

УДК 517.983

## Формулы следов для квантовых графов с нелокальными граничными условиями

А. Н. Кандагура, И. И. Карпенко

Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского,  
Симферополь 95007. E-mail: kandagura@ya.ru, i\_karpenko@ukr.net

**Аннотация.** В настоящей работе исследуются различные семейства квантовых графов с циклом и нелокальными граничными условиями. Дифференциальный оператор, определенный на метрическом графе, представлен оператором Лапласа. Для описания спектра самосопряженного квантового графа применяется метод граничных троек, предполагающий конструкцию симметрического сужения, построения граничной тройки для сопряженного оператора и соответствующей ей функции Вейля–Титчмарша. Для каждого семейства квантовых графов решена прямая спектральная задача: получены необходимые условия для граничных параметров изоспектральных квантовых графов (формулы следов).

**Ключевые слова:** квантовый граф, граничная тройка, функция Вейля–Титчмарша.

### Введение

Данная работа посвящена исследованию изоспектральных квантовых графов специального вида. Квантовый граф — это компактный метрический граф, оснащенный дифференциальным (или псевдодифференциальным) оператором [16]. В качестве такого оператора в нашей работе рассматривается оператор Лапласа, причем, данные результаты допускают естественное обобщение на случай оператора Шрёдингера.

Квантовые графы возникают при изучении распространения волн различной природы (электромагнитной, акустической и т.д.) в квазиодномерных системах. Так, впервые в 1930 году они были использованы при моделировании спектра свободных электронов в органических молекулах, таких, как нафталин.

Область определения оператора Лапласа (лапласиана) на графе определяется граничными условиями, которые можно разделить на два класса: локальные (связывающие значения функции и ее производной в отдельно в каждой вершине графа) и нелокальные (связывающие значения функции и ее производной в различных вершинах графа). И если локальным граничным условиям посвящён ряд работ [7, 9, 17, 16, 12, 18, 2, 1], то исследованию квантовых графов с нелокальными граничными условиями до сих пор не уделялось достаточного внимания.

Отметим также, что многие задачи в теории квантовых графов подробно исследованы в случае, когда граф является деревом. Графы, содержащие цикл, представляют собой более сложный объект для изучения. Их анализу посвящены, например, работы П. Курасова [9, 17].

В настоящей работе проводится спектральный анализ квантовых графов специального вида, содержащих цикл, область определения которых задана различными типами нелокальных граничных условий. Для исследования спектра применяется метод граничных троек, получивший своё развитие в работах В. И. Горбачук, М. Л. Горбачука [13],

А. Н. Кочубея [4], В. А. Деркача и М. М. Маламуда [10]. Этот метод предполагает рассмотрение соответствующего самосопряженного дифференциального оператора как собственного расширения некоторого симметрического оператора с равными дефектными числами, конструкцию граничной тройки для сопряженного к нему оператора и построение соответствующей ей функции Вейля–Титчмарша.

Также в данной статье решается задача о возможности реконструкции нелокальных граничных условий по заданному унитарному метрическому графу и спектральным данным. Для конечного компактного квантового графа общего вида с локальными граничными условиями такая задача рассматривалась в работе Ю. Ю. Ершовой, А. В. Киселёва [11]. В результате исследования изоспектральных квантовых графов для каждого из лапласианов были получены формулы следов (Теоремы 6 и 9), и проведен их анализ.

Отметим, что полученные результаты могут быть обобщены на случай графа с любым количеством циклов произвольной длины, чему будет посвящена наша следующая работа.

## 1. Предварительные сведения

Пусть  $A_{\min}$  — замкнутый симметрический оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве  $\mathfrak{H}$  и имеющий равные индексы дефекта  $n_{\pm}(A_{\min}) = \dim \mathfrak{N}_{\pm}$ , где  $\mathfrak{N}_{\lambda} := \ker(A_{\min}^* - \lambda I)$  — дефектное подпространство оператора  $A_{\min}$ . Отметим, что область определения  $\text{dom}(A_{\min})$  симметрического оператора  $A_{\min}$  плотна в  $\mathfrak{H}$ .

Следуя работе [10], приведем ряд основных понятий и результатов общей теории граничных троек.

**Определение 1.** Тройка  $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ , состоящая из вспомогательного гильбертова пространства  $\mathcal{H}$  и линейных отображений

$$\Gamma_i : \text{dom}(A_{\min}^*) \rightarrow \mathcal{H}, \quad i = 0, 1,$$

называется граничной тройкой для сопряженного оператора  $A_{\min}^*$ , если выполняются следующие два условия:

1.  $(A_{\min}^* f, g) - (f, A_{\min}^* g) = (\Gamma_1 f, \Gamma_0 g) - (\Gamma_0 f, \Gamma_1 g), \quad f, g \in \text{dom}(A^*);$

2. Отображение

$$\Gamma := \{\Gamma_0, \Gamma_1\} : \text{dom}(A^*) \rightarrow \mathcal{H} \oplus \mathcal{H},$$

действующее как  $\Gamma f = \{\Gamma_0 f, \Gamma_1 f\}$ , является сюръективным.

Так как дефектные числа оператора  $A_{\min}$  равны, то граничная тройка для оператора  $A_{\min}^*$  всегда существует, но определяется неоднозначно. Кроме того,  $n_{\pm}(A_{\min}) = \dim \mathcal{H}$ , и имеет место равенство  $A_{\min} = A_{\min}^* \upharpoonright (\ker \Gamma_0 \cap \ker \Gamma_1)$ .

Замкнутое расширение  $\tilde{A}$  оператора  $A_{\min}$  называется *собственным*, если

$$A \subseteq \tilde{A} \subseteq A_{\min}^*.$$

С каждой граничной тройкой связаны два собственных самосопряженных расширения оператора  $A$ :

$$A_{\infty} := A_{\min}^* \upharpoonright \ker \Gamma_0, \quad A_1 := A_{\min}^* \upharpoonright \ker \Gamma_1.$$

**Определение 2.** Собственное расширение  $\tilde{A}$  оператора  $A_{\min}$  называется *почти разрешимым* относительно граничной тройки  $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ , если существует оператор  $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  такой, что

$$\text{dom}(\tilde{A}) = \ker(\Gamma_1 - B\Gamma_0).$$

Такой оператор  $\tilde{A}$  будем обозначать  $A_B$ . Заметим, что любое собственное самосопряженное расширение оператора  $A_{\min}$  является почти разрешимым относительно некоторой граничной тройки.

Классическая  $m$ -функция Вейля–Титчмарша оператора Штурма–Лиувилля обобщается на случай симметрических операторов с равными дефектными числами.

**Определение 3.** Пусть  $A_{\min}$  — замкнутый симметрический оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве  $\mathfrak{H}$  с равными дефектными числами,  $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$  — граничная тройка для  $A^*$ ,  $\rho(A_\infty)$  — резольвентное множество оператора  $A_\infty$ . Оператор-функция  $M(\cdot) : \rho(A_\infty) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ , определенная равенством

$$M(\lambda)\Gamma_0 f_\lambda = \Gamma_1 f_\lambda, \quad f_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda.$$

называется *функцией Вейля–Титчмарша* оператора  $A_{\min}$ , соответствующей граничной тройке  $\Pi$ .

Функция Вейля–Титчмарша  $M(\cdot)$  является  $R$ -функцией, т.е.  $\mathcal{H}$ -значной голоморфной функцией в  $\mathbb{C}_+$  и  $\mathbb{C}_-$ , удовлетворяющей условию:

$$\text{Im}\lambda \cdot \text{Im}M(\lambda) \geq 0, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Следующий результат (см. [4, 13, 10]) позволяет описывать точечный спектр собственных расширений оператора  $A_{\min}$  в терминах функции Вейля–Титчмарша  $M(\cdot)$  и соответствующих граничных параметров. Заметим, что, без ограничения общности, оператор  $A_{\min}$  предполагается простым, т.е. не имеющим приводящего подпространства, на котором индуцируется самосопряженный оператор.

**Теорема 1.** Пусть  $A_{\min}$  — простой замкнутый симметрический оператор, и  $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$  — граничная тройка для  $A_{\min}^*$ . Если  $A_B$  — почти разрешимое расширение оператора  $A$ , то  $\lambda_0 \in \rho(A_B)$  тогда и только тогда, когда оператор-функция  $(B - M(\lambda))^{-1}$  допускает ограниченное аналитическое продолжение в точку  $\lambda_0$ .

