Динамические системы, том 1(29), №1 (2011), 31–40

УДК 517.925.3

Необходимые условия частичной устойчивости импульсных систем

Р. И. Гладилина*, **А. А. Гладилина****

*Донецкий национальный технический университет,
Донецк 83001. *E-mail: rgladilina@yandex.ru*
**ВЦ Управления Донецкой железной дороги,
Донецк 83001.

Аннотация. В настоящей работе рассмотрена система дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в нефиксированные моменты времени. Для данной системы доказана теорема существования кусочно-непрерывной и кусочно-дифференцируемой функции Ляпунова в случае равномерной асимптотической устойчивости решения по части переменных.

Ключевые слова: импульсные системы, устойчивость, метод функций Ляпунова.

1. Введение

Метод функций Ляпунова успешно применяется для исследования устойчивости нелинейных импульсных систем, в том числе и для исследования частичной устойчивости. Однако большинство опубликованных работ посвящено установлению достаточных признаков устойчивости решений импульсных систем, в то время, как принципиально важное значение для прямого метода Ляпунова имеет установление необходимых признаков устойчивости.

Для систем с импульсными воздействиями в *фиксированные* моменты времени небходимые условия асимптотической устойчивости по всем переменным были получены в [2, 4, 9]; необходимые условия асимптотической устойчивости инвариантных множеств — в [3]. Настоящая статья посвящена установлению необходимых признаков частичной устойчивости импульсных систем наиболее общего вида: с импульсными воздействиями в *нефиксированные* моменты времени.

2. Постановка задачи.

Пусть $R_+ = [0; +\infty)$, R^n — n-мерное евклидово пространство, в котором определена норма $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием на поверхностях

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t,x), \quad t \neq \tau_i(x), \\ \Delta x &= I_i(x), \quad t = \tau_i(x), \quad i \in N, \end{aligned} \tag{1}$$

где $t \in R_+,\ x \in \Omega \subset R^n,\ f \in C(R_+ \times \Omega, R^n),\ f(t,0) \equiv 0;\ I_i \in C(\Omega, R^n),\ I_i(0) \equiv 0$, $\tau_i \in C^1(\Omega, R_+)$, $\tau_i(x)$ – поверхности разрыва, $0 < \tau_1(x) < \tau_2(x) < \ldots$ и $\tau_i(x) \to \infty$ при $i \to \infty$.

Предположим, что решение $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ системы (1) существует и единственно, непрерывно слева при $t = \tau_i(x)$ и пересекает каждую поверхность разрыва только один раз.

Пусть $x = (y, z),\ y \in R^m,\ z \in R^s\ (m + s = n)$, а $f(t, x) = (Y, Z),\ I_i = (I_i^y, I_i^z)$.

Исследование устойчивости по части переменных проведем в области

$$\Omega = \Omega_H = B_H^m \times R^s,\ (H > 0),\ B_H^m = \{y \in R^m : \|y\| < H\}.$$

Предположим, что выполняются следующие гипотезы в отношении системы (1).

(H1). Функция $f(t, x)$ непрерывна и ограничена вместе со своими частными производными в области $R_+ \times \Omega$:

$$\|f(t, x)\| \leq K, \tag{2}$$

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\right\| \leq C_1. \tag{3}$$

(H2). Функции $I_i(x)$ непрерывны и имеют ограниченные частные производные в области Ω:

$$\left\|\frac{\partial I_i(x)}{\partial x}\right\| \leq C_2 \quad (i \in N). \tag{4}$$

(H3). Функции $\tau_i(x)$ непрерывно дифференцируемы и имеют ограниченные частные производные в области Ω:

$$\max_{x\in\Omega}\left\|\frac{\partial \tau_i(x)}{\partial x}\right\| \leq C_3 \quad (i \in N). \tag{5}$$

(H4). Функции $\tau_i(x)$ удовлетворяют условию:

$$\tau_i(x) \geq \tau_i(x + I_i(x)), \quad x \in \Omega. \tag{6}$$

(H5). Предположим, кроме того, что выполняется неравенство

$$\left\langle\frac{\partial \tau_i(x)}{\partial x}, f(t, x)\right\rangle \leq \alpha \quad (\alpha < 1), \quad x \in \Omega. \tag{7}$$

Здесь $\langle a, b\rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ – скалярное произведение векторов.

