Динамические системы, вып. 23 (2007), 21–30

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 517.9

Про оптимізацію побудови лінійних систем порівняння

Є. В. Івохін

Київський національний університет имені Тараса Шевченка,
Київ 02127. *E-mail: ivohin@univ.kiev.ua*

Анотація. В роботі проведено аналіз систем порівняння В.Д.Фурасова. Показано, що вигляд систем порівняння залежить від вибору функцій Ляпунова, які входять до векторної функції Ляпунова. Доведено твердження, що за умов покращення вибору функцій Ляпунова з урахуванням інтегрального критерію якості, система порівняння може бути покращена з точки зору запасу її стійкості.

Загальні питання. Застосування методу векторних функцій Ляпунова (ВФЛ) для дослідження багатомірних систем лінійних диференціальних рівнянь вигляду

$$x' = Ax, \quad x \in R^N, \tag{1}$$

передбачає розбиття вихідної системи на підсистеми, побудову функцій Ляпунова для кожної підсистеми і аналіз відповідної системи порівняння (СП)[1]

$$y' = Py, \quad y \in R^m, \ m < N. \tag{2}$$

Добре відомі і широко використовуються різні способи побудови векторних функцій Ляпунова і систем порівнянь, що базуються на заданні їх структури. Серед них найбільш поширеними є метод побудови системи порівняння Бейлі [2] та метод Фурасова [3]. Передбачається, що система (1) може бути представлена у вигляді сукупності підсистем меньшої розмірності

$$x_i' = A_i x_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{m} B_{ij} x_j, \ i = \overline{1,m}, \ x_i \in R^{n_i}, \ \sum_{i=1}^{m} n_i = N. \tag{3}$$

За компоненти ВФЛ приймаються функції Ляпунова для ізольованих підсистем

$$x_i' = A_i x_i, \ i = \overline{1,m}. \tag{4}$$

а система порівняння будується на основі оцінок похідної ВФЛ в силу повної системи. При цьому, якщо СП, яка формується, асимптотично стійка, то вихідна система (1) також буде асимптотично стійкою [1]. В протилежному випадку про стійкість системи (1) нічого неможна сказати.

Будемо будувати функції Ляпунова для систем (4) у вигляді квадратичних форм

$$v_i(x_i) = (x_i, H_i x_i),\ i = \overline{1,m}, \tag{5}$$

з додатньо визначеними, симетричними матрицями H_i, $i = \overline{1,m}$.

Якщо матриці A_i, $i = \overline{1,m}$, підсистем (4) гурвіцеві, тоді знаходження функцій Ляпунова зводиться до розв'язку матричних рівнянь Ляпунова

$$A_i^T H_i + H_i A_i = -C_i,\ i = \overline{1,m} \tag{6}$$

з довільними додатньо визначеними, симетричними матрицями C_i, $i = \overline{1,m}$ в правій частині.

Аналіз систем порівняння показав, що вигляд СП залежить від вибору функцій Ляпунова, що входять до ВФЛ. В роботі автора [4] вже було доведено, що за умов покращення вибору функцій Ляпунова з урахуванням інтегрального критерію [5], СП Бейлі досить часто може бути покращена з точки зору запасу стійкості.

Основною метою цієї роботи є розробка способу оптимізації лінійних систем порівняння, запропонованих В. Д. Фурасовим, а також порівняння якості систем Бейлі та Фурасова за показником запасу стійкості.

Означення 1. Дійсна квадратна матриця $P = \{p_{ij}\}_{i,j=\overline{1,n}}$ розмірності n називається додатною (невід'ємною), якщо $p_{ij} > 0$ ($p_{ij} \geq 0$), $i, j = \overline{1,n}$.

Означення 2. Дійсна квадратна матриця $P = \{p_{ij}\}_{i,j=\overline{1,n}}$ розмірності n називається позитивною (М-матрицєю), якщо $p_{ij} \geq 0,\ i,j = \overline{1,n},\ i \neq j$.

Для додатних (невід'ємних) і позитивних матриць будемо використовувати традиційні позначення $P > (\geq) 0$. Неважко помітити, що для довільної позитивної матриці $P = \{p_{ij}\}_{i,j=\overline{1,n}}$ матриця $Q = P + \gamma E$, де $\gamma \geq - \min\limits_{1 \leq i \leq n, p_{ii} < 0} p_{ii}$, E — одинична матриця, буде невід'ємною матрицею $Q \geq 0$, тобто $q_{ij} \geq 0,\ i,j = \overline{1,n}$.

