Динамические системы, вып. 28 (2010), 23–34

УДК 517.9:532

Малые движения и нормальные колебания частично диссипативной гидромеханической системы из трех сочлененных гиростатов

Э. И. Батыр, Н. Д. Копачевский

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского,
Симферополь 95007. *E-mail: bei@ukr.net E-mail: kopachevsky@crimea.edu*

Аннотация. В работе исследуется начально-краевая и спектральная задачи о малых колебаниях системы из трех тел. Система представляет собой цепь последовательно соединенных твердых тел. Каждое из тел такой цепи является гиростатом. Формулируется теорема существования решений задачи Коши. Описываются свойства нормальных колебаний. Установлено асимптотическое поведение для ветви собственных значений. Получены утверждения о полноте и базисности системы корневых (собственных и присоединенных) элементов в пространстве Понтрягина Π_6.

Ключевые слова: малые колебания, система трех сочлененных гиростатов, несжимаемая жидкость.

1. Введение

В работе исследуется начально-краевая и спектральная задачи о малых колебаниях системы из трех сочлененных гиростатов, заполненных идеальной либо вязкой жидкостью при наличии либо отсутствии трения в шарнирах.

В случае, когда все полости заполнены идеальной жидкостью и трение во всех шарнирах отсутствет, такая система является консервативной, а в случае, когда все полости заполнены вязкой жидкостью и трение в каждом шарнире учитывается, такую систему естественно считать полностью диссипативной. В данной статье рассмотрен вариант, когда в системе сочлененных гиростатов не все полости заполнены вязкой жидкостью, но хотя бы одна содержит вязкую и хотя бы одна идеальную жидкости; аналогичный вариант рассмотрен и по отношению к трению в шарнирах: хотя бы в одном из них трение есть и хотя бы в одном трение не учитывается.

Отметим еще, что так как количество всех возможных вариантов для частично диссипативной системы из n сочлененных гиростатов равно $2^{2n}-2$, то здесь будет рассмотрен лишь один из них для $n = 3$.

В работе устанавливается теорема существования решений задачи Коши; описываются свойства нормальных колебаний; получены утверждения о полноте и базисности системы корневых элементов в пространстве Понтрягина Π_6 для случая системы из трех гиростатов.

2. Уравнения малых колебаний гидромеханической системы

Рассмотрим систему трех тел $G_k \subset \mathbb{R}^3$, $k = \overline{1,3}$, последовательно соединенных между собой сферическими шарнирами. Первое тело G_1 имеет неподвижную точку O_1, а тела G_k, при $k = 2, 3$ – соответственно точки O_k, соединяющие шарниром тело G_k и G_{k-1}. Тело G_2 содержит полость Ω_2, полностью заполненную идеальной однородной несжимаемой жидкостью плотности $\rho_2 > 0$, а тела G_1 и G_3 имеют соответственно полости Ω_1 и Ω_3, полностью заполненные вязкими жидкостями с коэффициентами динамической вязкости $\mu_1 > 0$ и $\mu_3 > 0$.

Будем считать, что на данную систему тел в состоянии покоя действует однородное гравитационное поле $\vec{g}$, а в процессе малых движений – силовое поле

$$\vec{F} := \vec{g} + \vec{f}(t, x),$$

где $\vec{f}(t, x)$ – малая динамическая добавка к гравитационному полю.

Для описания малых движений системы сочлененных гиростатов введем неподвижную систему координат $O_1x^1x^2x^3$ с ортами $\vec{e}^{\,j}$, $j = \overline{1,3}$, так, чтобы $\vec{g} = -g\vec{e}^{\,3}$. Кроме того, введем подвижные системы координат $O_kx_k^1x_k^2x_k^3$, жестко связанные с телом G_k. Единичные векторы вдоль осей $O_kx_k^j$ обозначим через $\vec{e}_k^{\,j}$, $j = \overline{1,3}$, $k = \overline{1,3}$. Кроме того, будем считать, что центр масс C_k гиростата G_k находится на оси $O_kx_k^3$, $k = \overline{1,3}$, а в состоянии покоя все точки O_k и C_k расположены на одной вертикальной оси, $k = \overline{1,3}$.

Положение подвижной системы координат $O_kx_k^1x_k^2x_k^3$ относительно неподвижной системы $O_1x^1x^2x^3$ в процессе малых движений гидромеханической системы будем задавать малым вектором углового перемещения

$$\vec{\delta}_k(t) = \sum_{j=1}^{3} \delta_k^j(t)\vec{e}_k^{\,j}, \quad k = \overline{1,3}.$$

Тогда угловая скорость $\vec{\omega}_k(t)$ тела G_k будет, очевидно, равна $d\vec{\delta}_k/dt$, а угловое ускорение этого тела - величине $d^2\vec{\delta}_k/dt^2 = d\vec{\omega}_k/dt$.

Обозначим через m_k массу k-го тела, а через $\vec{r}_k$ - радиус-вектор, идущий из полюса O_k в любую точку тела G_k. Введем также векторы $\vec{h}_k = \overrightarrow{O_kO_{k+1}}$, $k = 1, 2$.

