Динамические системы, том 2(30), №1-2(2012), 33–40

УДК 517.9

Конвергенція в системах різницевих рівнянь

В. Я. Данілов, Т. В. Ковальчук*

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ 01601. *E-mail: danilov_vy@ukr.net*

*Київський національний торговельно-економічний університет, Київ 02156. *E-mail: 0501@ukr.net*

[ukr] **Аннотация.** Вивчається гранична поведінка динамічних систем в скінченновимірних просторах, які описуються нелінійними різницевими рівняннями. Вивчена властивість конвергенції для таких систем, тобто одержано умови, при яких всі розв'язки різницевого рівняння на нескінченності прямують до деякого граничного розв'язку.

Ключевые слова: системи різницевих рівнянь, властивість конвергенції, асимптотична стійкість, обмежений розв'язок.

1. Вступ

Дослідження систем різницевих рівнянь останнім часом набуло особливо важливого значення з двох причин. З однієї сторони вони представляють собою різницеві схеми для наближеного, чисельного інтегрування систем диференціальних рівнянь. З іншого боку виявилося, що різницеві рівняння самі по собі є зручними математичними моделями багатьох реальних об'єктів. Такими рівняннями, наприклад, описується динаміка зміни вартості цінних паперів на фінансових ринках. Як правило, зміни вартостей акцій спостерігаються не неперервно, а в дискретні моменти часу, що й приводить до систем різницевих рівнянь для опису таких змін [5].

При вивченні динамічних систем важливим є дослідження їх граничної поведінки на нескінченності. Як правило, хорошими граничними властивостями володіють дисипативні системи. Питання дисипативності систем різницевих рівнянь вивчались в роботах багатьох авторів. Відзначимо роботи [3], [7], монографії [6], [8], де є широка бібліографія.

Необхідною умовою дисипативності є існування в системи обмежених розв'язків. З цього приводу відзначимо роботи [4], монографії [1], [2]. В даній роботі вивчені умови існування глобального, обмеженого, глобально притягуючого розв'язку систем різницевих рівнянь. При цьому, на відміну від багатьох згадуваних робіт, ці умови даються не в термінах функції Ляпунова, а в термінах правих частини.

Сама робота облаштована наступним чином: 1) вступ, де зроблено огляд літератури; 2) постановка задачі, допоміжні леми — тут дана постановка задачі, приведені необхідні означення та допоміжні результати; основні результати приведені в частині 3). В кінці роботи приведено список використаних джерел.

2. Постановка задачі, допоміжні леми

В даній роботі будемо використовувати наступні позначення: Z — множина цілих чисел, R^d — евклідів простір d-мірних числових векторів, $|\cdot|$ — евклідова норма d — мірного вектора, $\|\cdot\|$ — норма $d\times d$-мірної матриці, узгоджена з нормою вектора, E — $d \times d$-мірна одинична матриця.

Розглянемо в просторі R^d систему різницевих рівнянь

$$y_{n+1} - y_n = \Delta y_n = f_n(y_n), \quad n \in Z, \tag{1}$$

тут $f_n(y_n) = f(n, y_n)$ — d - мірна вектор функція, $y_n \in R^d$.

Определение 1. Скажемо, що система (1) має властивість конвергенції, якщо

1) існує єдиний її розв'язок η_n, визначений і обмежений при $n \in Z$, тобто

$$\sup_{n\in Z} |\eta_n| < \infty;$$

2) розв'язок η_n асимптотично стійкий в цілому, тобто для довільного розв'язку $y_n(n_0, y)$ $(y_{n_0}(n_0, y_0) = y_0)$ системи (1) виконується властивість

$$\lim_{n\to\infty} [y_n(n_0, y) - \eta_n] = 0.$$

В цьому випадку можна сказати, що розв'язок η_n є граничним розв'язком системи (1). В даній роботі і встановлюються умови конвергентності системи типу (1).

З приводу даного означення зробимо два зауваження.

Замечание 1. Якщо система (1) має властивість конвергенції, то всі її розв'язки гранично обмежені, тобто існує додатне число R, що для кожного розв'язку $y_n(n_0, y)$ системи (1) існує $T = T(n_0, y)$, що при $n > T$, $|y_n(n_0, y_0)| < R$.

Замечание 2. Якщо права частина $f_n(y_n)$ системи (1) ω- періодична по n, тобто $f_{n+\omega}(y) \equiv f_n(y)$, $(\omega \in Z)$, то розв'язок η_n конвергентної системи буде ω-періодичний.