(H6). Относительно моментов импульсного воздействия будем предполагать, что имеет место неравенство

$$\inf_i(\min_{x\in\Omega} \tau_i(x) - \max_{x\in\Omega} \tau_{i-1}(x)) = \theta > 0, \quad (i \in N). \tag{8}$$

(H7). Существует константа $\mu > 0$ такая, что имеет место неравенство

$$\|y + I_i^y(x)\| \geq \mu\|y\| \quad (i \in N). \tag{9}$$

(H8). Решение системы (1) z-продолжимо; это означает [6], что любое решение $x(t)$ определено для всех $t > t_0$, для которых $\|y(t, t_0, x_0)\| < H$.

Определение устойчивости нулевого решения аналогично [6].

Введем вспомогательные кусочно-непрерывные функции $V:\ R_+ \times \Omega \to R$ [9].

Определение 1. *Функция $V(t,x)$ принадлежит классу $\mathbb{V}$, если функция V непрерывна и дифференцируема при $t \neq \tau_i(x)$, непрерывна слева при $t = \tau_i(x)$ и $V(t,0) \equiv 0$ при любом $t \in R_+$.*

При $t \neq \tau_i(x)$ определим производную от функции $V(t,x)$ в силу системы (1)

$$\dot{V}_{(1)}(t,x) = \frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \langle \frac{\partial V}{\partial x}(t,x), f(t,x)\rangle.$$

Определение 2. *Функция $a: R_+ \to R_+$ принадлежит классу Хана ($a \in \mathcal{K}$), если она непрерывна, строго возрастает и $a(0) = 0$.*

Определение 3. *Система (1) называется периодической с периодом ω ($\omega > 0$), если*

$$f(t+\omega, x) \equiv f(t,x), \quad t \neq \tau_i(x),$$

$$\exists p \in N : I_{i+p}(x) \equiv I_i(x),\ \tau_{i+p}(x) = \tau_i(x) + \omega,\ i \in N.$$

Из определения 3 следует, что решения периодической системы обладают свойством:

$$y(t+\omega, t_0+\omega, x_0) \equiv y(t, t_0, x_0). \tag{10}$$

3. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть для системы уравнений (1) существует функция $V \in \mathbb{V}$, удовлетворяющая условиям*

$$a(\|y\|) \leq V(t,x) \quad \text{для} \quad (t,x) \in R_+ \times \Omega, \quad a \in \mathcal{K}, \tag{11}$$

$$V(t,x) \leq b(\|y\|) \quad \text{для} \quad (t,x) \in R_+ \times \Omega, \quad b \in \mathcal{K}, \tag{12}$$

$$\dot{V}_{(1)}(t,x) \leq -c(\|y\|) \quad \text{для} \quad t \neq \tau_i(x),\ c \in \mathcal{K}, \tag{13}$$

$$V(\tau_i + 0, x + I_i(x)) - V(\tau_i, x) \leq 0 \quad (i \in N). \tag{14}$$

Тогда тривиальное решение системы (1) равномерно асимптотически y-устойчиво.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1 из [1].

Определим норму матрицы $A = \{a_{kj}\}_{k,j=1}^n$ согласно [8, с. 153]

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_{kj}^2}. \tag{15}$$

Тогда из неравенства Коши-Буняковского вытекает оценка [8, с.153]

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|. \tag{16}$$

Лемма 1. *Пусть выполнены условия (H1)-(H6). Тогда при* $\tau > 0$ *справедлива оценка:*

$$\left\|\frac{\partial y(t_0+\tau, t_0, x_0)}{\partial x_0}\right\| < M(\tau), \tag{17}$$

где $M(\tau)$ *– положительная монотонно возрастающая непрерывная функция.*

Доказательство. Согласно [7, с. 30], матричная функция $u(t) = \dfrac{\partial x(t, t_0, x_0)}{\partial x_0}$ удовлетворяет системе уравнений в вариациях относительно начальных данных

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{du}{dt} & = & A(t)u, \quad t \neq \tau_i, \\ \Delta u & = & B_i u, \quad t = \tau_i, \quad i \in N, \end{array} \tag{18}$$

где τ_i – моменты встречи решения $x(t, t_0, x_0)$ с поверхностями $t = \tau_i(x)$. Матрицы $A(t), B_i$ равны

$$A(t) = \frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=x(t,t_0,x_0)}, B_i = \frac{\partial I_i(x)}{\partial x}\Big|_{x=x(\tau_i,t_0,x_0)}(E + P_i).$$

