Динамические системы, вып. 26 (2009), 25–30

УДК 517.925.3

Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости импульсных систем

Р.И. Гладилина

Донецкий национальный технический университет
Донецк 83001. *E-mail: rgladilina@yandex.ru*

Аннотация. В данной статье с помощью второго метода Ляпунова исследуется устойчивость систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием на поверхностях. Для этого введены вспомогательные кусочно-непрерывные функции Ляпунова. Получены условия устойчивости, а также асимптотической устойчивости нулевого решения импульсной системы в случае, когда непрерывная и дискретная компоненты системы не "согласованы": одна из них устойчива, а другая – нет. Приведен иллюстративный пример.

Ключевые слова: импульсные системы, устойчивость, метод функций Ляпунова.

1. Введение

Второй метод Ляпунова (метод функций Ляпунова) давно и успешно применяется для исследования устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Особенно эффективен этот метод при исследовании устойчивости нелинейных систем. Возрастающая в последнее время популярность данного метода обьясняется, прежде всего тем, что при его использовании не требуется знания решений системы дифференциальных уравнений. При этом свойство устойчивости решений зависит от свойств некоторой вспомогательной функции (функции Ляпунова).

Метод функций Ляпунова оказался весьма эффективным при исследовании качественных характеристик решений более сложных систем: импульсных систем; функционально-дифференциальных, в том числе, систем с последействием; интегро-дифференциальных; стохастических; разностных; стабилизируемых и управляемых; систем с переключениями и других. Для решения этих задач в качестве вспомогательных функций используются различные модернизации классических функций Ляпунова. Например, в [6] исследование устойчивости проводится при помощи негладких функций, имеющих производные Дини. Д. Байнов и П. Симеонов ввели кусочно-непрерывные и кусочно-дифференцируемые функции Ляпунова [7], которые оказались более удобными при исследовании устойчивости импульсных систем. В [1] конструируются дискретные функции Ляпунова. Во многих работах вместо одной применяются несколько функций Ляпунова или используются векторные функции, например, в [3, 8], что позволяет ослабить требования, предъявляемые к отдельным функциям. В [9] вводятся матричнозначные функции Ляпунова и так далее.

Поэтому, под функциями Ляпунова целесообразно понимать некоторые вспомогательные функции, которые применяются для исследования качественных характеристик решений динамических систем.

Импульсная система представляет собой комбинацию непрерывной части, описываемой дифференциальными уравнениями, и дискретной, описываемой разностными уравнениями. При исследовании устойчивости импульсной системы обычным предположением является следующее: либо непрерывная компонента устойчива, а дискретная составляющая не мешает этой устойчивости (теорема 13.1 [7]), либо, наоборот, дискретная часть устойчива, а непрерывная составляющая согласована с ней (теорема 18.1 [5]). Более интересен случай, когда составляющие импульсной системы не согласованы, т.е. одна из них устойчива, а другая — нет.

Настоящая статья посвящена исследованию устойчивости "несогласованных" импульсных систем.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием на поверхностях

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t,x), \quad t \neq \tau_i(x), \\ \Delta x &= I_i(x), \quad t = \tau_i(x), \quad i \in N, \\ x(t_0+0) &= x_0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $t \in R_+,\ x \in \Omega \subset R^n,\ f : R_+ \times \Omega \to R^n,\ f(t,0) \equiv 0;\ I_i : \Omega \to R^n,\ I_i(0) \equiv 0$, $\tau_i : \Omega \to R_+$, $\tau_i(x)$ – поверхности разрыва, $0 < \tau_1(x) < \tau_2(x) < \ldots$ и $\tau_i(x) \to \infty$ при $i \to \infty$.

Предположим, что решение $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ системы (1) существует, единственно, непрерывно слева и пересекает каждую гиперповерхность $t = \tau_i(x)$ только один раз. Достаточные условия существования и единственности решений импульсных систем, а также условия отсутствия биений решений о поверхности разрыва можно найти, например, в [10].

Задачу будем рассматривать в области

$$\Omega = B_H,\ (H > 0),\ B_H = \{x \in R^n : \|x\| < H\},$$

где $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$ – Евклидова норма вектора.

В статье исследуется устойчивость нулевого решения системы (1) с помощью второго метода Ляпунова. Для этого введем вспомогательные кусочно-непрерывные функции $V:\ R_+ \times B_H \to R$ [7], удовлетворяющие требованиям: функция $V(t,x)$ непрерывна слева и $V(t,0) \equiv 0$ при любом $t \in R_+$.

Замечание 1. Для нулевого решения импульсной системы (1) определения понятий теории устойчивости не отличаются от соответствующих общеизвестных определений (см., например, [4]).

В дальнейшем будем обозначать функцию Ляпунова вдоль решения через $v(t) = V(t, x(t, t_0, x_0))$, а моменты попадания решения на поверхности разрыва $t = \tau_i(x)$ — через τ_i.

Приведем известные результаты.