Предполагается, что в шарнире O_k сила трения пропорциональна разности угловых скоростей примыкающих гиростатов G_k и G_{k-1}, а коэффициент пропорциональности $\alpha_k \geq 0$, $k = \overline{1,3}$, т.е. трение не во всех шарнирах присутствует, причем для некоторых k будет $\alpha_k > 0$.

Приведем теперь для каждого из гиростатов G_k линеаризованное уравнение изменения кинетического момента относительно точки O_k, $k = 1, 2, 3$, а также следствия из этой совокупности уравнений. Вид этих уравнений можно найти в

[5], стр. 129-132, с.145, с.336, а также в [2]–[4]. Из этих уравнений следует, что левые и правые части последующего уравнения целиком входят в левые и правые части предыдущего. Тогда, беря соответствующие разности левых и правых частей, а также последнее уравнение, приходим к следующим уравнениям движения трех сочлененных гиростатов:

$$\int\limits_{G_1} \vec{r}_1 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1\right) dm_1 + \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} \vec{r}_1 \times \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} d\Omega_1 + \\ + \int\limits_{G_2} \vec{h}_1 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2 + \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t}\right) dm_2 + \\ + \int\limits_{G_3} \vec{h}_1 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3 + \frac{\partial \vec{u}_3}{\partial t}\right) dm_3 + \\ + \alpha_1 \vec{\omega}_1 - \alpha_2 \left(\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1\right) + g \left(m_1 l_1 + \left(m_2 + m_3\right) h_1\right) P_2 \vec{\delta}_1 = \\ = \int\limits_{G_1} \vec{r}_1 \times \vec{f}_1 dm_1 + \int\limits_{G_2} \vec{h}_1 \times \vec{f}_2 dm_2 + \int\limits_{G_3} \vec{h}_1 \times \vec{f}_3 dm_3 \equiv \vec{M}_1; \quad (2.1)$$

$$\int\limits_{G_2} \vec{r}_2 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2\right) dm_2 + \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} \vec{r}_2 \times \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t} d\Omega_2 + \int\limits_{G_2} \vec{r}_2 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1\right) dm_2 + \\ + \int\limits_{G_3} \vec{h}_2 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3 + \frac{\partial \vec{u}_3}{\partial t}\right) dm_3 + \\ + \alpha_1 \left(\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1\right) - \alpha_2 \left(\vec{\omega}_3 - \vec{\omega}_2\right) + g \left(m_2 l_2 + m_3 h_2\right) P_2 \vec{\delta}_2 = \\ = \int\limits_{G_2} \vec{r}_2 \times \vec{f}_2 dm_2 + \int\limits_{G_3} \vec{h}_2 \times \vec{f}_3 dm_3 \equiv \vec{M}_2; \quad (2.2)$$

$$\int\limits_{G_3} \vec{r}_3 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3\right) dm_3 + \rho_3 \int\limits_{\Omega_3} \vec{r}_3 \times \frac{\partial \vec{u}_3}{\partial t} d\Omega_3 + \\ + \int\limits_{G_3} \vec{r}_3 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2\right) dm_3 + \alpha_3 \left(\vec{\omega}_3 - \vec{\omega}_2\right) + g m_3 l_3 P_2 \vec{\delta}_3 = \\ = \int\limits_{G_3} \vec{r}_3 \times \vec{f}_3 dm_3 \equiv \vec{M}_3; \quad (2.3)$$

В формулах (2.1)–(2.3): $l_k := |\overrightarrow{O_k C_k}|$ — расстояние от O_k до центра масс C_k гиростата G_k,

$$P_2 \vec{\delta}_k := \sum_{j=1}^{2} \delta_k^j \vec{e}_k^{\,j}$$

— проекция углового перемещения $\vec{\delta}_k$ на плоскость $O_k x_k^1 x_k^2$, $k = \overline{1,3}$. Далее, через $\vec{u}_k = \vec{u}_k(t,x)$, $x \in \Omega_k$, обозначено поле относительной скорости движения жидкости в области Ω_k, $k = \overline{1,3}$. Наконец, использовано обозначение

$$\int\limits_{G_k} (\ldots) dm_k := \int\limits_{\Omega_{0k}} (\ldots) \rho_{0k} d\Omega_k + \int\limits_{\Omega_k} (\ldots) \rho_k d\Omega_k,$$

где $\Omega_{0k} \subset G_k$ — область, занятая твердым телом постоянной плотности ρ_{0k}, а Ω_k — область, занятая жидкостью постоянной плотности ρ_k, $k = \overline{1,3}$. При этом, конечно же, нужно формально считать что в уравнениях (2.1)–(2.3) $\vec{u}_k \equiv \vec{0}$ в области Ω_{0k}, $k = \overline{1,3}$.