Матрицы P_i определяются следующим образом:

$$P_i = \frac{1}{1 - \left\langle \dfrac{\partial \tau_i(x)}{\partial x}\Big|_{x=x(\tau_i,t_0,x_0)}, f(\tau_i, x(\tau_i, t_0, x_0))\right\rangle} \left\{\frac{\partial \tau_i(x)}{\partial x_j}\Big|_{x=x(\tau_i,t_0,x_0)} f_k(\tau_i, x(\tau_i, t_0, x_0))\right\}_{j,k=1}^{n}.$$

Функция $u(t) = \dfrac{\partial x(t, t_0, x_0)}{\partial x_0}$ удовлетворяет начальным условиям

$$u(t_0) = E, \tag{19}$$

где E – единичная матрица.

Решение $u(t) = u(t, t_0, x_0)$ системы (18) можно представить в виде

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} A(\tau)u(\tau)d\tau + \sum_{t_0 \leq \tau_i < t} B_i u(\tau_i).$$

Имеем

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\| + \int_{t_0}^{t} \|A(\tau)u(\tau)\|d\tau + \sum_{t_0 \leq \tau_i < t} \|B_i u(\tau_i)\|.$$

Используя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\| + \int_{t_0}^{t} \|A(\tau)\|\|u(\tau)\|d\tau + \sum_{t_0 \leq \tau_i < t} \|B_i\|\|u(\tau_i)\|. \tag{20}$$

Найдем оценку матриц P_i. В силу условия (7) получим:

$$\|P_i\| \le \frac{1}{1-\alpha}\Big\|\Big\{\frac{\partial \tau_i(x)}{\partial x_j}\Big|_{x=x(\tau_i,t_0,x_0)} f_k(\tau_i, x(\tau_i,t_0,x_0))\Big\}_{j,k=1}^{n}\Big\|.$$

Из определения нормы матрицы (15), учитывая ограниченность ее элементов (2),(5), имеем

$$\|P_i\| \le \frac{1}{1-\alpha}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{\partial \tau_i(x)}{\partial x_j}\Big|_{x=x(\tau_i,t_0,x_0)} f_k(\tau_i, x(\tau_i,t_0,x_0))\Big)^2} =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{\partial \tau_i(x)}{\partial x_j}\Big|_{x=x(\tau_i,t_0,x_0)}\Big)^2 \sum_{k=1}^{n}(f_k(\tau_i, x(\tau_i,t_0,x_0)))^2} =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\Big\|\frac{\partial \tau_i(x)}{\partial x}\Big|_{x=x(\tau_i,t_0,x_0)}\Big\| \cdot \|f(\tau_i, x(\tau_i,t_0,x_0)\| \le \frac{1}{1-\alpha}KC_3.$$

Тогда

$$\|E+P_i\| \le \|E\| + \|P_i\| \le n + \frac{1}{1-\alpha}KC_3.$$

Учитывая ограниченность элементов матриц (3),(4), получим

$$\|B_i\| \le \Big\|\frac{\partial I_i(x(\tau_i))}{\partial x}\Big|_{x=x(\tau_i,t_0,x_0)}\Big\| \cdot \|E+P_i\| \le C_2(n + \frac{1}{1-\alpha}KC_3) = L_1,$$

$$\|A(t)\| = \Big\|\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=x(t,t_0,x_0)}\Big\| \le C_1.$$

Подставим полученные оценки в (20)

$$\|u(t)\| \le \|u_0\| + C_1\int_{t_0}^{t}\|u(\tau)\|d\tau + L_1\sum_{t_0\le\tau_i<t}\|u(\tau_i)\|.$$

Далее, применяя лемму 2.2 [7] при $C=\|u_0\|,\ \beta = L_1,\ \gamma = C_1$, получим оценку

$$\|u(t)\| \le \|u_0\|(1+L_1)^p e^{C_1(t-t_0)}. \tag{21}$$

Здесь p – количество точек τ_i на промежутке $[t_0, t_0+\tau)$. В силу (19) $\|u_0\| = n$. Поскольку выражение $(1+L_1)^p$ монотонно возрастает при возрастании τ ($\tau = t - t_0$), то неравенство (21) означает выполнение следующей оценки

$$\|u(t)\| \le M(\tau).$$

Далее получим

$$\Big\|\frac{\partial y(t_0+\tau, t_0, x_0)}{\partial x_0}\Big\| \le \Big\|\frac{\partial x(t_0+\tau, t_0, x_0)}{\partial x_0}\Big\| < M(\tau),$$

что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Если для системы (1) существует функция $V(t,x)$, удовлетворяющая условиям теоремы 1, то необходимо выполняется следующее тождество*

$$Y(t,0,z) \equiv 0. \tag{22}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5.3 из [6].