Теорема 1 ([7, теорема 13.1]). *Пусть для системы (1) существует функция $V \in \mathbb{V}$, удовлетворяющая условиям*

$$a(\|x\|) \le V(t,x) \le b(\|x\|) \quad \textit{для} \quad (t,x) \in R_+ \times \Omega, \quad a \in \mathcal{K}, \quad b \in \mathcal{K}, \tag{2}$$

$$\dot{V}_{(1)}(t,x) \le -c(\|x\|) \quad \textit{для} \quad t \ne \tau_i(x), \quad c \in \mathcal{K}, \tag{3}$$

$$V(\tau_i + 0, x + I_i(x)) - V(\tau_i, x) \le 0 \quad (i \in N). \tag{4}$$

Тогда решение $x = 0$ системы (1) асимптотически устойчиво.

Здесь функция Ляпунова $V \in \mathbb{V}$ — кусочно-непрерывна и дифференцируема на промежутках непрерывности. Функции a, b, c — функции класса Хана, т.е. непрерывны, строго возрастают и в нуле равны нулю.

В теореме 1 устойчива непрерывная компонента, а дискретная не нарушает эту устойчивость.

Теорема 2 ([2]). *Пусть для системы (1) существует непрерывная и дифференцируемая функция V, удовлетворяющая условию (2), а также следующим условиям:*

$$\dot{V}_{(1)}(t,x) \le 0 \quad \textit{для} \quad t \ne \tau_i(x), \tag{5}$$

$$V(\tau_i + 0, x + I_i(x)) - V(\tau_i, x) \le -c(\|x\|) \quad (i \in N), \quad c \in \mathcal{K}. \tag{6}$$

Тогда решение $x = 0$ системы (1) асимптотически устойчиво.

В теореме 2 устойчивость достигается за счет дискретной составляющей, непрерывная компонента не нарушает устойчивость системы.

3. Основные результаты

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть для системы (1) существует определенно положительная, невозрастающая вдоль решения функция $V(t,x)$.*

Тогда, если последовательность $\{v(\tau_i+0)\}_{i=0}^{\infty}$ не возрастает, то нулевое решение системы (1) устойчиво;

если, кроме того, выполняется предельное соотношение

$$\lim_{i\to\infty} v(\tau_i + 0) = 0, \tag{7}$$

то тривиальное решение системы (1) асимптотически устойчиво.

Доказательство теоремы 3. Докажем вначале устойчивость нулевого решения системы (1).

Так как функция $V(t,x)$ определенно положительная, то

$$a(\|x\|) \leq V(t,x) \ \text{ для } \ (t,x) \in R_+ \times \Omega, \tag{8}$$

где функция $a : R_+ \to R_+$ принадлежит классу Хана.

Пусть заданы произвольные $t_0 \in R_+$ и $\varepsilon > 0$. Из свойств функции $V(t,x)$ следует, что существует $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ такое, что $\sup\limits_{\|x\|<\delta} V(t_0+0, x) < a(\varepsilon)$. Выберем $x_0 \in \Omega$ такое, что $\|x_0\| < \delta$. Тогда получим

$$V(t_0 + 0, x_0) < a(\varepsilon). \tag{9}$$

Пусть $t \in (\tau_i, \tau_{i+1}]$. По условию, на промежутках непрерывности функция $v(t)$ не возрастает, поэтому

$$v(\tau_{i+1}) \leq v(t) \leq v(\tau_i + 0). \tag{10}$$

Так как

$$v(\tau_{i-1} + 0) \geq v(\tau_i + 0), \quad i \in N \tag{11}$$

согласно условию, то из неравенств (10),(11) следует

$$a(\|x(t)\|) \leq v(t) \leq v(\tau_i + 0) \leq ... \leq v(\tau_1 + 0) \leq v(t_0 + 0) < a(\varepsilon).$$

Следовательно, $\|x(t)\| < \varepsilon$, что и доказывает устойчивость нулевого решения.

Пусть также выполнено условие (7). Из неравенства (10) и условия (7) следует, что $v(t) \to 0$ при $t \to \infty$, откуда учитывая условие (8), получим, что и $\|x(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$. Теорема доказана. □

Замечание 2. В отличие от теорем 1,2 в данной теореме не требуется дифференцированность функции Ляпунова. Функция должна быть лишь невозрастающей. Если она дифференцируема, то для асимптотической устойчивости достаточно, чтобы производная была знакопостоянной (неравенство (5)).

Замечание 3. В теореме 3 дискретная составляющая системы (1) может быть неустойчивой.

Замечание 4. В данной теореме не требуется существования беконечно малого высшего предела для функции Ляпунова.

Замечание 5. Еще одно усиление теоремы 2 заключаеся в том, что в данной теореме скачки функции Ляпунова в точках разрыва могут быть нулевыми, в то время как в теореме 2 (условие (6)) скачки должны быть строго отрицательными.

