr] & & p_1p_3 \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Тогда алгебра $TL_{\widetilde{A}_2,\tau}$ бесконечномерна и имеет линейный рост.

4.2. $TL_{\widetilde{G}_2,\tau_1,\tau_2,\tau_3}$

Рассмотрим алгебру $TL_{\widetilde{G}_2,\tau_1,\tau_2,\tau_3} = \mathbb{C}\Big\langle p_1,p_2,p_3 \mid p_k^2 = p_k,\ p_1p_2p_1p_2p_1p_2 = \tau_1p_1p_2p_1p_2 + \tau_2p_1p_2,\ p_2p_1p_2p_1p_2p_1 = \tau_1p_2p_1p_2p_1 + \tau_2p_2p_1,\ p_2p_3p_2 = \tau_3p_2,\ p_3p_2p_3 = \tau_3p_3,\ p_1p_3 = p_3p_1\Big\rangle$, ассоциированную с графом $\widetilde{G}_2$



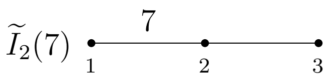
Базис Гребнера для $TL_{\widetilde{G}_2,\tau_1,\tau_2,\tau_3}$ состоит из элементов $\{p_1^2 - p_1,\ p_2^2 - p_2,\ p_3^2 - p_3,$ $p_1p_2p_1p_2p_1p_2 - \tau_1p_1p_2p_1p_2 - \tau_2p_1p_2,\ p_2p_1p_2p_1p_2p_1 - \tau_1p_2p_1p_2p_1 - \tau_2p_2p_1,\ p_2p_3p_2 - \tau_3p_2,$ $p_3p_2p_3 - \tau_3p_3,\ p_3p_1 - p_1p_3,\ p_3p_2p_1p_3 - \tau_3p_1p_3\ p_1p_3p_2p_1p_2p_1p_2 - \tau_2p_1p_3p_2p_1p_2 - \tau_2p_1p_3p_2,$ а граф роста имеет вид

$$\begin{tikzcd}
 & & p_1p_2p_1p_3p_2p_1 \arrow[dr] & & \\
p_1p_2p_1p_2p_1p_3 \arrow[r] & p_2p_1p_2p_1p_3p_2 \arrow[ur] & & p_2p_1p_3p_2p_1p_2 \arrow[r] \arrow[d] & p_1p_3p_2p_1p_2p_3 \\
 & p_3p_2p_1p_2p_1p_3 \arrow[u] & & p_1p_3p_2p_1p_2p_1 \arrow[ll] & \\
 & p_2p_1p_2p_1p_2p_3 & & p_3p_2p_1p_2p_1p_2 \arrow[ll] &
\end{tikzcd}$$

Тогда алгебра $TL_{\widetilde{G}_2,\tau_1,\tau_2,\tau_3}$ бесконечномерна и имеет линейный рост.

4.3. $TL_{\widetilde{I}_2(7),\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4}$

Рассмотрим алгебру $TL_{I_3(7),\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4} = \mathbb{C}\Big\langle p_1,p_2,p_3 \mid p_k^2 = p_k,\ p_1p_2p_1p_2p_1p_2p_1 = \tau_1p_1p_2p_1p_2p_1+\tau_2p_1p_2p_1+\tau_3p_1,\ p_2p_1p_2p_1p_2p_1p_2 = \tau_1p_2p_1p_2p_1p_2+\tau_2p_2p_1p_2+\tau_3p_2,\ p_2p_3p_2 = \tau_4p_2,\ p_3p_2p_3 = \tau_4p_3,\ p_1p_3 = p_3p_1\Big\rangle$, ассоциированную с графом $I_3(7)$



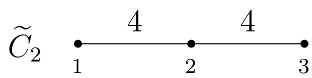
Базис Гребнера для $TL_{\widetilde{I}_2(7),\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4}$ состоит из элементов $\{p_1^2-p_1,\ p_2^2-p_2,\ p_3^2-p_3,\ p_1p_2p_1p_2p_1p_2p_1-\tau_1p_1p_2p_1p_2p_1-\tau_2p_1p_2p_1-\tau_3p_1,\ p_2p_1p_2p_1p_2p_1p_2-\tau_1p_2p_1p_2p_1p_2-\tau_2p_2p_1p_2-\tau_3p_2,\ p_2p_3p_2-\tau_4p_2,\ p_3p_2p_3-\tau_4p_3,\ p_3p_1-p_1p_3,\ p_3p_2p_1p_3-\tau_3p_1p_3,\ p_1p_3p_2p_1p_2p_1p_2p_1-\tau_1p_1p_3p_2p_1p_2p_1-\tau_2p_1p_3p_2p_1-\tau_3p_1p_3\}$, а граф роста имеет вид