Припустимо, що задана система (1) . Зафіксуємо розбиття матриці A системи (1) на підсистеми (3). Система порівняння Фурасова буде мати вигляд [3]

$$y' = Py,\ P = \{p_{ij}\}_{i,j=\overline{1,m}}, \tag{7}$$

$$p_{ij} = \begin{cases} -\lambda_{\min}(C_i)/(2 * \lambda_{\max}(H_i), & i = j, \\ \sqrt{\lambda_{\max}(H_i)/\lambda_{\min}(H_j)}\, \|B_{ij}\|\,, & i \neq j, \end{cases} \tag{8}$$

де $\lambda_{\max}(\cdot)$, $\lambda_{\min}(\cdot)$ - максимальне і мінімальне власні числа відповідних матриць.

Виходячи з вигляду СП (7), (8), сформулюємо

Теорема 1. *Для того, щоб система порівняння (7), (8) була асимтотично стійкою, необхідно і достатньо, щоб виконувалася система нерівностей*

$$2^r\Delta_r\prod_{i=1}^{r}q(H_i)+$$

$$+\,2^{r-1}\sum_{\substack{1\le i_1,i_2,\dots,i_{r-1}\le r\\ i_p\ne i_q}}\left[\sum_{\substack{j_1,j_2,\dots,j_{r-1}\\ j_k\in\{i_1,i_2,\dots,i_{r-1}\}\\ j_p\ne j_q}} t_{j_1j_2}t_{j_2j_3}\cdots t_{j_{r-1}j_1}\right]q(H_{i_1})q(H_{i_2})\cdots q(H_{i_{r-1}})+$$

$$+\,2^{r-2}\sum_{\substack{1\le i_1,i_2,\dots,i_{r-2}\le r\\ i_p\ne i_q}}\left[\sum_{\substack{j_1,j_2,\dots,j_{r-2}\\ j_k\in\{i_1,i_2,\dots,i_{r-2}\}\\ j_p\ne j_q}} t_{j_1j_2}t_{j_2j_3}\cdots t_{j_{r-2}j_1}\right]q(H_{i_1})q(H_{i_2})\cdots q(H_{i_{r-2}})+\dots$$

$$\dots+2\sum_{\substack{i,j=1\\ j\ne i}}^{r}t_{ij}t_{ji}q(H_i)q(H_j)<1,\ r=\overline{2,m} \quad (9)$$

де

$$q(H_i)=\frac{\lambda_{\max}(H_i)}{\lambda_{\min}(C_i)}\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H_i)}{\lambda_{\min}(H_i)}},\ i=\overline{1,m}, \quad (10)$$

$$\Delta_r=(-1)^{r-1}\begin{vmatrix} 0 & t_{12} & \dots & t_{1r}\\ t_{21} & 0 & \dots & t_{2r}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ t_{r1} & t_{r2} & \dots & 0\end{vmatrix},\ r=\overline{2,m},\ t_{ij}=\|B_{ij}\|,\ i,j=\overline{1,m},\ i\ne j.$$

Доказательство. Матриця P системи порівняння є позитивною. Для дослідження стійкості СП можна використати критерій Севастьянова-Котелянського [6]. За ним для асимптотичної стійкості СП необхідно і достатньо, щоб виконувалися нерівності

$$p_{11}<0,\ \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{vmatrix}>0,\dots,\ (-1)^m\det P>0. \quad (11)$$

Покажемо необхідність виконання умови (9). Нехай СП (7), (8) асимптотично стійка. Тоді справедливими є нерівності (11). Виносимо з кожного стовпця множник $1/\sqrt{\lambda_{\min}(H_j)}$, $j=\overline{1,m}$, а потім з кожного рядка $\sqrt{\lambda_{\max}(H_i)}$, $i=\overline{1,m}$, і, враховуючи, що $p_{11}<0$, перетворимо систему нерівностей (11) до вигляду

$$\begin{vmatrix} -\frac{\lambda_{\min}(C_1)}{2\lambda_{\max}(H_1)}\sqrt{\frac{\lambda_{\min}(H_1)}{\lambda_{\max}(H_1)}} & \|B_{12}\|\\ \|B_{21}\| & -\frac{\lambda_{\min}(C_2)}{2\lambda_{\max}(H_2)}\sqrt{\frac{\lambda_{\min}(H_2)}{\lambda_{\max}(H_2)}}\end{vmatrix}>0, \quad (12)$$