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (H1)-(H8), решение $x = 0$ равномерно асимптотически y-устойчиво и область $\Omega_\rho (0 < \rho < H)$ содержится в области его притяжения. Тогда существует функция $V : R_+ \times \Omega_\rho \to R_+$, удовлетворяющая условиям (11)-(14) теоремы 1, а также условию*

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x}(t,x) \right\| \le P \quad \text{для } (t,x) \in R_+ \times \Omega_\rho, \quad t \neq \tau_i(x). \tag{24}$$

Если система (1) периодична с периодом ω, то функция V также может быть выбрана периодической с периодом ω.

Доказательство. Так как нулевое решение системы (1) равномерно асимптотически устойчиво по y, то $\|y(t,t_0,x_0)\| \to 0$ при $t \to \infty$ равномерно по $t_0 \ge 0,\ x_0 \in \Omega_\rho$, поэтому в этой области выполняется неравенство

$$\|y(t_0+s,t_0,x_0)\|^2 < \phi(s), \tag{25}$$

где $\phi(s)$- скалярная монотонно убывающая непрерывная функция, удовлетворяющая условию $\lim_{s\to\infty} \phi(s) = 0$. Для этого достаточно взять убывающую и сходящуюся к нулю бесконечную последовательность $\{\epsilon_i\}_{i=1}^{\infty} (\epsilon_i > 0)$, тогда для всякого ϵ_i из этой последовательности найдется число $\sigma_i(\epsilon_i)$ такое, что при всех $t > t_0 + \sigma_i(\epsilon_i)$ будет выполняться неравенство $\|y(t,t_0,x_0)\| < \epsilon_i$. Последовательность σ_i будет расходящейся, то есть $\sigma_{i+1} > \sigma_i$. Рассмотрим положительную монотонно убывающую функцию $\phi(s)$, для которой $\phi(\sigma_{i+1}) = \epsilon_i^2 \quad (i \in N)$. Построенная таким образом функция будет удовлетворять всем требуемым условиям.

Пусть $M : R_+ \to R_+$ – монотонно возрастающая непрерывная функция такая, что $\lim_{t\to\infty} M(t) = +\infty$. В монографии [5] показано существование непрерывно дифференцируемой функции $g = g(\phi)$ такой, что

$$g \in \mathcal{K}, \quad g' \in \mathcal{K}, \tag{26}$$

$$\int_0^\infty g(\phi(s))ds < N_1 < +\infty \ \ (N_1 > 0), \tag{27}$$

$$\int_0^\infty g'(\phi(s))M(s)ds < N_2 < +\infty \ \ (N_2 > 0). \tag{28}$$

Определим функцию $V(t,x)$ следующим образом

$$V(t,x) = \int_t^\infty g(\|y(s,t,x)\|^2)ds \equiv$$

$$\equiv \int_0^\infty g(\|y(t+s,t,x)\|^2)ds \;\; \text{для } (t,x) \in R_+ \times \Omega_\rho, \;\; t \neq \tau_i(x), \tag{29}$$

$$V(\tau_i, x) = V(\tau_i - 0, x) \;\; \text{при } t = \tau_i(x), \;\; x \in \Omega_\rho \;\; (i \in N). \tag{30}$$

На основании оценок (25),(27) получим

$$V(t,x) = \int_0^\infty g(\|y(t+s,t,x)\|^2)ds \leq \int_0^\infty g(\varphi(s))ds < N_1.$$

Следовательно, интеграл (29) сходится. Далее, существует

$$\lim_{t\to\tau_i-0}\int_t^\infty g(\|y(s,t,x)\|^2)ds = V(\tau_i-0,x) = V(\tau_i,x).$$

Следовательно, функция $V(t,x)$ определена и равномерно ограничена в области $R_+ \times \Omega_\rho$, непрерывна в этой области при $t \neq \tau_i$ и непрерывна слева при $t = \tau_i$.