Приведем теперь линеаризованные уравнения движения жидкости в каждой из полостей Ω_k. Для полости с идеальной жидкостью используется уравнение Эйлера, а для полостей с вязким наполнением — уравнения Навье-Стокса. В качестве граничных условий на границах $\partial\Omega_k =: S_k$ выступают условия непротекания для идеальной жидкости и условия прилипания для вязких жидкостей. Каждое уравнение записано в неинерциальной системе координат $O_k x_k^1 x_k^2 x_k^3$, жестко связанной с телом G_k, $k = \overline{1,3}$. Вид этих уравнений можно найти в [5], а также в [2]–[4]. Имеем

$$\rho_1 \left(\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1 \right) = -\nabla p_1 + \mu_1 \triangle \vec{u}_1 + \rho_1 \vec{f}_1,$$
$$\operatorname{div} \vec{u}_1 = 0 \ \ (\text{в } \Omega_1\,), \ \ \vec{u}_1 = \vec{0} \ \ (\text{на } S_1\,); \tag{2.4}$$

$$\rho_2 \left(\frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2 \right) = -\nabla p_2 + \rho_2 \vec{f}_2,$$
$$\operatorname{div} \vec{u}_2 = 0 \ \ (\text{в } \Omega_2\,), \ \ \vec{u}_2 \cdot \vec{n}_2 = 0 \ \ (\text{на } S_2\,); \tag{2.5}$$

$$\rho_3 \left(\frac{\partial \vec{u}_3}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3 \right) = -\nabla p_3 + \mu_3 \triangle \vec{u}_3 + \rho_3 \vec{f}_3,$$
$$\operatorname{div} \vec{u}_3 = 0 \ \ (\text{в } \Omega_3\,), \ \ \vec{u}_3 = \vec{0} \ \ (\text{на } S_3\,). \tag{2.6}$$

Для полной математической формулировки исследуемой начально-краевой задачи о малых движениях сочлененных гиростатов к уравнениям (2.1)—(2.6) следует добавить кинематические условия, которые удобно записать в виде:

$$\frac{d}{dt} P_2 \vec{\delta}_k = P_2 \vec{\omega}_k, \quad \frac{d}{dt} \vec{\delta}_k^3 = \vec{\omega}_k^3, \quad k = \overline{1,3}, \tag{2.7}$$

а также начальные условия

$$\vec{u}_k(0,x) = \vec{u}_k^0(x), \quad x \in \Omega_k, \quad \vec{\omega}_k(0) = \vec{\omega}_k^0, \quad \vec{\delta}_k(0) = \vec{\delta}_k^0, \quad k = \overline{1,3}. \tag{2.8}$$

Таким образом, в данной задаче искомыми являются соленоидальные векторные поля $\vec{u}_k(t,x)$, поля давлений $p_k(t,x)$, угловые скорости $\vec{\omega}_k(t)$ и угловые перемещения гиростатов $\vec{\delta}_k(t)$, $k=\overline{1,3}$. Их требуется найти из уравнений движения гиростатов (2.1)—(2.3), уравнений (2.4)—(2.6) движения жидкостей в полостях Ω_k, кинематических соотношений (2.7) и начальных условий (2.8).

Далее считаем, что границы $\partial\Omega_k = S_k$ областей Ω_k достаточно гладкие, например, дважды непрерывно дифференцируемы, т.е.

$$S_k = \partial\Omega_k \in C^2, \quad k=\overline{1,3}. \tag{2.9}$$

3. Закон баланса полной энергии

Для классического решения задачи (2.1)–(2.8) справедливо тождество:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Bigg\{\int\limits_{G_1}|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1+\vec{u}_1|^2dm_1+\int\limits_{G_2}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2+\vec{u}_2|^2dm_2+\\ +\int\limits_{G_3}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2+\vec{\omega}_3\times\vec{r}_3+\vec{u}_3|^2dm_3\Bigg\}+\\ +\frac{1}{2}g\frac{d}{dt}\Big\{[m_1l_1+(m_2+m_3)h_1]|P_2\vec{\delta}_1|^2+(m_2l_2+m_3h_2)|P_2\vec{\delta}_2|^2+m_3l_3|P_2\vec{\delta}_3|^2\Big\}=\\ =-\Big\{\alpha_1|\vec{\omega}_1|^2+\alpha_2|\vec{\omega}_2-\vec{\omega}_1|^2+\alpha_3|\vec{\omega}_3-\vec{\omega}_2|^2+\mu_1\int\limits_{\Omega_1}|rot\,\vec{u}_1|^2d\Omega_1+\mu_3\int\limits_{\Omega_3}|rot\,\vec{u}_3|^2d\Omega_3\Big\}+\\ +\sum_{k=1}^{3}\vec{M}_k\cdot\vec{\omega}_k+\sum_{k=1}^{3}\rho_k\int\limits_{\Omega_k}\vec{f}_k\cdot\vec{u}_kd\Omega_k.\end{gathered} \tag{3.1}$$

Это соотношение есть закон баланса полной энергии изучаемой гидромеханической системы, записанный в дифференциальной форме. Действительно, слева в (3.1) стоит скорость изменения по времени полной (кинетической + потенциальной) энергии системы, а справа — мощность сил трения плюс мощность внешних сил, обусловленная действием дополнительных к гравитационным сил $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$ соответственно, а также моментов сил $\vec{M}_1$, $\vec{M}_2$ и $\vec{M}_3$, которые выражены через эти силы.