. . . .

$$(-1)^m \begin{vmatrix} -\frac{\lambda_{\min}(C_1)}{2\lambda_{\max}(H_1)}\sqrt{\frac{\lambda_{\min}(H_1)}{\lambda_{\max}(H_1)}} & \|B_{12}\| & \dots & \|B_{1m}\| \\ \|B_{21}\| & -\frac{\lambda_{\min}(C_2)}{2\lambda_{\max}(H_2)}\sqrt{\frac{\lambda_{\min}(H_2)}{\lambda_{\max}(H_2)}} & \dots & \|B_{2m}\| \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \|B_{m1}\| & \|B_{m2}\| & \dots & -\frac{\lambda_{\min}(C_m)}{2\lambda_{\max}(H_m)}\sqrt{\frac{\lambda_{\min}(H_m)}{\lambda_{\max}(H_m)}} \end{vmatrix} > 0.$$

Нескладно перевірити справедливість рівностей для довільного $r = \overline{2,m}$ [7]

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & t_{12} & \dots & t_{1r} \\ t_{21} & \alpha_2 & \dots & t_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{r1} & t_{r2} & \dots & \alpha_r \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{r}\alpha_i - \sum_{\substack{i,j=1 \\ j>i}}^{r} t_{ij}t_{ji}\prod_{\substack{l=1 \\ l\neq i \\ l\neq j}}^{r}\alpha_l + \\ + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ k>j>i}}^{r} t_{ij}t_{jk}t_{ki}\prod_{\substack{l=1 \\ l\neq i \\ l\neq j \\ l\neq k}}^{r}\alpha_l + \ldots + (-1)^{r+1}\Delta_r, \quad (13)$$

де $\alpha_i = -\frac{\lambda_{\min}(C_i)}{2\lambda_{\max}(H_i)}\sqrt{\frac{\lambda_{\min}(H_i)}{\lambda_{\max}(H_i)}}$, $t_{ij} = \|B_{ij}\|$, $i,j = \overline{1,m}$, $i \neq j$, Δ_r, ($\Delta_r \geq 0$) — величина визначника (10) порядку $r, r = \overline{2,m}$, з нульовими діагональними елементами [7].

Підставляючи значення α_i, $i = \overline{1,m}$, отримаємо систему нерівностей

$$2^r\Delta_r\prod_{i=1}^{r}q(H_i) + \\ + 2^{r-1}\sum_{\substack{1\leq i_1,i_2,\ldots,i_{r-1}\leq r \\ i_p\neq i_q}}\left[\sum_{\substack{j_1,j_2,\ldots,j_{r-1} \\ j_k\in\{i_1,i_2,\ldots,i_{r-1}\} \\ j_p\neq j_q}} t_{j_1j_2}t_{j_2j_3}\cdots t_{j_{r-1}j_1}\right]q(H_{i_1})q(H_{i_2})\cdots q(H_{i_{r-1}}) + \\ + 2^{r-2}\sum_{\substack{1\leq i_1,i_2,\ldots,i_{r-2}\leq r \\ i_p\neq i_q}}\left[\sum_{\substack{j_1,j_2,\ldots,j_{r-2} \\ j_k\in\{i_1,i_2,\ldots,i_{r-2}\} \\ j_p\neq j_q}} t_{j_1j_2}t_{j_2j_3}\cdots t_{j_{r-2}j_1}\right]q(H_{i_1})q(H_{i_2})\cdots q(H_{i_{r-2}}) + \ldots \\ \ldots + 2\sum_{\substack{i,j=1 \\ j\neq i}}^{r} t_{ij}t_{ji}q(H_i)q(H_j) < 1,\ r = \overline{2,m} \quad (14)$$

де $q(H_i)$, $i = \overline{1,m}$ визначені в (10). Таким чином, необхідність доведено.

Для доведення достатності зауважимо, що при виконанні нерівностей (14) справедливими є нерівності (12). Таким чином, за умов виконання нерівностей (9) справедливі нерівності (12) і система порівняння (7),(8) буде асимптотично стійкою. □

Як вже було сказано вище, із стійкості СП слідує стійкість вихідної системи. Зворотне твердження вірно не завжди, тобто метод ВФЛ носить достатній характер. Зрозуміло, виникає бажання отримати такі умови у вигляді СП (7), (8), які б були найбільш близькими до необхідних.