## 2. Минимальные симметрические операторы на графе

Пусть множество рёбер  $E = \{e_k\}_{k=1}^n$  метрического графа  $\Gamma = (V, E)$  состоит из конечных вещественных интервалов  $e_k = [x_{2k-1}, x_{2k}] \subset \mathbb{R}$  длины  $l_k = x_{2k} - x_{2k-1}$ , а множество вершин  $V$  представляет собой некоторое разбиение множества  $\{x_j\}_{j=1}^{2n}$ .

Гильбертово пространство  $L_2(\Gamma)$  на графе  $\Gamma$  состоит из измеримых интегрируемых с квадратом функций, определенных на каждом ребре графа и таких, что

$$\|f\|_{L_2(\Gamma)}^2 = \sum_{e_k \in E} \|f\|_{L_2(e_k)}^2.$$

т.е.  $L_2(\Gamma) = \bigoplus_{e \in E} L_2(e_k)$  — ортогональная сумма гильбертовых пространств  $L_2(e_k)$ .

Аналогичным образом можно ввести пространство Соболева  $W^{2,2}(\Gamma) = \bigoplus_{e_k \in E} W^{2,2}(e_k)$ , где пространство  $W^{2,2}(e_k)$  состоит из определенных на ребре  $e_k$  функций  $f_{e_k}(x)$ , абсолютно непрерывных вместе со своей производной, для которых  $f_{e_k}''(x) \in L_2(e_k)$ .

Для функций  $f \in W^{2,2}(\Gamma)$  определим нормальную производную  $\partial_n f(x_j)$  на концах интервалов  $e_k$ :

$$\partial_n f(x_j) = \begin{cases} f'(x_j), & \text{если } x_j \text{ — левый конец интервала,} \\ -f'(x_j), & \text{если } x_j \text{ — правый конец интервала.} \end{cases}$$

Тогда в каждой вершине графа для функции  $f \in W^{2,2}(\Gamma)$  естественным образом можно ввести следующие обозначения:

$$f(V_k) = \sum_{x_j \in V_k} f(x_j), \quad \partial_n f(V_k) = \sum_{x_j \in V_k} \partial_n f(x_j)$$

Присвоим каждой внутренней вершине графа  $\Gamma$  (т.е. вершине, степень которой больше единицы) символ  $\delta$  или  $\delta'$ . Полученный граф будем называть *маркированным* и обозначать  $\Gamma_\delta$ . Маркированный граф  $\Gamma_\delta$  определяет линеал

$$D(\Gamma_\delta) := \left\{ f \in W^{2,2}(\Gamma) \mid \begin{array}{l} f \text{ непрерывна в вершинах } \delta \text{ — типа,} \\ \partial_n f \text{ непрерывна в вершинах } \delta' \text{ — типа} \end{array} \right\}.$$

Если  $V_k$  — вершина  $\delta$ -типа, то, очевидно,  $f(V_k) = \deg V_k f(x_j)$ ,  $x_j \in V_k$ . Аналогично для вершины  $V_k$   $\delta'$ -типа  $\partial_n f(V_k) = \deg V_k \partial_n f(x_j)$ ,  $x_j \in V_k$ .

В гильбертовом пространстве  $L_2(\Gamma) = \bigoplus_{k=1}^n L_2(e_k)$  зададим оператор  $A_{\min}$ , который на каждом ребре графа определен дифференциальным выражением

$$A_{\min} = -\frac{d^2}{dx^2}, \quad (2.1)$$

на области определения  $\text{dom}(A_{\min})$ , состоящей из функций  $f \in D(\Gamma_\delta)$ , удовлетворяющих условиям

$$f(V_k) = 0, \quad \partial_n f(V_k) = 0 \quad (\forall k). \quad (2.2)$$

Такой оператор  $A_{\min}$  и граф  $\Gamma_\delta$  будем называть *согласованными*. Например, если  $A_{\min}$  согласован с графом  $\Gamma_\delta$ , каждая вершина которого имеет  $\delta$ -тип, то область определения оператора будет состоять из функций  $f \in D(\Gamma_\delta)$ , удовлетворяющих следующему условию:

$$f(x_k) = 0 \quad (\forall x_k), \quad \sum_{x_k \in V_i} \partial_n f(x_k) = 0 \quad (\forall V_i).$$

Всюду далее будем предполагать, что граф  $\Gamma_\delta$  и оператор  $A_{\min}$  согласованные.

Заметим, что  $A_{\min}$  — замкнутый симметрический оператор. Сопряженный к нему оператор  $A_{\max} := A_{\min}^*$  определен тем же дифференциальным выражением, и его область определения описывается функциями из линеала  $D(\Gamma_\delta)$ .

Имеет место следующий факт.

**Теорема 2.** *Дефектные числа оператора  $A_{\min}$ , согласованного с графом  $\Gamma_\delta$ , равны порядку графа.*

Согласно приведенной ниже теореме<sup>1</sup>, простота оператора  $A_{\min}$  полностью определяется структурой и маркировкой метрического графа  $\Gamma_\delta$ .

**Теорема 3.** *Оператор  $A_{\min}$ , согласованный с графом  $\Gamma_\delta$ , не является простым тогда и только тогда, когда  $\Gamma_\delta$  содержит хотя бы один из следующих подграфов:*

- 1) петлю;
- 2) цикл, все ребра которого имеют попарно рационально соизмеримые длины;
- 3) цикл с чётным количеством рёбер, все вершины которого имеют  $\delta'$ -тип;
- 4) связный подграф, полученный из графа удалением вершин  $\delta$ -типа и содержащий более одного цикла с нечётным количеством рёбер.

### 3. Квантовый граф с вершинами однородного типа

Рассмотрим метрический граф  $\Gamma_\delta$  с вершинами  $\delta$ -типа, который определяется рис.1.

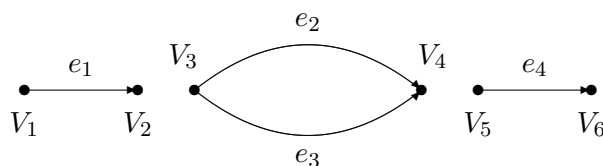


Рисунок 1.

Направления ребер определяют начало и конец соответствующего интервала. Не ограничивая общности, считаем, что начало каждого ребра длины  $l_k$  соответствует точке 0, а конец — точке  $l_k$ .

Пусть  $\theta = \{\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1\} \in \mathbb{R}^4$  — произвольный набор вещественных чисел. В пространстве  $L_2(\Gamma) = \bigoplus_{k=1}^4 L_2(e_k)$  рассмотрим семейство самосопряженных дифференциальных операторов  $A_\theta$ , действие которых на рёбрах графа задано дифференциальным выражением

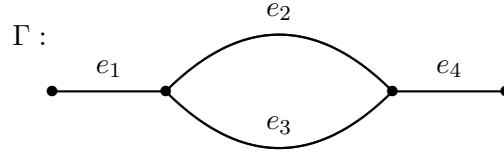
$$A_\theta = -\frac{d^2}{dx^2},$$

на области определения, заданной функциями  $f \in D(\Gamma_\delta)$ , удовлетворяющими следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & f(V_3) = f(V_4); \\ \text{(ii)} \quad & 2f(V_2) + \alpha_1 f(V_3) = 0, \quad 2f(V_5) + \beta_1 f(V_4) = 0; \\ \text{(iii)} \quad & f(V_1) + \alpha_0 \partial_n f(V_1) = 0, \quad f(V_6) + \beta_0 \partial_n f(V_6) = 0; \\ \text{(iv)} \quad & \partial_n f(V_3) + \partial_n f(V_4) = \alpha_1 \partial_n f(V_2) + \beta_1 \partial_n f(V_5). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Отметим, что квантовый граф  $\Gamma_\delta$  не следует рассматривать как несвязный, так как существуют соотношения, связывающие вершины  $V_2$  и  $V_3$ ,  $V_4$  и  $V_5$ . В действительности этот граф является математической реализацией физической системы, представленной рисунком

<sup>1</sup>Karpenko I. I., Kandagura A. N. *The criterion of symmetric operator on a graph* // submitted to Methods of Funct. Anal. Topol.