$$\begin{tikzcd}
 & & p_1p_2p_1p_3p_2p_1p_2 \arrow[r] \arrow[dr] & p_2p_1p_3p_2p_1p_2p_3 & \\
p_1p_2p_1p_2p_1p_3p_2 \arrow[r] & p_2p_1p_2p_1p_3p_2p_1 \arrow[ur] & & p_2p_1p_3p_2p_1p_2p_1 \arrow[r] \arrow[d] & p_1p_3p_2p_1p_2p_1p_2 \arrow[d] \\
p_2p_1p_2p_1p_2p_1p_3 \arrow[u] & p_3p_2p_1p_2p_1p_3p_2 \arrow[u] & & p_1p_3p_2p_1p_2p_1p_3 \arrow[ll] & p_3p_2p_1p_2p_1p_2p_3 \\
p_3p_2p_1p_2p_1p_2p_1 \arrow[u] & p_1p_2p_1p_2p_1p_2p_3 & & &
\end{tikzcd}$$

Тогда алгебра $TL_{\widetilde{I}_2(7),\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4}$ бесконечномерна и имеет линейный рост. Отметим, что групповая алгебра группы Кокстера, связанная с графом $\widetilde{C}_2$ бесконечномерна и имеет экспоненциальный рост [1], а обобщенная алгебра Темперли-Либа, связанная с графом $\widetilde{C}_2$, имеет линейный рост. Таким образом и рост бесконечномерной обобщенной алгебры Темперли-Либа, связанной с графом $\mathbf{\Gamma}$, вообще говоря, не совпадает с ростом групповой алгебры группы Кокстера, связанной с $\mathbf{\Gamma}$.

4.4. $TL_{\widetilde{C}_2,\tau_1,\tau_2}$

Рассмотрим алгебру $TL_{\widetilde{C}_2,\tau_1,\tau_2} = \mathbb{C}\Big\langle p_1,p_2,p_3 \mid p_k^2 = p_k,\ p_1p_2p_1p_2 = \tau_1p_1p_2,\ p_2p_1p_2p_1 = \tau_1p_2p_1,\ p_2p_3p_2p_3 = \tau_2p_2p_3,\ p_3p_2p_3p_2 = \tau_2p_3p_2,\ p_1p_3 = p_3p_1\Big\rangle$, ассоциированную с графом $\widetilde{C}_2$



Базис Гребнера для $TL_{\widetilde{C}_2,\tau_1,\tau_2}$ состоит из элементов $\{p_1^2 - p_1,\ p_2^2 - p_2,\ p_3^2 - p_3,$ $p_1p_2p_1p_2 - \tau_1p_1p_2,\ p_2p_1p_2p_1 - \tau_1p_2p_1,\ p_2p_3p_2p_3 - \tau_2p_2p_3,\ p_3p_2p_3p_2 - \tau_2p_3p_2,\ p_3p_1 - p_1p_3,$ $p_2p_3p_2p_1p_3 - \tau_2p_2p_1p_3,\ p_1p_3p_2p_1p_3 - \tau_1p_1p_3p_2\}$, а граф роста имеет вид

$$\begin{tikzcd}
p_1p_2p_1p_3 \arrow[rr] & & p_2p_1p_3p_2 \arrow[rr] \arrow[dl] & & p_1p_3p_2p_3 & & p_2p_1p_2p_3 \arrow[ll] \arrow[dl] & & p_3p_2p_1p_2 \arrow[ll] \\
& p_1p_3p_2p_1 \arrow[rr] & & p_3p_2p_1p_3 \arrow[ul] & & p_1p_2p_3p_2 \arrow[rr] & & p_2p_3p_2p_1 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

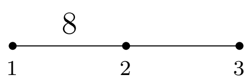
Тогда алгебра $TL_{\widetilde{C}_2,\tau_1,\tau_2}$ бесконечномерна и имеет линейный рост.