Найдем частные производные функции $V(t,x)$:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int_t^\infty g'(\|y(s,t,x)\|^2)\frac{\partial(\|y(s,t,x)\|^2)}{\partial x}ds.$$

Найдем оценки

$$\Big|\frac{\partial(\|y(s,t,x)\|^2)}{\partial x_k}\Big| = \Big|\frac{\partial}{\partial x_k}(y_1^2 + \ldots + y_m^2)\Big| = 2\Big|\Big(y_1\frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \ldots + y_m\frac{\partial y_m}{\partial x_k}\Big)\Big| \leq 2\|y\|\Big\|\frac{\partial y}{\partial x_k}\Big\|.$$

Так как $\|y\| < \rho$, то, согласно оценке (17), имеем

$$\Big|\frac{\partial(\|y(s,t,x)\|^2)}{\partial x_k}\Big| < 2\rho M(s), \quad k = \overline{1,n}.$$

Учитывая полученную оценку, а также условия (26),(28), окончательно получим

$$\Big\|\frac{\partial V}{\partial x}\Big\| < 2\rho\sqrt{n}\int_t^\infty g'(\phi(s))M(s)ds < P. \tag{31}$$

Так как интеграл, входящий в (31), сходится абсолютно и равномерно в области $R_+ \times \Omega_\rho$, то выражение $\dfrac{\partial V}{\partial x}$ в этой области представляет собой непрерывные и ограниченные функции, которые действительно являются частными производными функции V.

Свойство (24) доказано.

Докажем свойство (11). Пусть $t_0 \in (\tau_{i-1}, \tau_i)$. Решение $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ системы (1) при $t \in [t_0, \tau_i]$ совпадает с одним из решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x).$$

Для этой системы найдем

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{m} y_k^2 = 2\sum_{k=1}^{m} y_k Y_k,$$

откуда следует

$$\frac{d\|y\|^2}{dt} \leq 2\|y\|\|Y\|. \qquad (32)$$

В силу леммы 2 имеет место тождество $Y(t,0,z) \equiv 0$, поэтому, применяя формулу конечных приращений, получим

$$\|Y(t,y,z)\| \leq \sum_{k=1}^{m}\Big\|\frac{\partial Y}{\partial y_k}(t,\xi_1 y_1,\xi_2 y_2,\ldots,\xi_m y_m,z)y_k\|,$$

где $\xi_k \in (0,1)$ $(k=1,\ldots,m)$.

Далее, учитывая условие (3), имеем

$$\|Y(t,y,z)\| \ \leq \sum_{k=1}^{m}\Big\|\frac{\partial Y}{\partial y_k}\Big\||y_k| \leq C_1\sum_{k=1}^{m}|y_k| \leq mC_1\|y\|.$$

Подставим полученный результат в (32)

$$\frac{d\|y\|^2}{|dt|} \leq L_2\|y\|^2,$$

где $L_2 = \dfrac{1}{2}mC_1$.

Интегрируя последнее неравенство, получим

$$\|y_0\|e^{-L_2(t-t_0)} \leq \|y(t,t_0,x_0)\| \leq \|y_0\|e^{L_2(t-t_0)}.$$

Итак, для $\tau_{i-1}^0 < t_0 < t \leq \tau_i^0$ справедлива оценка

$$\|y(t,t_0,x_0)\| \geq \|y_0\|e^{-L_2(t-t_0)}.$$

В силу условия (9) имеем

$$\|y(\tau_i,t_0,x_0) + I_i^y(x(\tau_i,t_0,x_0))\| \geq \mu\|y(\tau_i,t_0,x_0)\| \geq \mu\|y_0\|e^{-L_2(\tau_i-t_0)}.$$

Из условия (8) следует, что отрезок $[t_0,t_0+\theta]$ содержит не более одной точки τ_i,поэтому

$$\|y(t,t_0,x_0)\| \geq \min(1,\mu)\|y_0\|e^{-L_2(t-t_0)} \ \text{ при } t \in [t_0,t_0+\theta].$$

Обозначим $\gamma = \min(1,\mu)$, тогда получим

$$V(t,x) \geq \int_0^\theta g(\|y(t+s,t,x)\|^2)ds \geq$$

$$\geq \int_0^\theta g(\|y\|^2\gamma^2 e^{-2L_2 s})ds \geq g(\|y\|^2\gamma^2 e^{-2L_2\theta})\theta \equiv a(\|y\|).$$

Условие (11) выполнено.

Докажем свойство (12). Так как $y(t,0,z_0) \equiv 0$, из формул (29),(30) имеем

$$V(t,0,z) \equiv 0.$$

На основании этого, применяя формулу конечных приращений, получим

$$V(t,y,z) - V(t,0,z) \leq \sum_{k=1}^m \Big|\frac{\partial V}{\partial y_k}(t,\xi_1 y_1,\xi_2 y_2,\ldots,\xi_m y_m,z)y_k\Big|,$$

где $\xi_k \in (0,1)$ $(k=1,\ldots,m)$.