где нарушается непрерывность при переходе от ребра  $e_1$  к ребрам  $e_2$  и  $e_3$ , а также при переходе от ребер  $e_2$  и  $e_3$  к ребру  $e_4$ . В этом случае вершины степени 3 нужно нумеровать дважды, и именно конструкция графа  $\Gamma_\delta$  позволяет записать граничные условия для операторов  $A_\theta$  в терминах вершин (а не концов отрезков), а также с помощью Теорем 2, 3 получить необходимые характеристики операторов  $A_{\min}$  и  $A_{\max}$ .

Отметим, что спектр такого оператора чисто дискретный, не имеющий конечных предельных точек [8].

Построим симметрический оператор, относительно которого любой оператор  $A_\theta$  является собственным расширением. В работе [3] приведено обоснование такого выбора, которое приводит к оператору  $A_{\min}$ , согласованному с графом  $\Gamma_\delta$ , т.е. определяемому равенствами (2.1) – (2.2).

По теореме 3 такой оператор будет простым, если рёбра  $e_2$  и  $e_3$  имеют рационально несоизмеримые длины. В дальнейшем будем предполагать, что это условие выполнено, т.е. числа  $l_2$  и  $l_3$  рационально несоизмеримы. Кроме того, на основании Теоремы 2 оператор  $A_{\min}$  имеет конечные дефектные числа, равные 6. Поэтому следующая задача состоит в конструкции такой граничной тройки для оператора  $A_{\max}$ , относительно которой все операторы  $A_\theta$  были бы почти разрешимы.

**Теорема 4.** (i) Граничную тройку  $\{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$  для оператора  $A_{\max}$ , относительно которой все операторы  $A_\theta$  являются почти разрешимыми, можно выбрать следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \mathbb{C}^6, \\ \Gamma_0 f &= \left( \partial_n f(V_1), \partial_n f(V_2), \frac{1}{2} f(V_3), \partial_n f(V_4), \partial_n f(V_5), \partial_n f(V_6) \right)^T, \\ \Gamma_1 f &= \left( -f(V_1), -f(V_2), \partial_n f(V_3), -\frac{1}{2} f(V_4), -f(V_5), -f(V_6) \right)^T. \end{aligned} \quad (3.2)$$

(ii)  $A_\theta = A_{B_\theta}$ , где матрица  $B_\theta$  имеет вид

$$B_\theta = \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & -1 & \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_0 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

*Доказательство.* Так как индексы дефекта оператора  $A_{\min}$  равны 6, то в качестве вспомогательного гильбертова пространства  $\mathcal{H}$  можно выбрать  $\mathbb{C}^6$ .

Обоснуем выбор граничных операторов  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_1$ . Несложно показать, что в случае, когда каждая вершина графа принадлежит к  $\delta$  или  $\delta'$  типу, выполнено следующее соотношение:

$$(A^* f, g) - (f, A^* g) = \sum_{V_k} \frac{1}{\deg V_k} \left( \partial_n f(V_k) \overline{g(V_k)} - f(V_k) \overline{\partial_n g(V_k)} \right).$$

Следовательно, значения граничных операторов  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_1$  на функции  $f$  могут быть выбраны как векторы значений этой функции и ее нормальных производных в вершинах графа. Для того, чтобы самосопряженный оператор  $A_\theta$  являлся почти разрешимым расширением оператора  $A_{\min}$  относительно данной граничной тройки, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство  $\Gamma_0(\text{dom}(A_\theta)) = \mathcal{H}$ . Следовательно, если вектор  $\Gamma_0 f$  составить только из значений функции  $f$  или только из значений ее производных в вершинах графа, то  $\Gamma_0(\text{dom}(A_\theta)) \subset \mathcal{H}$ , и расширения  $A_\theta$  не будут почти разрешимыми. В данном случае из-за нелокальных граничных условий  $\Gamma_0 f$  следует составить из значений функции  $f$  и её производных, не связанных между собой условиями (3.1). Таким образом, в качестве граничной тройки может быть выбрана тройка (3.2).

Методика доказательства второго пункта утверждения теоремы заключается в последовательном действии оператора  $B_\theta$  на базисные векторы  $h_k$  пространства  $\mathcal{H}$ , где  $h_k = (0, \dots, \underbrace{1}_k, \dots, 0)^T$ ,  $k = \overline{1, 6}$ .

Например, пусть  $\Gamma_0 f = h_3$ , тогда  $\frac{1}{2}f(V_3) = 1$ ,  $\partial_n f(V_k) = 0$  для  $k = 1, 2, 4, 5, 6$ . Используя соотношения (3.1), получим:

$$f(V_2) = \alpha_1, \partial_n f(V_3) = 0, -\frac{1}{2}f(V_4) = -1, -f(V_5) = \beta_1, f(V_k) = 0, k = 2, 6.$$

Следовательно,  $\Gamma_1 f = B_\theta h_3 = (0, \alpha_1, 0, -1, \beta_1, 0)^T$ .

Аналогично перебирая другие случаи, получим остальные столбцы матрицы  $B_\theta$ .  $\square$

**Теорема 5.** Если граничная тройка оператора  $A_{\max}$  определяется равенствами (3.2), то функция Вейля–Титчмарша  $M(\lambda)$  для данной граничной тройки имеет блочно-диагональный вид:

$$M(\lambda) = \text{diag}\{M_1(\lambda), M_2(\lambda), M_3(\lambda)\}, \tag{3.4}$$

где

$$\begin{aligned} M_1(\lambda) &= -\frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} \cot \mu l_1 & \csc \mu l_1 \\ \csc \mu l_1 & \cot \mu l_1 \end{pmatrix}, \\ M_2(\lambda) &= \frac{1}{\sin \mu(l_2 + l_3)} \begin{pmatrix} 2\mu(1 - \cos \mu(l_2 + l_3)) & -(\sin \mu l_2 + \sin \mu l_3) \\ -(\sin \mu l_2 + \sin \mu l_3) & \frac{1}{\mu} \sin \mu l_2 \sin \mu l_3 \end{pmatrix}, \\ M_3(\lambda) &= -\frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} \cot \mu l_4 & \csc \mu l_4 \\ \csc \mu l_4 & \cot \mu l_4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

*Доказательство.* Найдём действие оператор–функции  $M(\lambda)$  на базисных векторах пространства  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^6$ . Пусть  $f_\lambda \in \ker(A_{\max} - \lambda I)$ ,  $\Gamma_0 f_\lambda = h_k$ , где  $h_k = (0, \dots, \underbrace{1}_k, \dots, 0)$ .

Согласно определению оператора  $\Gamma_0$ , имеем:

$$\begin{aligned} \text{при } k \neq 3 \quad & \partial_n f_\lambda(V_k) = 1, \partial_n f_\lambda(V_s) = 0, s \neq k, f(V_3) = 0; \\ \text{при } k = 3 \quad & \partial_n f_\lambda(V_s) = 0, s \neq 3, f_\lambda(V_3) = 1. \end{aligned}$$

Для каждого фиксированного  $k$  для всех вершин  $V_s$ , не смежных с вершиной  $V_k$ , имеем:

$$f_\lambda(V_s) = \partial_n f_\lambda(V_s) = 0,$$

откуда  $f_\lambda(x) = 0$  для всех ребер, инцидентных вершине  $V_s$ . Таким образом, с учётом условий непрерывности функции в вершинах  $V_3$  и  $V_4$ , можно показать, что на всех рёбрах, не инцидентных вершине  $V_k$ , выполнено равенство  $f_\lambda(x) = 0$ . Поэтому для каждого  $k$  заслуживает обсуждения вопрос о значении функции и производной лишь на рёбрах, инцидентных вершине  $V_k$ .