Нехай для системи (1) побудована СП Фурасова (7), (8). Функції Ляпунова квадратичного вигляду (5) $v_1(x_1), v_2(x_2), \ldots, v_m(x_m)$ складають векторну функцію Ляпунова. Припустимо, що в результаті застосування деякої процедури отримано інші функції Ляпунова $\bar{v}_i(x_i) = (x_i^T, \bar{H}_i x_i)$, $i = \overline{1, m}$.

Теорема 2. *Якщо при зміні векторної функції Ляпунова для системи (1) виконуються нерівності* $q(H_i) \geq q(\bar{H}_i)$, $i = \overline{1, m}$, *і хоча б для одного* $j = \overline{1, m}$ $q(H_j) > q(\bar{H}_j)$, *то запас стійкості СП, побудованої по функціям* $\bar{v}_i(x_i)$, $i = \overline{1, m}$, *буде вищий за запас стійкості вихідної СП.*

Доказательство. Розглянемо СП Фурасова (7), (8). Критерієм її стійкості є виконання нерівності (9). Очевидно, що при заданому розбитті системи (1) на підсистеми (3), тобто при фіксованих $t_{ij} = \|B_{ij}\|$, $i, j = \overline{1, m}$, $i \neq j$, із зменшенням значень $q(H_i) = \frac{\lambda_{\max}(H_i)}{\lambda_{\min}(C_i)} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H_i)}{\lambda_{\min}(H_i)}}$, $i = \overline{1, m}$ величина лівої частини нерівності (12) зменшує-ться.

Можливі два випадки.

1. СП асимптотично стійка. Тоді при виконанні умов теореми справедливе співвідношення

$$1 > 2^r \Delta_r \prod_{i=1}^{r} q(H_i) +$$

$$+2^{r-1} \sum_{\substack{1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_{r-1} \leq r \\ i_p \neq i_q}} \left[\sum_{\substack{j_1, j_2, \ldots, j_{r-1} \\ j_k \in \{i_1, i_2, \ldots, i_{r-1}\} \\ j_p \neq j_q}} t_{j_1 j_2} t_{j_2 j_3} \cdots t_{j_{r-1} j_1} \right] q(H_{i_1}) q(H_{i_2}) \cdots q(H_{i_{r-1}}) +$$

$$+2^{r-2} \sum_{\substack{1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_{r-2} \leq r \\ i_p \neq i_q}} \left[\sum_{\substack{j_1, j_2, \ldots, j_{r-2} \\ j_k \in \{i_1, i_2, \ldots, i_{r-2}\} \\ j_p \neq j_q}} t_{j_1 j_2} t_{j_2 j_3} \cdots t_{j_{r-2} j_1} \right] q(H_{i_1}) q(H_{i_2}) \cdots q(H_{i_{r-2}}) + \ldots$$

$$\ldots + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^{r} t_{ij} t_{ji} q(H_i) q(H_j) > 2^r \Delta_r \prod_{i=1}^{r} q(\bar{H}_i) +$$

$$+2^{r-1}\sum_{\substack{1\le i_1,i_2,\ldots,i_{r-1}\le r\\ i_p\ne i_q}}\left[\sum_{\substack{j_1,j_2,\ldots,j_{r-1}\\ j_k\in\{i_1,i_2,\ldots,i_{r-1}\}\\ j_p\ne j_q}} t_{j_1j_2}t_{j_2j_3}\cdots t_{j_{r-1}j_1}\right]q(\bar H_{i_1})q(\bar H_{i_2})\cdots q(\bar H_{i_{r-1}})+$$

$$+2^{r-2}\sum_{\substack{1\le i_1,i_2,\ldots,i_{r-2}\le r\\ i_p\ne i_q}}\left[\sum_{\substack{j_1,j_2,\ldots,j_{r-2}\\ j_k\in\{i_1,i_2,\ldots,i_{r-2}\}\\ j_p\ne j_q}} t_{j_1j_2}t_{j_2j_3}\cdots t_{j_{r-2}j_1}\right]q(\bar H_{i_1})q(\bar H_{i_2})\cdots q(\bar H_{i_{r-2}})+\ldots$$

$$\ldots+2\sum_{\substack{i,j=1\\ j\ne i}}^{r} t_{ij}t_{ji}q(\bar H_i)q(\bar H_j),\ \ r=\overline{2,m}$$

і СП, побудована по функціям $\bar v_i(x_i)=(x_i^T,\bar H_i x_i)$, $i=\overline{1,m}$, також буде асимптотично стійкою.