Пример 1. Пусть задана импульсная система

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\alpha x, \quad t \neq \tau_i, \\ x(\tau_i + 0) &= \beta x, \quad t = \tau_i, \quad i = 2k, \ k \in N, \\ x(\tau_i + 0) &= x, \quad t = \tau_i, \quad i = 2k+1, \ k \in N, \end{aligned} \tag{12}$$

где $\alpha > 0,\ \beta > 0$, моменты импульсного воздействия τ_i постоянны и равны $\tau_i = i,\ i \in N$. Скачки решения происходят только при четных i.

Функцию Ляпунова возьмем в виде

$$V = pe^{2t}x^2,\ p > 0.$$

Функция V опреленно положительна, но не имеет бесконечно малого высшего предела. Найдем производную функции V в силу системы (12) и скачок в момент импульсного воздействия.

$$\dot{V}_{(12)}(t,x) = 2pe^{2t}x^2 - 2\alpha pe^{2t}x^2 = 2pe^{2t}x^2(1-\alpha) \leq 0.$$

$$V(\tau_{2k}+0, x+I_{2k}(x)) - V(\tau_{2k}, x) = p\beta^2 e^{4k}x^2 - pe^{4k}x^2 = pe^{4k}x^2(\beta^2-1) \leq 0 \quad (k \in N).$$

Потребуем, чтобы выполнялось $\alpha \geq 1,\ \beta \leq 1$. Очевидно, что последовательность $\{v(\tau_i+0)\}_{i=0}^{\infty}$ не возрастает, если $\alpha \neq 1,\ \beta \neq 1$ одновременно, так как в последнем случае функция V постоянна. Причем, если $\alpha > 1,\ \beta < 1$, то функция V убывает на каждом промежутке непрерывности, и скачки ее в моменты времени $t = 2k$ — отрицательны. Если $\alpha = 1,\ \beta < 1$, то функция V постоянна на каждом промежутке непрерывности, а скачки ее в моменты времени $t = 2k$ — отрицательны. Если $\alpha > 1,\ \beta = 1$, то функция V убывает, скачки отсутствуют. Согласно теореме 2, нулевое решение системы (12) устойчиво.

Покажем, что оно асимптотически устойчиво. Для этого нужно показать, что $v(\tau_i+0) \to 0$ при $i \to \infty$. Найдем $v(\tau_{2k}+0) = pe^{4k}\beta^2x^2(2k)$. Функция e^{4k} при $k \to \infty$ неограниченно возрастает, поэтому, если $\lim_{k\to\infty} \|x(2k)\| = \eta \neq 0$, то последовательность $\{v(\tau_i+0)\}_{i=0}^{\infty}$ при больших τ_i не будет убывающей. Полученное противоречие доказывает, что решение системы (12) асимптотически устойчиво.

4. Заключение

В статье исследуется устойчивость системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием на поверхностях в том случае, когда непрерывная и дискретная компоненты импульсной системы могут быть не согласованными: в то время, когда одна из компонент устойчива, другая может быть неустойчива. Получены весьма общие условия асимптотической устойчивости для таких систем, при этом не требуется ни дифференцируемость функции Ляпунова, ни существование бесконечно малого высшего предела. Если функция Ляпунова дифференцируема, то для асимптотической устойчивости достаточно, чтобы производная была знакопостоянна. При этом не обязательно, чтобы в каждой точке попадания решения на поверхности разрыва скачки функции Ляпунова были ненулевыми. Если устойчивость достигается за счет непрерывной компоненты, то допускается, чтобы скачки были положительными. Приведен иллюстративный пример.

Список цитируемых источников

1. *Анашкин О.В., Диблик Й.* Об устойчивости разностных уравнений с запаздыванием // Динамические системы. — Симферополь: Таврия, 2007. — Вып. 23. — С. 113-122.
2. *Гургула С.И., Перестюк Н.А.* Об устойчивости положения равновесия импульсных систем // Мат. физика — 1982. — N 31. — С. 9-14.
3. *Мартынюк А.А., Слынько В.И.* Об устойчивости движения нелинейной импульсной системы // Прикл. механика — 2004. — **40**, N 2. — С. 134-144.
4. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. -М.: Мир, 1980. — 300 с.
5. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища шк., 1987. — 288 с.
6. *Akhmetov M.U., Zafer A.* Stability of the zero solution of impulsive differential equations by the Lyapunov second method // Journal of mathematical analysis and applications. — 2000. — **248**. — P. 69-82.
7. *Bainov D.D., Simeonov P.S.* Systems with impulse effect: stability, theory and applications. — Chichester: Ellis Horwood, 1989. — 256 p.
8. *Kaul S., Lakshmikantham V., Leela S.* Extremal solutions, comparison principle and stability criteria for impulsive differential equations with variable times // Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. — 1994. — **22**, N 10. — P. 1263-1270.
9. *Martynyuk A.A., Begmuratov K.A.* Analytical construction of the hierarchical matrix Lyapunov function for impulse systems // Укр. мат. журн. — 1997. — **49**, N 4. — P. 548-557.
10. *Samoilenko A.M., Perestyuk N.A.* Impulsive Differential Equations. — Singapure: World Scientific, 1995. — 462 p.

Получена 14.06.2009