4. Начально-краевая задача о малых движениях системы сочлененных гиростатов

Задача (2.1)—(2.8) исследуется методами функционального анализа, в частности, теорией полугрупп операторов, теорией линейных эволюционных уравнений в гильбертовом пространстве и др.

Будем считать искомые функции $\vec{u}_k(t,x)$, $\nabla p_k(t,x)$ функциями переменной t со значениями в гильбертовом пространстве $\vec{L}_2(\Omega_k)$ с нормой

$$\|\vec{u}_k\|^2_{\vec{L}_2(\Omega_k)} := \int\limits_{\Omega_k} |\vec{u}_k|^2 d\Omega_k, \quad k=\overline{1,3}, \tag{4.1}$$

и соответствующим скалярным произведением. Тогда, в силу ортогонального разложения (см., например, [6], с. 38)

$$\vec{L}_2(\Omega_k) = \vec{J}_0(\Omega_k) \oplus \vec{G}(\Omega_k), \tag{4.2}$$

$$\vec{J}_0(\Omega_k) := \big\{\vec{u}_k \in \vec{L}_2(\Omega_k):\ \mathrm{div}\vec{u}_k = 0\ (\text{в } \Omega_k),\ \vec{u}_k\cdot\vec{n} =: u_{k,n} = 0\ (\text{на } S_k = \partial\Omega_k)\big\},$$
$$\vec{G}(\Omega_k) := \big\{\vec{u}_k \in \vec{L}_2(\Omega_k): \vec{u}_k = \nabla p_k\big\},$$

приходим к выводу, что в уравнениях (2.4)–(2.6)

$$\vec{u}_k \in \vec{J}_0(\Omega_k),\ \nabla p_k \in \vec{G}(\Omega_k),\ k=\overline{1,3}. \tag{4.3}$$

Введем еще пространства (см. [6])

$$\vec{J}_0^1(\Omega_k) := \Big\{\vec{u}_k \in L_2(\Omega_k): \int\limits_{\Omega_k} |\mathrm{rot}\vec{u}_k|^2 d\Omega_k =: \|\vec{u}_k\|^2_{\vec{J}_0^1(\Omega_k)} < \infty,$$
$$\mathrm{div}\vec{u}_k = 0\ (\text{в } \Omega_k),\ \vec{u}_k = 0\ (\text{на } S_k)\Big\},\ k=1,3, \tag{4.4}$$

в которых квадрат нормы характеризует мощность диссипативных сил, действующих в вязкой несжимаемой жидкости, находящейся в области Ω_k.

Обозначим через $P_{0,k}: \vec{L}_2(\Omega_k) \to \vec{J}_0(\Omega_k)$ ортопроектор на $\vec{J}_0(\Omega_k)$, а через $P_{G,k} = (I_k - P_{0,k})$ — ортопроектор на $\vec{G}(\Omega_k)$.

Введем операторы Стокса A_k, $k=1,3$ (см. [6], а также [5, с. 111–112]), действующие по закону

$$A_k\vec{u}_k := -P_{0,k}\triangle\vec{u}_k, \tag{4.5}$$

$$\mathcal{D}(A_k) := \big\{\vec{u}_k \in \vec{H}^2(\Omega_k): \mathrm{div}\vec{u}_k = 0\ (\text{в } \Omega_k), \vec{u}_k = 0\ (\text{на } S_k = \partial\Omega_k)\big\} \subset$$
$$\subset \vec{J}_0^1(\Omega_k) \subset \vec{J}_0(\Omega_k).$$

Действуя ортопроекторами $P_{0,k}$, $k=\overline{1,3}$, на обе части уравнений (2.4), (2.5) и (2.6) соответственно, будем иметь (после замены $\partial/\partial t$ на d/dt)

$$\rho_1\left(\frac{d\vec{u}_1}{dt} + P_{0,1}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_1\right)\right) = -\mu_1 A_1\vec{u}_1 + \rho_1 P_{0,1}\vec{f}_1(t), \tag{4.6}$$

$$\rho_2\left(\frac{d\vec{u}_2}{dt} + P_{0,2}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_2\right)\right) = \rho_2 P_{0,2}\vec{f}_2(t), \tag{4.7}$$

$$\rho_3\left(\frac{d\vec{u}_3}{dt}+P_{0,3}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3\right)\right)=-\mu_3A_3\vec{u}_3+\rho_3P_{0,3}\vec{f}_3\left(t\right). \quad (4.8)$$

Аналогичные проектирования на подпространства $\vec{G}\left(\Omega_k\right)$ приводят к соотношениям

$$\rho_1P_{G,1}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_1\right)=-\nabla p_1+\mu_1P_{G,1}\triangle\vec{u}_1+\rho_1P_{G,1}\vec{f}_1, \quad (4.9)$$

$$\rho_2P_{G,2}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_2\right)=-\nabla p_2+\rho_2P_{G,2}\vec{f}_2, \quad (4.10)$$

$$\rho_3P_{G,3}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3\right)=-\nabla p_3+\mu_3P_{G,3}\triangle\vec{u}_3+\rho_3P_{G,3}\vec{f}_3. \quad (4.11)$$

Из (4.9)–(4.11) следует, что если поля $\vec{u}_k(t,x)$ и функции $\vec{\omega}_k(t)$ уже найдены, то поля $\nabla p_k(t,x)$ находятся непосредственно, и они не входят в другие уравнения исследуемой проблемы. Поэтому в дальнейшем будем исследовать систему уравнений (2.1)–(2.3), (4.6)–(4.8), (2.7) с начальными условиями (2.8).