Нескладно показати, що при збільшенні $q(H_i)$, $i=\overline{1,m}$ можна отримати СП, яка не буде асимптотично стійкою.

2. СП Фурасова нестійка. Тоді існує хоча б одне $2\le r\le m$, для якого виконується співвідношення

$$2^r\Delta_r\prod_{i=1}^{r}q(H_i)+$$

$$+\,2^{r-1}\sum_{\substack{1\le i_1,i_2,\ldots,i_{r-1}\le r\\ i_p\ne i_q}}\left[\sum_{\substack{j_1,j_2,\ldots,j_{r-1}\\ j_k\in\{i_1,i_2,\ldots,i_{r-1}\}\\ j_p\ne j_q}} t_{j_1j_2}t_{j_2j_3}\cdots t_{j_{r-1}j_1}\right]q(H_{i_1})q(H_{i_2})\cdots q(H_{i_{r-1}})+$$

$$+\,2^{r-2}\sum_{\substack{1\le i_1,i_2,\ldots,i_{r-2}\le r\\ i_p\ne i_q}}\left[\sum_{\substack{j_1,j_2,\ldots,j_{r-2}\\ j_k\in\{i_1,i_2,\ldots,i_{r-2}\}\\ j_p\ne j_q}} t_{j_1j_2}t_{j_2j_3}\cdots t_{j_{r-2}j_1}\right]q(H_{i_1})q(H_{i_2})\cdots q(H_{i_{r-2}})+\ldots$$

$$\ldots+2\sum_{\substack{i,j=1\\ j\ne i}}^{r} t_{ij}t_{ji}q(H_i)q(H_j)\ge 1. \quad (15)$$

Якщо виконано умови теореми, то для всіх $2\le r\le m$, для яких виконується нерівність (15), буде справедливо

$$2^r\Delta_r\prod_{i=1}^{r}q(H_i)+$$

$$+2^{r-1}\sum_{\substack{1\le i_1,i_2,\dots,i_{r-1}\le r\\ i_p\ne i_q}}\left[\sum_{\substack{j_1,j_2,\dots,j_{r-1}\\ j_k\in\{i_1,i_2,\dots,i_{r-1}\}\\ j_p\ne j_q}} t_{j_1j_2}t_{j_2j_3}\cdots t_{j_{r-1}j_1}\right] q(H_{i_1})q(H_{i_2})\cdots q(H_{i_{r-1}})+$$

$$+2^{r-2}\sum_{\substack{1\le i_1,i_2,\dots,i_{r-2}\le r\\ i_p\ne i_q}}\left[\sum_{\substack{j_1,j_2,\dots,j_{r-2}\\ j_k\in\{i_1,i_2,\dots,i_{r-2}\}\\ j_p\ne j_q}} t_{j_1j_2}t_{j_2j_3}\cdots t_{j_{r-2}j_1}\right] q(H_{i_1})q(H_{i_2})\cdots q(H_{i_{r-2}})+\dots$$

$$\dots+2\sum_{\substack{i,j=1\\ j\ne i}}^{r} t_{ij}t_{ji}q(H_i)q(H_j) > 2^r\Delta_r\prod_{i=1}^{r} q(\bar H_i)+$$

$$+2^{r-1}\sum_{\substack{1\le i_1,i_2,\dots,i_{r-1}\le r\\ i_p\ne i_q}}\left[\sum_{\substack{j_1,j_2,\dots,j_{r-1}\\ j_k\in\{i_1,i_2,\dots,i_{r-1}\}\\ j_p\ne j_q}} t_{j_1j_2}t_{j_2j_3}\cdots t_{j_{r-1}j_1}\right] q(\bar H_{i_1})q(\bar H_{i_2})\cdots q(\bar H_{i_{r-1}})+$$

$$+2^{r-2}\sum_{\substack{1\le i_1,i_2,\dots,i_{r-2}\le r\\ i_p\ne i_q}}\left[\sum_{\substack{j_1,j_2,\dots,j_{r-2}\\ j_k\in\{i_1,i_2,\dots,i_{r-2}\}\\ j_p\ne j_q}} t_{j_1j_2}t_{j_2j_3}\cdots t_{j_{r-2}j_1}\right] q(\bar H_{i_1})q(\bar H_{i_2})\cdots q(\bar H_{i_{r-2}})+\dots$$

$$\dots+2\sum_{\substack{i,j=1\\ j\ne i}}^{r} t_{ij}t_{ji}q(\bar H_i)q(\bar H_j).$$