Дійсно, нехай

$$f_{n+\omega}(y) \equiv f_n(y).$$

Розглянемо вектор-функцію $\eta_{n+\omega}$. Маємо

$$\eta_{n+1+\omega} - \eta_{n+\omega} = f_{n+\omega}(\eta_{n+\omega}) = f_n(\eta_{n+\omega}).$$

Отже, $\eta_{n+\omega}$ також є розв'язком системи (1) і причому обмеженим. А так як система з конвергенцією має єдиний обмежений розв'язок, то $\eta_{n+\omega} \equiv \eta_n$, тобто η_n є ω-періодичним розв'язком.

В подальшому нам знадобляться наступні леми.

Лемма 1. *Якщо функція $f_n(y)$ задовольняє за змінною y в області D умову Ліпшиця, то розв'язки $y_n(n_0, y_0)$ неперервно залежать від y_0 до моменту його виходу з області D.*

Доказательство. Доведення даної леми цілком аналогічне відповідному результату з [3]. □

Лемма 2. *Нехай для системи* (1) *виконуються умови:*

1) $\exists R > 0$, що при $|y| \leq R$,

$$|y + f_n(y)| \leq R, \tag{2}$$

при $n \in Z$;

2) функція $f_n(y)$ при $|y| \leq R$ задовольняє по змінній y умову Ліпшиця.

Тоді система (1) *має принаймні один розв'язок η_n, що визначений при всіх $n \in Z$ і задовольняє умову:*

$$|\eta_n| \leq R,\ \forall n \in Z, \tag{3}$$

тобто є обмеженим.

Доказательство. Позначимо через $y_n(n_0, y)$ розв'язок системи (1), що при $n = n_0$ приймає значення y. Розглянемо розв'язок $y_n(-1, y)$, де $|y| \leq R$. З умови (2) отримуємо тоді, що $|y_0(-1, y)| \leq R$. Отже, всі розв'язки системи (1), що в момент $n = -1$ починаються в кулі радіуса R, в момент $n = 0$ потрапляють в цю ж кулю.

Аналогічно для розв'язку $y_n(-2, y)$, $|y| \leq R$ маємо $|y_{-1}(-2, y)| \leq R$.

Отже, для довільного $n_0 = -1, -2, ...$ маємо властивість: якщо розв'язок $y_n(n_0, y)$ в момент n_0 знаходився в кулі радіуса R, то і в момент $n = n_0 + 1$ він також там лежить.

Позначимо через S_{n_0} множину значень розв'язків системи (1) в момент $n = 0$, які в момент $n = n_0$ стартували з кулі радіуса R. Тобто, множина S_{n_0} складається з точок $y_0(n_0, y)$, де $|y| \leq R$.

Очевидне включення

$$S_{n_0} \supset S_{n_0 - 1}. \tag{4}$$

З неперервної залежності в області $|y| \leq R$ розв'язків $y_n(n_0, y)$ від початкових даних випливає, що всі S_{n_0} — замкнуті, а тому з (4) маємо, що $\bigcap\limits_{n_0} S_{n_0} \neq \emptyset$.

Нехай $y \in \bigcap\limits_{n_0} S_{n_0}$. Розглянемо $y_n(0, y)$ — розв'язок системи (1), що при $n = 0$ приймає значення y. З побудови S_{n_0} випливає, що $y_n(0, y)$ визначений при $n \geq n_0$, для довільного $n_0 = -1, -2, ...$ і задовольняє нерівність $|y_n(0, y_0)| \leq R$ при $n = n_0$, $n_0 + 1$, ..., 0.

Отже, в силу довільності n_0 він визначений для всіх від'ємних цілих чисел і задовольняє нерівності

$$|y_n(0, y_0)| \leq R. \tag{5}$$

Продовжуваність цього розв'язку вправо з оцінкою (5) очевидна.

Лема доведена. □

3. Основні результати

Наведемо тепер два результати про умови конвергентності, що є основними результатами роботи. Перший з них стосується лінійних систем.

Теорема 1. *Нехай система* (1) *має вид*

$$y_{n+1} - y_n = Ay_n + f_n, \tag{6}$$

де A *— стала* $(d \times d)$ *— матриця і* $f_n = f(n)$ *— вектор функція.*

Тоді при виконанні умов:

1) $\|E + A\| = d < 1$*;*

2) існує $M > 0$*, що* $|f_n| \leq M$ *при* $n \in Z$*; система* (6) *має властивість конвергенції, причому*

$$\eta_n = \sum_{k=-\infty}^{n} (E + A)^{n-k} f_{k-1} \tag{7}$$

являє собою єдиний обмежений розв'язок системи (6).