Пусть  $k = 1$ . Тогда из условий  $\partial_n f_\lambda(V_1) = 1, \partial_n f_\lambda(V_2) = 0$  на ребре  $l_1$  имеем:

$$f_\lambda(x) = \frac{\cos \mu x}{\mu \sin \mu l_1},$$

откуда  $f_\lambda(V_1) = \frac{\cot \mu l_1}{\mu}$  и  $f_\lambda(V_2) = \frac{1}{\mu \sin \mu l_1}$ . Это означает, что

$$M(\lambda)h_1 = \left( -\frac{\cot \mu l_1}{\mu}, -\frac{1}{\mu \sin \mu l_1}, 0, 0, 0, 0 \right)^T.$$

Возьмём  $k = 2$ . Из условий  $\partial_n f_\lambda(V_1) = 0, \partial_n f_\lambda(V_2) = 1$  получим на ребре  $e_1$

$$f_\lambda(x) = \frac{1}{\mu}(\cot \mu l_1 \cos \mu x + \sin \mu x),$$

откуда  $f(V_1) = \frac{1}{\mu \sin \mu l_1}$ ,  $f(V_2) = \frac{\cot \mu l_1}{\mu}$ . Следовательно,

$$M(\lambda)h_2 = \left( -\frac{1}{\mu \sin \mu l_1}, -\frac{\cot \mu l_1}{\mu}, 0, 0, 0, 0 \right)^T.$$

Эти соображения определяют вид матрицы  $M_1(\lambda)$ . Действуя аналогично, вычислим второй блок матрицы  $M(\lambda)$ .

Пусть  $k = 3$ , тогда  $\frac{1}{2}f(V_3) = 1, \partial_n f(V_4) = 0$ . Кроме того, значения функции  $f$  в вершинах  $V_3$  и  $V_4$  непрерывны, так как  $f_\lambda \in \text{dom} A_{\max}$ . Следовательно,  $f_\lambda$  на рёбрах  $e_2$  и  $e_3$  будет иметь вид:

$$f_\lambda(x) = \cos \mu x + \frac{1 - \cos \mu(l_2 + l_3)}{\sin \mu(l_2 + l_3)} \sin \mu x.$$

Тогда  $\partial_n f(V_3) = 2\mu \frac{1 - \cos \mu(l_2 + l_3)}{\sin \mu(l_2 + l_3)}$ ,  $\frac{1}{2}f(V_4) = \frac{\sin \mu l_2 + \sin \mu l_3}{\sin \mu(l_2 + l_3)}$ . В этом случае

$$M(\lambda)h_3 = \left( 0, 0, 2\mu \frac{1 - \cos \mu(l_2 + l_3)}{\sin \mu(l_2 + l_3)}, -\frac{\sin \mu l_2 + \sin \mu l_3}{\sin \mu(l_2 + l_3)}, 0, 0 \right)^T.$$

Если  $k = 4$ , то  $f(V_3) = 0, \partial_n f(V_4) = 1$ , и для  $f_\lambda$  получим:

$$f_\lambda(x) = -\frac{\sin \mu l_3}{\sin \mu(l_2 + l_3)} \sin \mu x \text{ на ребре } e_2,$$

$$f_\lambda(x) = -\frac{\sin \mu l_2}{\sin \mu(l_2 + l_3)} \sin \mu x \text{ на ребре } e_3,$$

Тогда  $\partial_n f(V_3) = -\frac{\sin \mu l_2 + \sin \mu l_3}{\sin \mu(l_2 + l_3)}$ ,  $\frac{1}{2}f(V_4) = -\frac{\sin \mu l_2 \sin \mu l_3}{\mu \sin \mu(l_2 + l_3)}$ . При этом

$$M(\lambda)h_4 = \left( 0, 0, -\frac{\sin \mu l_2 + \sin \mu l_3}{\sin \mu(l_2 + l_3)}, \frac{\sin \mu l_2 \sin \mu l_3}{\mu \sin \mu(l_2 + l_3)}, 0, 0 \right)^T.$$



Вычисления последнего блока  $M_3(\lambda)$  можно получить, рассматривая действие функции Вейля на векторах  $h_5$  и  $h_6$ , что аналогично вычислениям  $M_1(\lambda)$ .  $\square$

Теперь рассмотрим два квантовых лапласиана  $A_\theta$  и  $A_{\tilde{\theta}}$ , заданных на графе  $\Gamma_\delta$ , определяемом рис.1. Отметим, что спектр таких оператора чисто дискретный, не имеющий конечных предельных точек [8]. Ответ на вопрос о взаимосвязи параметров  $\theta$  и  $\tilde{\theta}$ , если собственные значения операторов  $A_\theta$  и  $A_{\tilde{\theta}}$  совпадают с учетом кратности, даёт следующая теорема.

**Теорема 6.** Пусть  $\Gamma_\delta$  — метрический граф, определяемый рис.1. Если спектры (с учетом кратности) двух лапласианов  $A_\theta$  и  $A_{\tilde{\theta}}$ , заданных на графе  $\Gamma_\delta$  граничными условиями (3.1), равны, то справедливо одно из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \alpha_0 = \tilde{\alpha}_0, \beta_0 = \tilde{\beta}_0; \\ (2) \quad & \alpha_0 = \tilde{\beta}_0, \beta_0 = \tilde{\alpha}_0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

*Доказательство.* Согласно теореме 4, лапласианы  $A_\theta$  и  $A_{\tilde{\theta}}$  являются почти разрешимыми расширениями оператора  $A_{\max}$  в граничной тройке, определяемой равенствами (3.2). При этом их область определения описывается с помощью матриц  $B$  и  $\tilde{B}$  соответственно (см. равенство (3.3)).

Так как функция Вейля–Титчмарша  $M(\lambda)$  для граничной тройки (3.2) имеет вид (3.4), то  $F(\lambda)$  и  $\tilde{F}(\lambda)$ , определяемые (3.6)

$$\begin{aligned} F(\lambda) &:= (\sqrt{\lambda})^6 \sin^2(\sqrt{\lambda}l_1) \sin^2(\sqrt{\lambda}l_4) \sin^2(\sqrt{\lambda}(l_2 + l_3)) \det(B - M(\lambda)), \\ \tilde{F}(\lambda) &:= (\sqrt{\lambda})^6 \sin^2(\sqrt{\lambda}l_1) \sin^2(\sqrt{\lambda}l_4) \sin^2(\sqrt{\lambda}(l_2 + l_3)) \det(\tilde{B} - M(\lambda)), \end{aligned} \tag{3.6}$$

являются скалярными целыми аналитическими функциями в  $\mathbb{C}$ . В соответствии с теоремой 1 их отношение  $F/\tilde{F}$  не имеет полюсов и нулей, так как спектры операторов  $A_\theta$  и  $A_{\tilde{\theta}}$  совпадают.

Нетрудно показать, что и  $F$ , и  $\tilde{F}$  есть функции нормального типа, причем, их порядок меньше единицы. Тогда по теореме Адамара [6]

$$\tilde{F}(\lambda)/F(\lambda) = \det(\tilde{B} - M(\lambda))/\det(B - M(\lambda)) = \exp(a), \tag{3.7}$$

где  $a \in \mathbb{R}$ .

Так как операторы  $A_\theta$  и  $A_{\tilde{\theta}}$  полуограничены снизу, то функция Вейля–Титчмарша  $M(\lambda)$  допускает аналитическое продолжение из  $\mathbb{C}^+$  в  $\mathbb{C}^-$  через вещественную ось в окрестности  $-\infty$ , причем, ее асимптотика в этой окрестности имеет вид:

$$M(\lambda) = \text{diag} \left\{ \frac{1}{\tau}, \frac{1}{\tau}, -2\tau, \frac{1}{2\tau}, \frac{1}{\tau}, \frac{1}{\tau} \right\} + \bar{o}(\tau^{-M})$$

для любого  $M \gg 1$ , где  $\tau = \sqrt{-\lambda} \rightarrow +\infty$ . Тогда

$$\begin{aligned} \det(B - M(\lambda)) &= \det(B - M(\tau)) + \bar{o}(\tau^{-M}) = \left( \alpha_0 - \frac{1}{\tau} \right) \left( \beta_0 - \frac{1}{\tau} \right) \frac{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + 4}{\tau^2} + \bar{o}(\tau^{-M}), \\ \det(\tilde{B} - M(\lambda)) &= \det(\tilde{B} - M(\tau)) + \bar{o}(\tau^{-M}) = \left( \alpha_0 - \frac{1}{\tau} \right) \left( \beta_0 - \frac{1}{\tau} \right) \frac{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + 4}{\tau^2} + \bar{o}(\tau^{-M}), \end{aligned}$$