Учитывая, что частные производные ограничены (24), окочательно получим

$$V(t,x) \leq \sum_{k=1}^m \Big|\frac{\partial V}{\partial y_k}\Big||y_k| \leq \sum_{k=1}^m P|y_k| \leq Pm\|y\| \equiv b(\|y\|).$$

Условие (12) выполнено.

Составим выражение для полной производной $\dfrac{dV}{dt}(t,x)$ в силу системы (1).

$$\frac{dV}{dt}(t,x) = \Big[\frac{dV}{d\tau}(\tau,x(\tau,t,x))\Big]_{\tau=t}.$$

В силу единственности решения $y(s,\tau,x(\tau,t,x)) = y(s,t,x)$, поэтому

$$\dot{V}_{(1)}(t,x) = \Big[\frac{d}{d\tau}\Big(\int_\tau^\infty g(\|y(s,\tau,x(\tau,t,x))\|^2)ds\Big)\Big]_{\tau=t} =$$

$$= \Big[\frac{d}{d\tau}\Big(\int_\tau^\infty g(\|y(s,t,x)\|^2)ds\Big)\Big]_{\tau=t} = -g(\|y(t,t,x)\|^2 \equiv$$

$$\equiv -c(\|y\|) \ \text{ для } (t,x) \in R_+ \times \Omega_\rho, \quad t \neq \tau_i,$$

то есть условие (13) выполнено.

Из соотношения $y(\tau_i+s,\tau_i-0,x) = y(\tau_i+s,\tau_i+0,x+I_i(x))$ и из (29),(30) следует свойство (14).

Предположим, что система (1) периодична с периодом ω. Покажем, что в этом случае функция $V(t,x)$, определяемая соотношениями (29),(30), периодична с периодом ω, то есть

$$V(t+\omega,x) \equiv V(t,x).$$

Действительно,

$$V(t+\omega,x) = \int_{t+\omega}^\infty g(\|y(s,t+\omega,x)\|^2)ds \quad \text{для } (t,x) \in R_+ \times \Omega_\rho.$$

Сделаем в интеграле замену переменной $s = \tau + \omega$, получим

$$V(t+\omega, x) = \int_t^{\infty} g(\|y(\tau+\omega, t+\omega, x)\|^2) d\tau.$$

Воспользовавшись свойством решений периодических систем (10), получим

$$V(t+\omega, x) \equiv V(t, x).$$

Теорема доказана.

4. Выводы.

Полученные в работе результаты, прежде всего, имеют теоретическое значение, так как для прямого метода Ляпунова доказательство существования функций, обладающих определенными свойствами является принципиально важным для обоснования самого метода. Кроме того, доказанная теорема также важна и для решения прикладных задач. Так как свойства функции Ляпунова обладают определенной устойчивостью, то можно показать, что из существования функции Ляпунова для данной системы следует устойчивость некоторой робастной системы.

Список цитируемых источников

1. *Гладилина Р.И.* Прямой метод Ляпунова в задачах об устойчивости по части переменных для систем с импульсным воздействием // Труды ИПММ НАН Украины. — Донецк. ИПММ НАН Украины. — 2004. — Вып. 9. — С.46-52.
2. *Гладилина Р.И., Игнатьев А.О.* О необходимых и достаточных условиях асимптотической устойчивости импульсных систем // Укр. мат. журнал. — 2003. — Т. 55, №8. — С.1035-1043.
3. *Гладилина Р.И., Игнатьев А.О.* О необходимых и достаточных условиях устойчивости инвариантных множеств нелинейных импульсных систем // Прикл. механика. — 2008. — Т. 44, №2. — С.132-142.
4. *Игнатьев А.О.* Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Мат. сб. — 2003. — Т. 194, №10. — С.117-132.
5. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения — М.: Наука, 1966. — 530с.
6. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. — М.: Наука, 1987. — 256с.
7. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища шк., 1987. — 288с.
8. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А., Парасюк I.О.* Диференціальні рівняння. — К.: Либідь, 2003. — 600с.
9. *Bainov D.D., Simeonov P.S.* Systems with impulse effect: stability, theory and applications. — Chichester: Ellis Horwood, 1989. — 256p.

Получена 30.12.2010