Доказательство. Покажемо, що функція, визначена формулою (7), є розв'язком системи (6). Спочатку перевіримо обмеженість функції (7). Дійсно,

$$|\eta_n| = \left| \sum_{k=-\infty}^{n} (E + A)^{n-k} f_{k-1} \right| \leq M \sum_{k=-\infty}^{n} \|E + A\|^{n-k} \leq$$

$$\leq M \sum_{k=-\infty}^{n} d^{n-k} = M \sum_{m=0}^{\infty} d^m = \frac{M}{1-d}.$$

Тепер покажемо, що (7) задовольняє (6). Для цього перевіримо виконання рівності

$$\sum_{k=-\infty}^{n+1} (E + A)^{n+1-k} f_{k-1} - \sum_{k=-\infty}^{n} (E + A)^{n-k} f_{k-1} = A \sum_{k=-\infty}^{n} (E + A)^{n-k} f_{k-1} + f_n,$$

яка рівносильна виконанню наступної

$$\sum_{k=-\infty}^{n+1} (E + A)^{n+1-k} f_{k-1} = (E + A) \sum_{k=-\infty}^{n} (E + A)^{n-k} f_{k-1} + f_n,$$

або

$$\sum_{k=-\infty}^{n} (E + A)^{n+1-k} f_{k-1} + (E + A)^0 f_n = \sum_{k=-\infty}^{n} (E + A)^{n+1-k} f_{k-1} + f_n,$$

що є тотожністю.

Отже, η_n, визначений формулою (7), є обмеженим на Z розв'язком системи (6).

Те, що обмежений на Z розв'язок системи (6) єдиний, випливає з того, що різниця двох обмежених розв'язків неоднорідної системи (6) є обмеженим розв'язком відповідної однорідної системи

$$\Delta x_n = A x_n, \tag{8}$$

що не має нетривіальних, обмежених на Z розв'язків. Дійсно, якщо ξ_n — інший обмежений на Z розв'язок системи (6), то з представлення розв'язків системи (8) у вигляді

$$x_n = (E + A)^{n-n_0} x_0 \tag{9}$$

маємо, що

$$|\eta_n - \xi_n| \le \|E + A\|^{n-n_0} \left|\eta_{n_0} - \xi_{n_0}\right|. \tag{10}$$

Фіксуючи тепер n, та переходячи до границі в (10) при $n_0 \to \infty$ отримаємо, що

$$|\eta_n - \xi_n| \le 0 \ \ \forall n \in Z.$$

Останнє й доводить єдиність обмеженого на Z розв'язку системи (6).

Доведемо тепер асимптотичну стійкість в цілому розв'язку y_n. Нехай y_n — довільний розв'язок неоднорідної системи (6). Тоді з (6) і (9) отримуємо

$$|y_n - \eta_n| \le \|E + A\|^{n-n_0} |y_{n_0} - \eta_{n_0}|,$$

при $n \ge n_0$, а отже, $\lim\limits_{n\to\infty} |y_n - \eta_n| = 0$, що і означає конвергентність системи (6). □

Відносно конвергентності нелінійних систем (1) справедлива наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови:*

1) існує $R > 0$, що при $|y| \le R$

$$|y + f_n(y)| \le R,$$

при довільному $n \in Z$;

2) функція $f(n, y)$ диференційовна по y при $y \in R^d$ і

$$\sup_{y\in R^d} \left\| E + \frac{\partial f_n}{\partial y}(y) \right\| = l < 1, \ \ \forall n \in Z. \tag{11}$$

Тоді система (1) має властивість конвергенції.

Доказательство. З умови 1) теореми, в силу леми 2, випливає існування обмеженого на $n \in Z$ розв'язку η_n системи (1), що задовольняє умову $\sup\limits_{n\in Z} |\eta_n| \le R$.

Для доведення теореми встановимо єдиність такого розв'язку і його асимптотичну стійкість в цілому.

Нехай y_n — довільний розв'язок системи (1), визначений початковою умовою $y_{n_0} = y$. Покладемо $x_n = y_n - \eta_n$. Маємо

$$x_{n+1} - x_n = y_{n+1} - \eta_{n+1} - y_n + \eta_n = y_{n+1} - y_n - (\eta_{n+1} - \eta_n) = f_n(y_n) - f_n(\eta_n),$$

Використовуючи аналог формули Лагранжа [3] отримаємо

$$f_n(y_n) - f_n(\eta_n) = \int_0^1 f'_n(\eta_n + \theta(y_n - \eta_n))d\theta(y_n - \eta_n), \tag{12}$$

де $f'_n(\eta_n + \theta(y_n - \eta_n)) = \frac{\partial f}{\partial z}$, $\theta \in (0, 1)$.