и для функции  $\tilde{F}(\lambda)/F(\lambda)$  также справедливо следующее асимптотическое представление:

$$\tilde{F}(\lambda)/F(\lambda) = \frac{(\tilde{\alpha}_0 - \frac{1}{\tau})(\tilde{\beta}_0 - \frac{1}{\tau})}{(\alpha_0 - \frac{1}{\tau})(\beta_0 - \frac{1}{\tau})} \cdot \frac{\tilde{\alpha}_1^2 + \tilde{\beta}_1^2 + 4}{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + 4} + \bar{o}(\tau^{-M}). \quad (3.8)$$

Действительно, так как

$$\det(B - M(\lambda)) = \det(B - M(\tau)) + \xi(\tau), \quad \det(\tilde{B} - M(\lambda)) = \det(\tilde{B} - M(\tau)) + \tilde{\xi}(\tau),$$

где

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \tau^M \xi(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \tau^M \tilde{\xi}(\tau) = 0$$

для любого  $M \gg 1$ , то выражение

$$\begin{aligned} & \tau^M \left( \frac{\det(\tilde{B} - M(\tau)) + \tilde{\xi}(\tau)}{\det(B - M(\tau)) + \xi(\tau)} - \frac{\det(\tilde{B} - M(\tau))}{\det(B - M(\tau))} \right) = \\ & = \tau^M \frac{\det(B - M(\tau))\tilde{\xi}(\tau) - \det(\tilde{B} - M(\tau))\xi(\tau)}{\det(B - M(\tau))(\det(B - M(\tau)) + \xi(\tau))} = \\ & = \frac{\left(\alpha_0 - \frac{1}{\tau}\right)\left(\beta_0 - \frac{1}{\tau}\right)(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + 4)\tau^{M-2}\tilde{\xi}(\tau) - \left(\tilde{\alpha}_0 - \frac{1}{\tau}\right)\left(\tilde{\beta}_0 - \frac{1}{\tau}\right)(\tilde{\alpha}_1^2 + \tilde{\beta}_1^2 + 4)\tau^{M-2}\xi(\tau)}{\left(\alpha_0 - \frac{1}{\tau}\right)\left(\beta_0 - \frac{1}{\tau}\right)(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + 4)\left(\left(\alpha_0 - \frac{1}{\tau}\right)\left(\beta_0 - \frac{1}{\tau}\right)(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + 4) + \tau^2\xi(\tau)\right)} \end{aligned}$$

стремится к нулю при  $\tau \rightarrow +\infty$ .

Сначала проведем выкладки в предположении, что параметры  $\alpha_0, \beta_0, \tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0$ , отвечающие локальным граничным условиям, ненулевые. В этом случае переходя в равенстве (3.7) к пределу при  $\tau \rightarrow +\infty$ , с учетом равенства (3.8) имеем:

$$\exp(a) = \frac{\tilde{\alpha}_0\tilde{\beta}_0}{\alpha_0\beta_0} \cdot \frac{\tilde{\alpha}_1^2 + \tilde{\beta}_1^2 + 4}{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + 4}.$$

Тогда

$$\frac{\alpha_0\beta_0\tilde{F}(\lambda)}{\tilde{\alpha}_0\tilde{\beta}_0F(\lambda)} = \frac{\left(1 - \frac{1}{\tilde{\alpha}_0\tau}\right)\left(1 - \frac{1}{\tilde{\beta}_0\tau}\right)}{\left(1 - \frac{1}{\alpha_0\tau}\right)\left(1 - \frac{1}{\beta_0\tau}\right)} \cdot \frac{\tilde{\alpha}_1^2 + \tilde{\beta}_1^2 + 4}{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + 4} + \bar{o}(\tau^{-M}) = \frac{\tilde{\alpha}_1^2 + \tilde{\beta}_1^2 + 4}{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + 4},$$

или

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{\tilde{\alpha}_0\tau}\right)\left(1 - \frac{1}{\tilde{\beta}_0\tau}\right)}{\left(1 - \frac{1}{\alpha_0\tau}\right)\left(1 - \frac{1}{\beta_0\tau}\right)} + \bar{o}(\tau^{-M}) = 1.$$

Логарифмируя последнее равенство, получим

$$\ln\left(1 - \frac{1}{\tilde{\alpha}_0\tau}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{\tilde{\beta}_0\tau}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{\alpha_0\tau}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{\beta_0\tau}\right) + \bar{o}(\tau^{-M}) = 0.$$

Из разложения логарифмической функции в ряд Тэйлора следует, что для любого  $M \gg 1$

$$\sum_{j=1}^M \frac{1}{j\tau^j} \left( \frac{1}{\alpha_0^j} + \frac{1}{\beta_0^j} - \frac{1}{\tilde{\alpha}_0^j} - \frac{1}{\tilde{\beta}_0^j} \right) + \bar{o}(\tau^{-M}) = 0. \quad (3.9)$$

Так как формула (3.9) получена в результате логарифмирования определителя матрицы, что естественно приводит к следу логарифма от матрицы, то эту формулу называют формулой следов для изоспектральных графов  $A_\theta$  и  $A_{\tilde{\theta}}$ . Формула (3.9) позволяет получить ряд условий для входящих в нее параметров. А именно, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\tau$ , приходим к равенствам

$$\frac{1}{\alpha_0^m} + \frac{1}{\beta_0^m} = \frac{1}{\tilde{\alpha}_0^m} + \frac{1}{\tilde{\beta}_0^m}, \quad m = \overline{1, \infty}.$$

Полагая здесь  $m = 1, 2$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_0} + \frac{1}{\beta_0} &= \frac{1}{\tilde{\alpha}_0} + \frac{1}{\tilde{\beta}_0}, \\ \frac{1}{\alpha_0^2} + \frac{1}{\beta_0^2} &= \frac{1}{\tilde{\alpha}_0^2} + \frac{1}{\tilde{\beta}_0^2}, \end{aligned}$$

откуда непосредственно следуют формулы (3.5).

Теперь предположим, что один из локальных параметров, например,  $\alpha_0 = 0$ . В этом случае с учетом асимптотики (3.8) равенство (3.7) возможно только при условии, что либо  $\tilde{\alpha}_0 = 0$ , либо  $\tilde{\beta}_0 = 0$ . Далее аналогичные рассуждения приводят к равенству оставшихся локальных параметров. Таким образом, и в этом случае формула следов остается верной.  $\square$

Если в случае квантовых графов, которые определяются локальными граничными условиями, формула следов позволяет решить обратную задачу, т.е. справедливость соответствующей формулы обеспечивает совпадение спектров лапласианов, то в данной задаче полученный результат не является обратимым. Следующий пример показывает, что совпадение локальных параметров вовсе не является гарантией изоспектральности графов.

*Пример 1.* Рассмотрим семейство операторов  $A_\theta$ , определяемых на графе  $\Gamma_\delta$  равенствами (2.1) — (2.2), где  $\theta = \{0, \alpha_1, 0, \beta_1\}$ . Так как

$$\det(M(\lambda) - B) = \det \frac{1}{\mu}(\mu M(\lambda) - \mu B) = \frac{1}{\mu^6} \det(\mu M(\lambda) - \mu B),$$

то

$$\begin{aligned} &\mu^6 \det(M(\lambda) - B) = \\ &= \det \begin{pmatrix} -\cot \mu l_1 & -\csc \mu l_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\csc \mu l_1 & -\cot \mu l_1 & -\mu \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu \alpha_1 & m_{11}(\mu) & m_{12}(\mu) + \mu & -\mu \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & m_{21}(\mu) + \mu & m_{22}(\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu \beta_1 & 0 & -\cot \mu l_4 & -\csc \mu l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\csc \mu l_4 & -\cot \mu l_4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} m_{11}(\mu) &= \frac{2\mu^2(1 - \cos \mu(l_2 + l_3))}{\sin \mu(l_2 + l_3)}, \\ m_{12}(\mu) &= m_{21}(\mu) = -\mu \frac{\sin \mu l_2 + \sin \mu l_3}{\sin \mu(l_2 + l_3)}, \\ m_{22}(\mu) &= \frac{\sin \mu l_2 \sin \mu l_3}{\sin \mu(l_2 + l_3)}. \end{aligned}$$