Соотношение (4.7) позволяет вычислить непосредственно поле $d\vec{u}_2/dt$ через $d\vec{\omega}_1/dt$, $d\vec{\omega}_2/dt$ и $\vec{f}_2$. Подставим это выражение для $d\vec{u}_2/dt$ в уравнения (2.1) и (2.2).

Проведя ряд преобразований, получим, что задача (2.1)–(2.3), (4.6)–(4.8), (2.7) с начальными условиями (2.8) приводится к задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\widetilde{\mathcal{H}}=\left(\vec{J}_0\left(\Omega_1\right)\oplus\vec{J}_0\left(\Omega_3\right)\right)\oplus\left(\mathbb{C}^3\right)^3\oplus\left(\mathbb{C}^2\right)^3$ с соответствующей нормой:

$$\begin{pmatrix}C_{11}&C_{12}&0\\C_{21}&C_{22}&0\\0&0&I\end{pmatrix}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\vec{u}\\\vec{\omega}\\\vec{\eta}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}A_{11}&0&0\\0&A_{22}&ig^{1/2}P_2B_{22}^{1/2}\\0&ig^{1/2}B_{22}^{1/2}P_2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{u}\\\vec{\omega}\\\vec{\eta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{f}\\\vec{M}\\\vec{0}\end{pmatrix},$$

$$\vec{u}(0)=\vec{u}^0,\ \vec{\omega}(0)=\vec{\omega}^0,\ \vec{\eta}(0)=\vec{\eta}^0:=-ig^{1/2}B_{22}^{1/2}P_2\vec{\delta}^0, \quad (4.12)$$

а также к тривиальной проблеме

$$\frac{d}{dt}\vec{\delta}_k^3=\vec{\omega}_k^3,\ \vec{\delta}_k^3(0)=\vec{\delta}_k^{3,0},\ k=\overline{1,3}. \quad (4.13)$$

В задаче (4.12) искомыми функциями t являются следующие вектор-столбцы, составленные из вектор-функций:

$$\vec{\omega}:=(\vec{\omega}_1;\,\vec{\omega}_2;\,\vec{\omega}_3)^\tau\in\left(\mathbb{C}^3\right)^3,\ \vec{\delta}:=(\vec{\delta}_1;\,\vec{\delta}_2;\,\vec{\delta}_3)^\tau\in\left(\mathbb{C}^3\right)^3, \quad (4.14)$$

$$\vec{u}:=(\vec{u}_1;\,\vec{u}_3)^\tau\in\left(\mathcal{D}\left(A_1\right)\oplus\mathcal{D}\left(A_3\right)\right)\subset\left(\vec{J}_0^1\left(\Omega_1\right)\oplus\vec{J}_0^1\left(\Omega_3\right)\right)=$$

$$=\left(\mathcal{D}\left(A_1^{1/2}\right)\oplus\mathcal{D}\left(A_3^{1/2}\right)\right)\subset\left(\vec{J}_0\left(\Omega_1\right)\oplus\vec{J}_0\left(\Omega_3\right)\right),$$

где символ $(\cdot;\cdot)^\tau$ означает транспонирование (строки).

Операторные матрицы в задаче (4.12) заданы посредством следующих формул:

$$C_{11}\vec{u} := (\rho_1\vec{u}_1;\ \rho_3\vec{u}_3)^\tau\,; \tag{4.15}$$

$$C_{12}\vec{\omega} := \begin{pmatrix} \rho_1 P_{0,1}\left(\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1\right) \\ \rho_3 P_{0,3}\left(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2+\vec{\omega}_3\times\vec{r}_3\right)\end{pmatrix}; \tag{4.16}$$

$$C_{21}\vec{u} := \begin{pmatrix} \rho_1\int\limits_{\Omega_1}(\vec{r}_1\times\vec{u}_1)\,d\Omega_1+\rho_3\int\limits_{\Omega_3}\left(\vec{h}_1\times\vec{u}_3\right)d\Omega_3 \\ \rho_3\int\limits_{\Omega_3}\left(\vec{h}_2\times\vec{u}_3\right)d\Omega_3 \\ \rho_3\int\limits_{\Omega_3}(\vec{r}_3\times\vec{u}_3)\,d\Omega_3 \end{pmatrix}; \tag{4.17}$$