З урахуванням (12) будемо тепер мати

$$|x_{n+1}| = |y_n - \eta_n + f_n(y_n) - f_n(\eta_n)| =$$

$$= \left| y_n - \eta_n + \int_0^1 f'_n(\eta_n + \theta(y_n - \eta_n))d\theta(y_n - \eta_n) \right| =$$

$$= \left| (E + \int_0^1 f'_n(\eta_n + \theta(y_n - \eta_n))d\theta)(y_n - \eta_n) \right| \leq$$

$$\leq |y_n - \eta_n| \left\| E + \int_0^1 f'_n(\eta_n + \theta(y_n - \eta_n))d\theta \right\| =$$

$$= |x_n| \left\| \int_0^1 (E + f'_n(\eta_n + \theta(y_n - \eta_n)))d\theta \right\| \leq$$

$$\leq |x_n| \int_0^1 \| E + f'_n(\eta_n + \theta(y_n - \eta_n)) \| \, d\theta \leq l \, |x_n| \, .$$

В останній оцінці використана умова 2) теореми.

Отже, $|x_n| \leq e^{n-n_0} |x_{n_0}|$, або

$$|y_n - \eta_n| \leq e^{n-n_0} \left| y_{n_0} - \eta_{n_0} \right| . \tag{13}$$

Звідси випливає асимптотична стійкість в цілому розв'язку η_n.

Залишилося довести єдиність розв'язку η_n. Дійсно, нехай існує ще один обмежений на Z розв'язок ξ_n системи (1).

Тоді існує число $C > 0$, що

$$|\eta_n - \xi_n| \leq C, \tag{14}$$

для $n \in Z$.

З (13) і (14) отримуємо, що

$$|\eta_n - \xi_n| \le e^{n-n_0} |\eta_{n_0} - \xi_{n_0}| \le e^{n-n_0} C, \tag{15}$$

для довільного $n \in Z$, $n_0 \in Z$, $n \ge n_0$.

Зафіксуємо в (15) n і перейшовши до границі в (15) при n_0,що прямує до нескінченності, отримаємо:

$$|\eta_n - \xi_n| \le 0,$$

що і доводить єдиність розв'язку η_n.

Отже, згідно означення, система (1) має властивість конвергентності. Теорема доведена. □

В кінці роботи наведемо приклад, що ілюструє теорему 2.

Пример 1. Розглянемо систему типу (1) вигляду

$$\Delta y_n = -\frac{1}{2} + \frac{\sin y}{4}, \tag{16}$$

тобто

$$f_n(y_n) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin y}{4}.$$

Перевіримо виконання умов теореми 2.

Умова 1) випливає з оцінок

$$\left| y - \frac{1}{2} y + \frac{\sin y}{4} \right| \le \frac{|y|}{2} + \frac{|\sin y|}{4} < \frac{|y|}{2} + \frac{|y|}{4} \le |y| \, .$$

Перевіримо виконання умови 2):

$$|1 - f'_n(y)| = \left| 1 - \frac{1}{2} + \frac{\cos y}{4} \right| \le \frac{1}{2} + \frac{1}{4} < 1.$$

Отже, система (1) має властивість конвергенції з розв'язком $\eta_n \equiv 0$.

Список цитируемых источников

1. *Дороговцев А. Я.* Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических систем. — Киев: Вища шк., 1992. — 319 с.
2. *Самойленко А. М., Теплінський Ю. В.* Счетные системы дифференциальных уравнений. — Киев: Наукова думка, 1994. — 312 с.
3. *Станжицький О. М., Ткачук А. М.* Дисипативність розв'язків диференціальних рівнянь та відповідних їм різницевих рівнянь // Укр.мат. журнал. — 2005. — Т. 57, №7. — С. 989–996.
4. *Станжицький О. М., Ткачук А. М.* Про зв'язок між властивостями розв'язків різницевих та відповідних їм диференціальних рівнянь // Укр.мат. журнал. — 2006. — Т. 58, №9. — С. 1249–1256.

5. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. В 2-х томах. — М.: Фазис, 1998. — 489 с.
6. *Grune L.* Asymptotic behavior of dynamical and control systems perturbation and discretization. — Berlin: Springer-Verlag, 2002. — 231 с.
7. *Grune L.* Attraction rates, robustness and discretization of attractors // SIAM. Journ. Numer. Anal. — 2003. — Vol. 41, №6. — P. 2096–2113.
8. *Chueshov I.* Monotone Random Systems — Theory and Applications. — Berlin: Springer-Verlag, 2002. — 236 с.

Получена 17.05.2012