Для дальнейших вычислений полезно заметить, что

$$\det \begin{pmatrix} -\cot \mu l_i & -\csc \mu l_i \\ -\csc \mu l_i & -\cot \mu l_i \end{pmatrix} = -1, \quad i = 1, 4, \quad \det \begin{pmatrix} m_{11}(\mu) & m_{12}(\mu) \\ m_{21}(\mu) & m_{22}(\mu) \end{pmatrix} = -\mu^2.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} &\mu^6 \det(M(\lambda) - B) = \\ &= \det \begin{pmatrix} -\cot \mu l_1 & -\csc \mu l_1 \\ -\csc \mu l_1 & -\cot \mu l_1 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} m_{11}(\mu) & m_{12}(\mu) + \mu & -\mu\beta_1 & 0 \\ m_{21}(\mu) + \mu & m_{22}(\mu) & 0 & 0 \\ -\mu\beta_1 & 0 & -\cot \mu l_4 & -\csc \mu l_4 \\ 0 & 0 & -\csc \mu l_4 & -\cot \mu l_4 \end{pmatrix} + \\ &+ \alpha_1^2 \mu^2 \cot \mu l_1 m_{22}(\mu) \det \begin{pmatrix} -\cot \mu l_4 & -\csc \mu l_4 \\ -\csc \mu l_4 & -\cot \mu l_4 \end{pmatrix} = \\ &= \det \begin{pmatrix} m_{11}(\mu) & m_{12}(\mu) + \mu \\ m_{21}(\mu) + \mu & m_{22}(\mu) \end{pmatrix} - \beta_1^2 \mu^2 \cot \mu l_4 m_{22}(\mu) - \alpha_1^2 \mu^2 \cot \mu l_1 m_{22}(\mu) = \\ &= (m_{11}(\mu)m_{22}(\mu) - m_{12}(\mu)m_{21}(\mu) - 2m_{12}(\mu)\mu - \mu^2) - \\ &- \beta_1^2 \mu^2 \cot \mu l_4 m_{22}(\mu) - \alpha_1^2 \mu^2 \cot \mu l_1 m_{22}(\mu) = \\ &= -2\mu^2 \left(1 + \frac{m_{12}(\mu)}{\mu}\right) - \beta_1^2 \mu^2 \cot \mu l_4 m_{22}(\mu) - \alpha_1^2 \mu^2 \cot \mu l_1 m_{22}(\mu), \end{aligned}$$

или, иначе,

$$\mu^4 \det(M(\lambda) - B) = -2 \left(1 + \frac{m_{12}(\mu)}{\mu}\right) - (\beta_1^2 \cot \mu l_4 + \alpha_1^2 \cot \mu l_1) m_{22}(\mu).$$

С учетом введенных выше обозначений,

$$\begin{aligned} \mu^4 \det(M(\lambda) - B) &= -\frac{1}{\sin \mu(l_2 + l_3)} \left(2(\sin \mu(l_2 + l_3) - \sin \mu l_2 - \sin \mu l_3) + \right. \\ &+ (\beta_1^2 \cot \mu l_4 + \alpha_1^2 \cot \mu l_1) \sin \mu l_2 \sin \mu l_3 \left. \right) = \\ &= -\frac{4 \sin \mu l_2 / 2 \sin \mu l_3 / 2}{\sin \mu(l_2 + l_3)} \left( -2 \sin \frac{\mu(l_2 + l_3)}{2} + (\beta_1^2 \cot \mu l_4 + \alpha_1^2 \cot \mu l_1) \cos \frac{\mu l_2}{2} \cos \frac{\mu l_3}{2} \right) \end{aligned}$$

Далее рассмотрим ненулевые собственные значения оператора  $A_B$  при  $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 1$ , т.е. те  $\lambda = \mu^2$ , в которых не существует аналитического продолжения функции  $(M(\lambda) - B)^{-1}$ . С учетом вида матрицы  $M(\lambda) - B$  и вычисленного определителя, эти собственные значения описываются уравнениями

$$\sin \mu / 2 = 0, \quad -2 \sin \mu + (\alpha_1^2 + \beta_1^2) \cot \mu \cos^2 \frac{\mu}{2} = 0,$$

причем, второе уравнение сводится к следующему:

$$\cos \mu = \frac{4}{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + 4}.$$

Таким образом, мы видим, что при равных значениях параметров  $\alpha_0, \beta_0$  существуют как одинаковые серии собственных значений операторов  $A_B$ , так и зависящие от выбора параметров  $\alpha_1, \beta_1$ .

Формулы следов вида (3.5) имеют место и для метрического графа  $\Gamma_\delta$ , соответствующего рис.1, если  $V_3$  и  $V_4$  — вершины  $\delta'$ -типа, а область определения оператора

$$A_\theta = -\frac{d^2}{dx^2},$$

задана функциями из  $D(\Gamma_\delta)$ , где в каждой вершине графа выполняются следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \partial_n f(V_3) = \partial_n f(V_4); \\ \text{(ii)} \quad & 2\partial_n f(V_2) + \alpha_1 \partial_n f(V_3) = 0, \quad 2\partial_n f(V_5) + \beta_1 \partial_n f(V_4) = 0; \\ \text{(iii)} \quad & \partial_n f(V_1) = \alpha_0 f(V_1), \quad \partial_n f(V_6) = \beta_0 f(V_6); \\ \text{(iv)} \quad & f(V_3) + f(V_4) = \alpha_1 f(V_2) + \beta_1 f(V_5). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Здесь также  $\theta = \{\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1\} \in \mathbb{R}^4$  — произвольный набор вещественных чисел.

#### 4. Квантовый граф с вершинами смешанных типов

В следующей задаче предположим, что метрический граф  $\Gamma_\delta$ , соответствующий рис.1, имеет в вершине  $V_3$  условие  $\delta$ -типа, а в вершине  $V_4$  — условие  $\delta'$ -типа. Для набора вещественных параметров  $\vartheta = (\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \gamma_1)$  зададим на графе  $\Gamma_\delta$  семейство самосопряженных операторов Лапласа  $A_\vartheta$ , область определения  $D(A_\vartheta)$  которых состоит из функций  $f \in D(\Gamma_\delta)$ , удовлетворяющих следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \partial_n f(V_4) = \gamma_1 f(V_3); \\ \text{(ii)} \quad & f(V_2) = -\alpha_1/2f(V_3); \quad \partial_n f(V_5) = \beta_1/2f(V_3); \\ \text{(iii)} \quad & \partial_n f(V_3) = \gamma_1 f(V_4) + \alpha_1 \partial_n f(V_2) + \beta_1 f(V_5); \\ \text{(iv)} \quad & \partial_n f(V_1) = \alpha_0 f(V_1), \quad \partial_n f(V_6) = \beta_0 f(V_6). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Если в качестве  $A_{\min}$  для данного семейства операторов  $A_\vartheta$  выбрать симметрический оператор, согласованный с графом  $\Gamma_\delta$ , то для его сопряженного оператора имеет место следующий результат.

**Теорема 7.** (i) *Граничную тройку  $\{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ , соответствующую оператору  $A_{\max}$ , относительно которой все операторы  $A_\vartheta$  являются почти разрешимыми, можно выбрать следующим образом:*

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \mathbb{C}^6, \\ \Gamma_0 f &= \left( f(V_1), \partial_n f(V_2), \frac{1}{2}f(V_3), f(V_4), f(V_5), f(V_6) \right)^T, \\ \Gamma_1 f &= \left( \partial_n f(V_1), -f(V_2), \partial_n f(V_3), \frac{1}{2}\partial_n f(V_4), \partial_n f(V_5), \partial_n f(V_6) \right)^T. \end{aligned} \tag{4.2}$$

(ii)  $A_\vartheta = A_{B_\vartheta}$ , где оператор  $B_\vartheta$  имеет вид:

$$B_\vartheta = \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & \gamma_1 & \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_0 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

**Теорема 8.** Функция Вейля–Титчмарша  $M(\lambda)$  для данной граничной тройки имеет блочно-диагональный вид

$$M(\lambda) = \text{diag}\{M_1(\lambda), M_2(\lambda), M_3(\lambda)\},$$

где

$$\begin{aligned} M_1(\lambda) &= \begin{pmatrix} \mu \tan \mu l_1 & -\sec \mu l_1 \\ -\sec \mu l_1 & \frac{1}{\mu} \tan \mu l_1 \end{pmatrix} \\ M_2(\lambda) &= \frac{\mu}{\sin \mu(l_2 + l_3)} \begin{pmatrix} -2(1 + \cos \mu(l_2 + l_3)) & \cos \mu l_2 + \cos \mu l_3 \\ \cos \mu l_2 + \cos \mu l_3 & -\cos \mu l_2 \cos \mu l_3 \end{pmatrix} \\ M_3(\lambda) &= \mu \begin{pmatrix} -\cot \mu l_4 & \csc \mu l_4 \\ \csc \mu l_4 & -\cot \mu l_4 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