$$C_{22}\vec{\omega} := \begin{pmatrix} \int\limits_{G_1}\vec{r}_1\times(\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1)\,dm_1+\rho_{02}\int\limits_{\Omega_{02}}\vec{h}_1\times\left(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2\right)d\Omega_{02}+ \\ +\rho_2\int\limits_{\Omega_2}\vec{h}_1\times\left[P_{G,2}\left(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2\right)\right]d\Omega_2+ \\ +\int\limits_{G_3}\vec{h}_1\times\left(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2+\vec{\omega}_3\times\vec{r}_3\right)dm_3; \\ \rho_{02}\int\limits_{\Omega_{02}}\vec{r}_2\times\left(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2\right)d\Omega_{02}+ \\ +\rho_2\int\limits_{\Omega_2}\vec{r}_2\times\left[P_{G,2}\left(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2\right)\right]d\Omega_2+ \\ +\int\limits_{G_3}\vec{h}_2\times\left(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2+\vec{\omega}_3\times\vec{r}_3\right)dm_3; \\ \int\limits_{G_3}\vec{r}_3\times\left(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2+\vec{\omega}_3\times\vec{r}_3\right)dm_3 \end{pmatrix}; \tag{4.18}$$

$$A_{11} := diag(\mu_1A_1;\mu_3A_3),\quad A_{22} := \begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2 & -\alpha_2 & 0 \\ -\alpha_2 & \alpha_2+\alpha_3 & -\alpha_3 \\ 0 & -\alpha_3 & \alpha_3\end{pmatrix}; \tag{4.19}$$

$$B_{22} := diag(m_1l_1+(m_2+m_3)h_1; m_2l_2+m_3h_2; m_3l_3). \tag{4.20}$$

Отметим, что в (4.12) $\vec{f}=\vec{f}(t)$ и $\vec{M}=\vec{M}(t)$ — известные функции, определяемые заданными функциями:

$$\vec{f} := \left(\rho_1P_{0,1}\vec{f}_1;\ \rho_3P_{0,3}\vec{f}_3\right)^\tau, \tag{4.21}$$

$$\vec{M} := \begin{pmatrix} \int\limits_{G_1}\vec{r}_1\times\vec{f}_1dm_1+\rho_{02}\int\limits_{\Omega_{02}}\vec{h}_1\times\vec{f}_{02}d\Omega_{02}+\rho_2\int\limits_{\Omega_2}\vec{h}_1\times\left(P_{G,2}\vec{f}_2\right)d\Omega_2+ \\ +\int\limits_{G_3}\vec{h}_1\times\vec{f}_3dm_3; \\ \rho_{02}\int\limits_{\Omega_{02}}\vec{r}_2\times\vec{f}_{02}d\Omega_{02}+\rho_2\int\limits_{\Omega_2}\vec{r}_2\times\left(P_{G,2}\vec{f}_2\right)d\Omega_2+\int\limits_{G_3}\vec{h}_2\times\vec{f}_3dm_3; \\ \int\limits_{G_3}\vec{r}_3\times\vec{f}_3dm_3 \end{pmatrix}. \tag{4.22}$$

Сформулируем свойства операторных матриц уравнения (4.12).

Лемма 1. *Операторная матрица* $C = (C_{jk})_{j,k=1}^{2}$, *действующая в пространстве* $\mathcal{H} := \Big(\vec{J}_0\,(\Omega_1) \oplus \vec{J}_0\,(\Omega_3)\Big) \oplus (\mathbb{C}^3)^3$ *с нормой*

$$\|(\vec{u};\,\vec{\omega})^{\tau}\|^2_{\mathcal{H}} := \int\limits_{\Omega_1} |\vec{u}_1|^2 d\Omega_1 + \int\limits_{\Omega_3} |\vec{u}_3|^2 d\Omega_3 + \sum_{k=1}^{3} |\vec{\omega}_k|^2, \tag{4.23}$$

является ограниченным положительно определенным оператором.

Некоторые элементы операторной матрицы $\mathcal{A}$ связаны с диссипацией энергии в гидросистеме: они обусловлены действием вязких сил в областях Ω_k и действием сил трения в шарнирах.

Лемма 2. *Операторная матрица*

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & ig^{1/2}P_2B_{22}^{1/2} \\ 0 & ig^{1/2}B_{22}^{1/2}P_2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.24}$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) := \mathcal{D}(A_{11}) \oplus \left(\mathbb{C}^3\right)^3 \oplus \left(\mathbb{C}^2\right)^3, \tag{4.25}$$

является максимальным аккретивным оператором, действующим в пространстве $\widetilde{\mathcal{H}}$.

Эти свойства операторных коэффициентов в уравнении (4.12) позволяют доказать теорему о существовании и единственности сильного решения задачи Коши (4.12), а затем и теорему о существовании сильного решения исходной начально-краевой задачи (2.1)—(2.8).

Определение 1. Будем говорить, что задача (2.1)—(2.8) имеет сильное решение на отрезке $[0,T]$, если для этого решения в уравнениях движения (2.4)—(2.6) все слагаемые являются непрерывными функциями $t \in [0,T]$ со значениями в $\vec{L}_2(\Omega_k)$ соответственно, $k = 1,2,3$, а слагаемые в уравнениях (2.1)—(2.3) – непрерывными функциями $t \in [0,T]$ со значениями в $\mathbb{R}^3$. $\square$