5. Алгебры $TL_{\mathbf{\Gamma},\vec{\tau}}$ экспоненциального роста

Ниже для некоторых обобщенных алгебр Темперли-Либа укажем свободные подалгебры, порожденные двумя образующими, все эти алгебры экспоненциального роста.

5.1. $TL_{\widetilde{I}_2(8),\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4}$

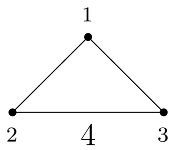
Рассмотрим алгебру $TL_{\widetilde{I}_2(8),\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4} = \mathbb{C}\Big\langle p_1,p_2,p_3 \mid p_k^2 = p_k,\ p_1p_2p_1p_2p_1p_2p_1p_2 = \tau_1p_1p_2p_1p_2p_1p_2 + \tau_2p_1p_2p_1p_2 + \tau_3p_1p_2,\ p_2p_1p_2p_1p_2p_1p_2p_1 = \tau_1p_2p_1p_2p_1p_2p_1 + \tau_2p_2p_1p_2p_1 + \tau_3p_2p_1,\ p_2p_3p_2 = \tau_4p_2,\ p_3p_2p_3 = \tau_4p_3,\ p_1p_3 = p_3p_1\Big\rangle$, ассоциированную с графом $I_3(8)$

$\widetilde{I}_2(8)$ 

Алгебра $TL_{\widetilde{I}_2(8),\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4}$ имеет экспоненциальный рост, так как её подалгебра порожденная двумя образующими $q_1 = p_1p_2p_1p_2p_1p_3p_2$ и $q_2 = p_1p_2p_1p_3p_2$ свободна (во всевозможных комбинациях элементов q_1 и q_2 не содержится ни одного старшего подслова элементов базиса Гребнера алгебры $TL_{\widetilde{I}_2(8),\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4}$).

5.2.

Рассмотрим алгебру $TL_{\mathbf{\Gamma},\tau_1,\tau_2} = \mathbb{C}\Big\langle p_1,p_2,p_3 \mid p_k^2 = p_k,\ p_1p_2p_1 = \tau_1p_1,\ p_2p_1p_2 = \tau_1p_2,\ p_1p_3p_1 = \tau_1p_1,\ p_3p_1p_3 = \tau_1p_3,\ p_2p_3p_2p_3 = \tau_2p_2p_3,\ p_3p_2p_3p_2 = \tau_2p_3p_2\Big\rangle$, ассоциированную с графом $\mathbf{\Gamma}$

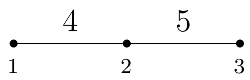
$\mathbf{\Gamma}$ 

Соответствующая алгебра $TL_{\mathbf{\Gamma},\tau_1,\tau_2}$ имеет экспоненциальный рост, так как её подалгебра порожденная двумя образующими $q_1 = p_1p_2p_3p_2p_1p_3p_2p_3$ и $q_2 = p_1p_2p_3$

свободна (во всевозможных комбинациях элементов q_1 и q_2 не содержится ни одного старшего подслова элементов базиса Гребнера алгебры $TL_{\mathbf{\Gamma},\tau_1,\tau_2}$).

5.3.

Рассмотрим алгебру $TL_{\mathbf{\Gamma},\tau_1,\tau_2,\tau_3} = \mathbb{C}\Big\langle p_1, p_2, p_3 \mid p_k^2 = p_k,\ p_1p_2p_1p_2 = \tau_1p_1p_2,\ p_2p_1p_2p_1 = \tau_1p_2p_1,\ p_2p_3p_2p_3p_2 = \tau_2p_2p_3p_2 + \tau_3p_2,\ p_3p_2p_3p_2p_3 = \tau_2p_3p_2p_3 + \tau_3p_3,\ p_1p_3 = p_3p_1\Big\rangle$, ассоциированную с графом $\mathbf{\Gamma}$

$\mathbf{\Gamma}$ 

Соответствующая алгебра $TL_{\mathbf{\Gamma},\tau_1,\tau_2,\tau_3}$ имеет экспоненциальный рост, так как её подалгебра порожденная двумя образующими $q_1 = p_1p_3p_2$ и $q_2 = p_1p_3p_2p_3p_2p_1p_2p_3p_2$ свободна (во всевозможных комбинациях элементов q_1 и q_2 не содержится ни одного старшего подслова элементов базиса Гребнера алгебры $TL_{\mathbf{\Gamma},\tau_1,\tau_2,\tau_3}$).