**Теорема 9.** Пусть  $\Gamma_\delta$  — метрический граф, определяемый рис.1. Если спектры (с учетом кратности) двух лапласианов  $A_\vartheta$  и  $A_{\tilde{\vartheta}}$ , заданных на графе  $\Gamma_\delta$  граничными условиями (4.1), равны, то справедливо одно из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \alpha_0 = \tilde{\alpha}_0, \quad \beta_0 = \tilde{\beta}_0, \quad \frac{2\gamma_1^2 + \beta_1^2}{\alpha_1^2 + 2} = \frac{2\tilde{\gamma}_1^2 + \tilde{\beta}_1^2}{\tilde{\alpha}_1^2 + 2}; \\ (2) \quad & \alpha_0 = \tilde{\beta}_0, \quad \beta_0 = \tilde{\alpha}_0, \quad \frac{2\gamma_1^2 + \beta_1^2}{\alpha_1^2 + 2} = \frac{2\tilde{\gamma}_1^2 + \tilde{\beta}_1^2}{\tilde{\alpha}_1^2 + 2}; \\ (3) \quad & \alpha_0 + \beta_0 = \tilde{\alpha}_0 + \tilde{\beta}_0 = 0, \quad \alpha_0\beta_0 + \frac{2\gamma_1^2 + \beta_1^2}{\alpha_1^2 + 2} = \tilde{\alpha}_0\tilde{\beta}_0 + \frac{2\tilde{\gamma}_1^2 + \tilde{\beta}_1^2}{\tilde{\alpha}_1^2 + 2}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

*Доказательство.* Пусть область определения почти разрешимых расширений операторов  $A_\vartheta$  и  $A_{\tilde{\vartheta}}$  оператора  $A_{\max}$  в граничной тройке, определяемой равенствами (4.2) описывается с помощью матриц  $B$  и  $\tilde{B}$  соответственно (см. равенство (4.3)).

Так как функция Вейля–Титчмарша  $M(\lambda)$  для граничной тройки вида (3.2) имеет вид (8), то  $F(\lambda) := \cos^2(\sqrt{\lambda}l_1) \cos^2(\sqrt{\lambda}l_4) \sin^2(\sqrt{\lambda}(l_2 + l_3)) \det(B - M(\lambda))$  и  $\tilde{F}(\lambda) := \cos^2(\sqrt{\lambda}l_1) \cos^2(\sqrt{\lambda}l_4) \sin^2(\sqrt{\lambda}(l_2 + l_3)) \det(\tilde{B} - M(\lambda))$  являются скалярными целыми аналитическими функциями в  $\mathbb{C}$ . Проводя рассуждения, аналогичные приведенным в теореме 6, приходим к равенству

$$\tilde{F}(\lambda)/F(\lambda) = \det(\tilde{B} - M(\lambda))/\det(B - M(\lambda)) = \exp(a), \quad (4.6)$$

где  $a \in \mathbb{R}$ .

Так как операторы  $A_\vartheta$  и  $A_{\tilde{\vartheta}}$  полуограничены снизу, то функция Вейля–Титчмарша  $M(\lambda)$  допускает аналитическое продолжение на вещественную ось в окрестности  $-\infty$ , причем, ее асимптотика в этой окрестности имеет вид:

$$M(\lambda) = \text{diag}\left\{-\tau, \frac{1}{\tau}, -2\tau, -\frac{\tau}{2}, -\tau, -\tau\right\} + \bar{o}(\tau^{-M})$$

для любого  $M \gg 1$ , где  $\tau = \sqrt{-\lambda} \rightarrow +\infty$ . Тогда для функции  $\tilde{F}(\lambda)/F(\lambda)$  справедливо следующее асимптотическое представление:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\lambda)/F(\lambda) &= \frac{\det(\tilde{B} - M(\tau))}{\det(B - M(\tau))} + \bar{o}(\tau^{-M}) = \\ &= \frac{(\tilde{\alpha}_0 + \tau)(\tilde{\beta}_0 + \tau)(2\tilde{\gamma}_1^2 + \tilde{\beta}_1^2 - (\tilde{\alpha}_1^2 + 2)\tau^2)}{(\alpha_0 + \tau)(\beta_0 + \tau)(2\gamma_1^2 + \beta_1^2 - (\alpha_1^2 + 2)\tau^2)} + \bar{o}(\tau^{-M}). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Переходя в равенстве (4.6) к пределу при  $\tau \rightarrow +\infty$ , с учетом равенства (4.7) имеем:

$$\exp(a) = \frac{\tilde{\alpha}_1^2 + 2}{\alpha_1^2 + 2}.$$

Тогда

$$\frac{\tilde{F}(\lambda)}{F(\lambda)} = \frac{(\tilde{\alpha}_0 + \tau)(\tilde{\beta}_0 + \tau)(2\tilde{\gamma}_1^2 + \tilde{\beta}_1^2 - (\tilde{\alpha}_1^2 + 2)\tau^2)}{(\alpha_0 + \tau)(\beta_0 + \tau)(2\gamma_1^2 + \beta_1^2 - (\alpha_1^2 + 2)\tau^2)} + \bar{o}(\tau^{-M}) = \frac{\tilde{\alpha}_1^2 + 2}{\alpha_1^2 + 2},$$

или

$$\frac{(1 + \frac{\tilde{\alpha}_0}{\tau})(1 + \frac{\tilde{\beta}_0}{\tau})(1 - \frac{\tilde{\delta}}{\tau^2})}{(1 + \frac{\alpha_0}{\tau})(1 + \frac{\beta_0}{\tau})(1 - \frac{\delta}{\tau^2})} + \bar{o}(\tau^{-M}) = 1,$$

где

$$\delta = \frac{2\gamma_1^2 + \beta_1^2}{\alpha_1^2 + 2}, \quad \tilde{\delta} = \frac{2\tilde{\gamma}_1^2 + \tilde{\beta}_1^2}{\tilde{\alpha}_1^2 + 2}.$$

Логарифмируя последнее равенство, получим

$$\begin{aligned} &\ln\left(1 + \frac{\tilde{\alpha}_0}{\tau}\right) + \ln\left(1 + \frac{\tilde{\beta}_0}{\tau}\right) + \ln\left(1 - \frac{\tilde{\delta}}{\tau^2}\right) - \\ &- \ln\left(1 + \frac{\alpha_0}{\tau}\right) - \ln\left(1 + \frac{\beta_0}{\tau}\right) - \ln\left(1 - \frac{\delta}{\tau^2}\right) + \bar{o}(\tau^{-M}) = 0. \end{aligned}$$

Из разложения логарифмической функции в ряд Тэйлора следует, что для любого  $M \gg 1$

$$\sum_{j=1}^M \frac{(-1)^{j-1}}{j\tau^j} (\tilde{\alpha}_0^j + \tilde{\beta}_0^j - \alpha_0^j - \beta_0^j) - \sum_{j=1}^M \frac{1}{j\tau^{2j}} (\tilde{\delta}^j - \delta^j) + \bar{o}(\tau^{-M}) = 0. \tag{4.8}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\tau$  в равенствах (4.8), приходим к следующим соотношениям для параметров:

$$\alpha_0^{2m+1} + \beta_0^{2m+1} = \tilde{\alpha}_0^{2m+1} + \tilde{\beta}_0^{2m+1}, \quad m = \overline{0, \infty}, \tag{4.9}$$

$$\alpha_0^{2m} + \beta_0^{2m} - 2m\delta^m = \tilde{\alpha}_0^{2m} + \tilde{\beta}_0^{2m} - 2m\tilde{\delta}^m, \quad m = \overline{1, \infty}. \quad (4.10)$$

Полагая в равенствах (4.9)  $m = 0, 1$ , получим

$$\begin{aligned} \alpha_0 + \beta_0 &= \tilde{\alpha}_0 + \tilde{\beta}_0, \\ \alpha_0^3 + \beta_0^3 &= \tilde{\alpha}_0^3 + \tilde{\beta}_0^3, \end{aligned}$$

откуда получаем три возможных соотношения для локальных параметров:

1.  $\alpha_0 = \tilde{\alpha}_0, \beta_0 = \tilde{\beta}_0,$
2.  $\alpha_0 = \tilde{\beta}_0, \beta_0 = \tilde{\alpha}_0,$
3.  $\alpha_0 + \beta_0 = \tilde{\alpha}_0 + \tilde{\beta}_0 = 0.$

В то же время из равенств (4.10) при  $m = 1$  имеем

$$\alpha_0^2 + \beta_0^2 - 2\delta = \tilde{\alpha}_0^2 + \tilde{\beta}_0^2 - 2\tilde{\delta},$$

откуда с учетом соотношений для локальных параметров следуют формулы (4.5).  $\square$

## 5. Формулы следов: анализ и выводы

Согласно Теореме 6 в задачах 3.1 нелокальные параметры  $\alpha_1, \tilde{\alpha}_1$  и  $\beta_1, \tilde{\beta}_1$  не входят в формулу следов, а в соответствии с Теоремой 9 формула следов для задачи 3.2 содержит все нелокальные параметры. Возникает вопрос, чем определяется вхождение нелокальных параметров в формулу следов: структурой графа, его маркировкой или выбором граничных условий.