Теорема 1. *Пусть в задаче* (2.1)—(2.8) *выполнены условия*

$$\vec{u}_1^0 \in \mathcal{D}(A_1) \subset \vec{J}_0^1(\Omega_1),\ \vec{u}_2^0 \in \vec{J}_0(\Omega_2),\ \vec{u}_3^0 \in \mathcal{D}(A_3) \subset \vec{J}_0^1(\Omega_3),$$

$$\vec{f}_k(t,x) \in C^{\alpha}\Big([0,\ T];\ \vec{L}_2(G_k)\Big),\ 0 < \alpha \le 1,\ k = \overline{1,3},$$

$$\vec{\omega}_k^0 \in \mathbb{C}^3,\ \vec{\delta}_k^0 \in \mathbb{C}^3,\ k = \overline{1,3}. \tag{4.26}$$

Тогда эта задача имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,\ T]$. $\square$

5. Нормальные колебания системы сочлененных гиростатов

Будем считать, что на систему сочлененных гиростатов не действует дополнительное поле внешних сил, т.е. $\vec{f}(t,x) \equiv \vec{0}$. Движения такого вида будем называть свободными.

Определение 2. Будем говорить, что решение задачи о свободных движениях системы сочлененных гиростатов являются нормальными колебаниями, если искомые функции зависят от t по закону $\exp(-\lambda t)$, т.е.

$$\begin{aligned}\vec{\delta}_k(t) = e^{-\lambda t}\vec{\delta}_k, \quad \vec{\omega}_k(t) = e^{-\lambda t}\vec{\omega}_k, \quad k = \overline{1,3}, \\ \vec{u}_k(t,x) = e^{-\lambda t}\vec{u}_k(x), \quad p_k(t,x) = e^{-\lambda t}p_k(x), \quad k = \overline{1,3}.\end{aligned} \tag{5.1}$$

Для решения вида (5.1) однородной задачи (4.12) приходим к спектральной проблеме вида

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & ig^{1/2}B_{22}^{1/2} \\ 0 & -ig^{1/2}B_{22}^{1/2}P_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{\omega} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{\omega} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

(Здесь в последнем уравнении (4.12) обе его части умножены на -1).

Тривиальная проблема (4.13) соответственно дает соотношение

$$\vec{\omega}_k^3 = -\lambda\vec{\delta}_k^3, \ k = \overline{1,3}. \tag{5.3}$$

Введем искомый элемент $\vec{w} := (\vec{u};\ P_2\vec{\omega};\ \vec{\omega}^3)^\tau$ и перепишем (5.2) в новом блочно-векторном виде

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{w} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{w} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix}, \tag{5.4}$$

$$\widetilde{A}_{11} := \operatorname{diag}(A_{11}; P_2A_{22}P_2; P^3A_{22}P^3), \ \widetilde{A}_{12} := (0; -ig^{1/2}B_{22}^{1/2}; 0), \ \widetilde{A}_{21} = \widetilde{A}_{12}^*; \tag{5.5}$$

$$C := \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12}P_2 & C_{12}P^3 \\ P_2C_{21} & P_2C_{22}P_2 & P_2C_{22}P^3 \\ P^3C_{21} & P^3C_{22}P_2 & P^3C_{22}P^3 \end{pmatrix}, \tag{5.6}$$

где P^3 – дополнительный ортопроектор по отношению к проектору P_2.

Осуществим в (5.4) замену

$$C^{1/2}\vec{w} = \vec{z}. \tag{5.7}$$

Тогда вместо (5.4) приходим к задаче

$$\begin{pmatrix} C^{-1/2}\widetilde{A}_{11}C^{-1/2} & C^{-1/2}\widetilde{A}_{12} \\ \widetilde{A}_{21}C^{-1/2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{z} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{z} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix}, \tag{5.8}$$

где операторная матрица слева необратима.

Введем теперь в (5.8) новый спектральный параметр μ по формуле

$$\lambda = \mu - a, \ a > 0. \tag{5.9}$$

Такая замена приводит к сдвигу спектра на величину $a > 0$ и не изменяет собственных и присоединенных (корневых) элементов задачи (5.8).

Возникает спектральная проблема

$$\begin{pmatrix} C^{-1/2}\widetilde{A}_{11}C^{-1/2} + aI_1 & C^{-1/2}\widetilde{A}_{12} \\ \widetilde{A}_{21}C^{-1/2} & -aI_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{z} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{z} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix}, \tag{5.10}$$

в которой теперь операторная матрица слева является обратимым оператором.

Введем теперь в (5.10) оператор канонической симметрии $\mathcal{J} := \operatorname{diag}(I_1; -I_2)$, $\mathcal{J} = \mathcal{J}^* = \mathcal{J}^{-1}$; тогда коротко задачу можно переписать в виде

$$\mathcal{A}_a \vec{v} = \mu \mathcal{J} \vec{v}, \ \vec{v} := (\vec{z}; \vec{\eta})^{\tau} \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_a), \tag{5.11}$$

$$\mathcal{A}_a := \begin{pmatrix} C^{-1/2}\widetilde{A}_{11}C^{-1/2} + aI_1 & C^{-1/2}\widetilde{A}_{12} \\ \widetilde{A}_{21}C^{-1/2} & -aI_2 \end{pmatrix}, \tag{5.12}$$

а от нее перейти к задаче

$$\mathcal{J}\mathcal{A}_a^{-1}\vec{y} = \nu\vec{y}, \ \vec{y} := \mathcal{A}_a\vec{v}, \ \nu = \mu^{-1} = (\lambda + a)^{-1} \tag{5.13}$$

на собственные значения для компактного $\mathcal{J}$-самосопряженного оператора $\mathcal{J}\mathcal{A}_a^{-1}$, действующего в пространстве $\widetilde{\mathcal{H}} = \left(\vec{J}_0(\Omega_1)\right) \oplus \left(\vec{J}_0(\Omega_3)\right) \oplus (\mathbb{C}^3)^3 \oplus (\mathbb{C}^2)^3$.