6. Основная теорема

Из рассмотренных выше примеров следует теорема о росте обобщенных алгебр Темперли-Либа, ассоциированных с графами Кокстера $\mathbf{\Gamma}$, когда $|V\mathbf{\Gamma}| = 3$.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{\Gamma}$ *— связный граф Кокстера,* $|V\mathbf{\Gamma}| = 3$.

1. *Алгебра* $TL_{\mathbf{\Gamma},\vec{\tau}}$ *конечномерна тогда и только тогда, когда граф* $\mathbf{\Gamma}$ *совпадает с одним из графов* A_3, B_3 *или* H_3;

2. *Алгебра* $TL_{\mathbf{\Gamma},\vec{\tau}}$ *имеет линейный рост тогда и только тогда, когда граф* $\mathbf{\Gamma}$ *совпадает с одним из графов* $\widetilde{A}_2$, $\widetilde{G}_2$, $\widetilde{I}_2(7)$ *или* $\widetilde{C}_2$;

3. *Алгебра* $TL_{\mathbf{\Gamma},\vec{\tau}}$ *имеет экспоненциальный рост тогда и только тогда, когда граф* $\mathbf{\Gamma}$ *не совпадает ни с одним из графов* A_3, B_3, H_3, $\widetilde{A}_2$, $\widetilde{G}_2$, $\widetilde{I}_2(7)$ *или* $\widetilde{C}_2$.

Доказательство. Из рассмотренных выше примеров ясно, что алгебра Темперли-Либа $TL_{\mathbf{\Gamma},\vec{\tau}}$ конечномерна только в трех случаях, если $\mathbf{\Gamma}$ совпадает с одним из графов A_3, B_3 или H_3.

При увеличении меток на ребрах $\mathbf{\Gamma}$ также возможны только четыре случая, когда алгебра $TL_{\mathbf{\Gamma},\vec{\tau}}$ бесконечномерна и имеет полиномиальный рост, когда граф $\mathbf{\Gamma}$ совпадает с одним из графов $\widetilde{A}_2$, $\widetilde{G}_2$, $\widetilde{I}_2(7)$ или $\widetilde{C}_2$.

Используя лемму 1 получаем, что алгебра $TL_{\mathbf{\Gamma},\vec{\tau}}$ имеет экспоненциальный рост тогда и только тогда, когда граф $\mathbf{\Gamma}$ не совпадает ни с одним из графов A_3, B_3, H_3, $\widetilde{A}_2$, $\widetilde{G}_2$, $\widetilde{I}_2(7)$ или $\widetilde{C}_2$. $\square$

Список цитируемых источников

1. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. Часть 2. Группы Кокстера и системы Титса. Группы, порожденные отражениями. Системы корней. — Москва: Мир, 1972. — 334 с.
2. *Заводовский М.В., Самойленко Ю.С.* Рост обобщенных алгебр Темперли-Либа, сязанных с простыми графами // Укр. Мат. Журн. — 2009. — т. 61, № 11. — с. 1579–1584.
3. *Уфнаровский В.А.* Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления — 1990. — Т. 57, С. 5–177.
4. *Fan C.K.* Structure of a Hecke algebra quotient // Journ. of the AMS — 1997. — Vol. 10, № 1. — P. 139–167.
5. *Graham J.J.* Modular representations of Hecke algebras and related algebras. — Sydney, 1995. — (Ph.D. thesis, University of Sydney).
6. *Green R.M.* Cellular Algebras arising from Hecke Algebras of type H_n // Mathematische Zeitschrift — 1998. — Vol. 229, P. 365–383.
7. *Green R.M.* Generalized Temperley-Lieb Algebras and Decorated Tangles // Journal of Knot Theory and its Ramifications — 1998. — Vol. 7, P. 155–171.
8. *Jones V.F.* Index for subfactor // Invent Math. — 1983. — Vol.72. C. 1–15.
9. *Temperley H.N.V., Lieb E.H.* Relations between 'percolations' and 'colouring' problems and other graph theoretical problems associated with regular planar lattices: some exact results for the percolation problem // J. Proc. Roy. Soc. London — 1971. — Vol. 322, Ser. A. — P. 251–280.

Получена 30.08.2009