Заметим, что в задачах 3.1 — 3.2 функция  $\det(M(\tau) - B)$  допускает следующую факторизацию на  $+\infty$ :

$$\det(M(\tau) - B) = f_1(\alpha_0, \beta_0, \tau) f_2(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \tau).$$

Аналогичная факторизация имеем место и для функции  $\det(M(\tau) - \tilde{B})$ . Поэтому

$$\frac{\det(M(\tau) - B)}{\det(M(\tau) - \tilde{B})} + \bar{o}(\tau^M) = \frac{f_1(\alpha_0, \beta_0, \tau) f_2(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \tau)}{f_1(\tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0, \tau) f_2(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1, \tilde{\gamma}_1, \tau)} + \bar{o}(\tau^M) = \exp(a). \quad (5.1)$$

При этом для каждой из задач 3.1 — 3.2

$$\frac{f_1(\alpha_0, \beta_0, \tau)}{f_1(\tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0, \tau)} \rightarrow 1, \quad \tau \rightarrow +\infty.$$

Следовательно,

$$\exp(a) = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{f_2(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \tau)}{f_2(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1, \tilde{\gamma}_1, \tau)}.$$

В общем случае

$$f_2(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \tau) = \sum_{k=m_1}^{m_2} \xi_k(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \tau^k = \tau^{m_2} \sum_{k=m_1}^{m_2} \xi_k(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \tau^{k-m_2}, \quad m_1, m_2 \in \mathbb{Z},$$



поэтому

$$\exp(a) = \frac{\xi_{m_2}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)}{\xi_{m_2}(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1, \tilde{\gamma}_1)}.$$

Если  $f_2(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \tau)$  — однородное выражение относительно  $\tau$ , то, сокращая равенство (5.1) на  $\exp(a)$ , мы получаем выражение

$$\frac{f_1(\alpha_0, \beta_0, \tau)}{f_1(\tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0, \tau)} + \bar{o}(\tau^{-M}) = 1,$$

которое уже не содержит нелокальные параметры.

Проанализируем условия, при которых функция  $f_2$  является однородным выражением относительно  $\tau$  для графа  $\Gamma_\delta$ , рассматриваемого в задаче 3.1 с вершинами  $\delta$ -типа. Так как

$$f_2(\tau) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & -2\tau & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & \frac{1}{2\tau} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & \frac{1}{\tau} \end{pmatrix},$$

то порядок однородности определяется произведением элементов главной диагонали, которое в данном случае равно  $-\frac{1}{\tau^2}$ . Поэтому члены определителя, дающие выражения другого порядка должны быть равны нулю. Несложный анализ показывает, что для этого необходимо выполнение равенств  $a_{13} = a_{14} = a_{34} = 0$ . Вычисление определителя при этих значениях параметров показывает, что эти условия являются и достаточными. Таким образом, общий вид матрицы  $B$ , для которой в формулу следов не входят нелокальные параметры, следующий:

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & \beta_1 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_0 \end{pmatrix}.$$

Во всех остальных случаях нелокальные параметры (полностью или частично) будут входить в формулу следов. Заметим, что именно такой набор нелокальных параметров включала задача 3.1 с вершинами  $\delta$ -типа.

Для графа  $\Gamma_\delta$ , рассматриваемого в задаче 3.2, общий вид матрицы  $B$ , для которой в формулу следов не входят нелокальные параметры, следующий:

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_0 \end{pmatrix}.$$

В задаче 3.2 мы имели другое вхождение параметров, поэтому в формуле следов остались нелокальные параметры, причем, все.

Таким образом, в рассмотренных задачах наличие или отсутствие нелокальных параметров в формулах следов зависит не от структуры или маркировки графа, а от вида матрицы  $B$ , которая в свою очередь определяется граничными условиями.

В дальнейшем предполагается исследование соотношений на параметры граничных условий двух квантовых графов вида  $A_\vartheta$ , которые обеспечивали бы совпадение их дискретных спектров.

Авторы выражают благодарность А. В. Киселеву за постановку задачи и полезное обсуждение результатов.

### Список цитируемых источников

1. Герасименко Н. И. Обратная задача рассеяния на некомпактных графах // Теорет. мат. физ. — 1988 — 75 — С. 187–200.
2. Герасименко Н. И., Павлов Б. С. Задача рассеяния на некомпактных графах // Теорет. мат. физ. — 1988. — 74 — С. 345–359.
3. Карпенко И. И., Кандагура А. Н. Конструкция граничных троек для квантовых графов с нелокальными граничными условиями // Ученые записки ТНУ, Т.25(64).№2. — 2012. — С. 65–71.
4. Кочубей А. Н. О характеристических функциях симметрических операторов и их расширений // Изв. АН Арм.ССР, Математика. — 1980. — 15, 3 — С. 219–232.
5. Москалева Ю. П., Самойленко Ю. С. Введение в спектральную теорию графов // Учебное пособие. — Киев, 2007. — 116 с.
6. Титчмарш Е. Теория функций. — М.: Наука., 1980. — 463 с.
7. Alexander S. Superconductivity of networks. A percolation approach to the effects of disorder // Phys. Rev. — 1983. — 27 — pp. 1541–1557 .
8. Birman, M. Sh., Solomjak, M. Z. Spectral theory of self-adjoint operators in Hilbert space — Mathematics and its Applications (Soviet Series), D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987. — 324 p.
9. Boman J., Kurasov P. Symmetries of quantum graphs and the inverse scattering problem // Advances in Applied Mathematics. — 2005. — 35 — pp. 58–70.
10. Derkach V. A., Malamud M. M. Generalised Resolvents and the boundary value problems for Hermitian Operators with gaps // J. Funct. Anal. — 1991. — 95 — pp. 1–95.
11. Ershova Yu., Kiselev A. Trace formulae for graph Laplacians with applications to recovering matching conditions // Methods of Funct. Anal. Topol. — 2012. — 18, No.4 — pp. 343–359.
12. Exner P., Sheba P. Free quantum motion on a branching graph // Rep. Math. Phys. — 1989. — 28 — pp. 7–26.
13. Gorbachuk V. I., Gorbachuk M. L. Boundary Value Problems for Operator Differential Equations — Translated and revised from the 1984 Russian original. Mathematics and its Applications (Soviet Series), 48. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991. — 347 p.
14. Jeffery M., Green C., Tyagi S., Gilmore R. Reproducible magnetic features of high- $T_c$  superconductors in weak fields // Phys. Rev. — 1989. — 39 — pp. 9054–9059.
15. Kostyukin V., Schrader R. Kirchhoff's rule for quantum wires // J. Phys. — 1999. — 32 — pp. 595–630.
16. Kuchment P. Quantum graphs: an introduction and a brief survey // Analysis on Graphs and its Applications, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. — 2008. — 77 — pp. 291–312.
17. Kurasov P. Graph Laplacians and topology // Ark. Mat. — 2008. — 46 — pp. 95–111.
18. Ruedenberg K., Scherr C. W. Free-electron network model for conjugated systems, I. Theory // J. Chem. Phys. — 1953. — 21 — pp. 1565–1581.

Получена 06.11.2013