Пространство $\widetilde{\mathcal{H}}$, снабженное индефинитной метрикой $[\vec{y}_1, \vec{y}_2] := (\mathcal{J}\vec{y}_1, \vec{y}_2)_{\widetilde{\mathcal{H}}}$, $\forall\, \vec{y}_1, \vec{y}_2 \in \widetilde{\mathcal{H}}$, превращается в пространство Понтрягина Π_6.

Приведем свойства решений исследуемой спектральной задачи:

1^0. Спектр задачи является дискретным и расположен в замкнутой правой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$ симметрично относительно вещественной оси.

2^0. Задача имеет не более 6 пар комплексно сопряженных собственных значений, а также тех вещественных (положительных) собственных значений, которым, кроме собственных, отвечают также присоединенные элементы.

3^0. Асимптотическое поведение ветви положительных собственных значений $\{\lambda_j^+\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$ таково:

$$\lambda_j^+ = \left[\frac{1}{3\pi^2}\left(|\Omega_1|\nu_1^{-3/2} + |\Omega_3|\nu_3^{-3/2}\right)\right]^{-2/3} j^{2/3}[1 + o(1)] \ (j \to \infty). \tag{5.14}$$

4^0. Пространство $\widetilde{\mathcal{H}} = \Pi_6$ разбивается в $\mathcal{J}$-ортогональную сумму двух подпространств, $\Pi_6 = \Pi_+[+]\Pi_-$, $dim\Pi_- \leq 12$, инвариантных для оператора $\mathcal{J}\mathcal{A}_a^{-1}$ (см. (5.13)); в подпространстве Π_+ существует $\mathcal{J}$-ортонормированный базис $\{\vec{y}_j^{\,+}\}_{j=1}^{\infty} \subset$

Π_+, составленный из собственных элементов задачи (5.13), отвечающих положительным собственным значениям $\{\nu_j^+\}_{j=1}^{\infty}$, $\nu_j^+ = 1/(\lambda_j^+ + a)$, $\nu_1^+ \geq \nu_2^+ \geq \cdots$, $\nu_j^+ \to +0$ $(j \to \infty)$; вся совокупность собственных и присоединенных (корневых) элементов задачи (5.13) образует почти $\mathcal{J}$-ортонормированный базис в пространстве Понтрягина $\Pi_6 = \widetilde{\mathcal{H}}$; если задача (5.13) не имеет невещественных собственных значений и присоединенных элементов, то собственные элементы этой задачи образуют $\mathcal{J}$-ортогональный базис во всем пространстве $\Pi_6 = \widetilde{\mathcal{H}}$.

Список цитируемых источников

1. *Азизов Т.Я., Иохвидов И.С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. М., 1986.
2. *Батыр Э.И.* Малые движения системы последовательно сочлененных тел с полостями, содержащими вязкую несжимаемую жидкость // Динамические системы. — Симферополь. — 2001. — Вып. 17. — С. 120–125.
3. *Батыр Э.И.* Малые движения системы последовательно сочлененных тел с полостями, содержащими идеальную несжимаемую жидкость. — //Ученые записки ТНУ.— Симферополь, 2002. — Том 15(54), №2 — С. 5–10.
4. *Батыр Э.И., Дудик О.А., Копачевский Н.Д.* Малые колебания тел с полостями, заполненными несжимаемой вязкой жидкостью / Э.И. Батыр, О.А. Дудик, Н.Д. Копачевский // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2009. Спецвыпуск: Актуальные проблемы математической гидродинамики. С.15-29.
5. *Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. М., 1989.
6. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., 1970.
7. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. 1972. Вып. 4. С.52–73.
8. *Харламов П.В.* Составной пространственный маятник // Механика твердого тела. 1972. Вып. 4. С.73–82.
9. *Iohvidov I.S., Krein M.G., Langer H.* Introduction to the Spectral Theory of Operators in Spaces with an Indefinite Metric. Akademic. Verlag, Berlin, 1982.
10. *Kopachevsky Nikolay D.* Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics / Nikolay D. Kopachevsky, Selim G. Krein.— Vol. 1 : Self – adjoint Problems for an Ideal Fluid. Birkhauser Verlag, Basel – Boston — Berlin, 2001, 384 pp. (Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 128.)
11. *Kopachevsky Nikolay D.* Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics / Nikolay D. Kopachevsky, Selim G. Krein. — Vol. 2: Nonself – adjoint Problems for Viscous Fluids. Birkhauser Verlag, Basel – Boston — Berlin, 2003, 444 pp. (Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 146.)

Получена 11.06.2010