Визначимо в якості показника нестійкості системи порівняння величину

$$D=\max d_r,$$

де значення d_r обчислюються у вигляді різниць

$$2^r\Delta_r\prod_{i=1}^{r} q(H_i)+$$

$$+2^{r-1}\sum_{\substack{1\le i_1,i_2,\dots,i_{r-1}\le r\\ i_p\ne i_q}}\left[\sum_{\substack{j_1,j_2,\dots,j_{r-1}\\ j_k\in\{i_1,i_2,\dots,i_{r-1}\}\\ j_p\ne j_q}} t_{j_1j_2}t_{j_2j_3}\cdots t_{j_{r-1}j_1}\right] q(H_{i_1})q(H_{i_2})\cdots q(H_{i_{r-1}})+$$

$$+2^{r-2}\sum_{\substack{1\le i_1,i_2,\dots,i_{r-2}\le r\\ i_p\ne i_q}}\left[\sum_{\substack{j_1,j_2,\dots,j_{r-2}\\ j_k\in\{i_1,i_2,\dots,i_{r-2}\}\\ j_p\ne j_q}} t_{j_1j_2}t_{j_2j_3}\cdots t_{j_{r-2}j_1}\right]q(H_{i_1})q(H_{i_2})\cdots q(H_{i_{r-2}})+\dots$$

$$\dots+2\sum_{\substack{i,j=1\\ j\ne i}}^{r} t_{ij}t_{ji}q(H_i)q(H_j)-1,$$

для всіх $2\le r\le m$ таких, що виконується нерівність (15).

Очевидно, що при зміні функцій Ляпунова, які складають векторну функцію Ляпунова, може бути отримана або асимптотично стійка СП (за умов виконання нерівності (9)), або, в протилежному випадку, система порівняння, у якої оцінка запасу нестійкості D не збільшується. □

Таким чином, при виконанні умов теореми довільну систему порівняння можна покращити з якісної точки зору. Для цього вибір функцій Ляпунова для підсистем (4) потрібно здійснювати з урахуванням критерію у вигляді

$$q(H_i)=\frac{\lambda_{\max}(H_i)}{\lambda_{\min}(C_i)}\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H_i)}{\lambda_{\min}(H_i)}}\to\min_{H_i,C_i},\qquad i=\overline{1,m},\tag{16}$$

де додатньо визначені, симетричні матриці $H_i,\ C_i,\ i=\overline{1,m}$, зв'язані матричними рівняннями Ляпунова $A_i^TH_i+H_iA_i=-C_i,\ i=\overline{1,m}$.

Як вже було сказано вище, в роботі автора [4] доведено, що за умов покращення вибору функцій Ляпунова з урахуванням критерію (16), система порівняння Бейлі також може бути покращена з точки зору запасу її стійкості. В даному випадку система порівняння має вигляд [4]

$$y'=Py,\tag{17}$$

$$P=\{p_{ij}\}_{i,j=\overline{1,m}},$$

$$p_{ij}=\begin{cases}-\lambda_{\min}(C_i)/(2*\lambda_{\max}(H_i), & i=j,\\ 2\lambda^2_{\max}(H_i)\sum\limits_{\substack{k=1\\k\ne i}}^{m}\|B_{ik}\|/(\lambda_{\min}(H_j)\lambda_{\min}(C_i)), & i\ne j,\end{cases}\tag{18}$$

а необхідні і достатні умови асимптотичної стійкості записуються у вигляді нерівності

$$2^{2m}(m-1)\prod_{i=1}^{m}q^2(H_i)S_i+2^{2m-2}\sum_{i=1}^{m}\prod_{\substack{j=1\\j\ne i}}^{m}q(H_j)S_j+2^{2m-4}\sum_{i,j=1}^{m}\prod_{\substack{l=1\\l\ne i\\l\ne j}}^{m}q(H_l)S_l+\dots<1,\tag{19}$$

де $q(H_i), i = \overline{1,m}$, визначені в (10), а $S_i = \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{m} \|B_{ik}\|$, $i = \overline{1,m}$.

При цьому, слід візначити, що умови стійкості багатомірних систем (1) у вигляді СП Бейлі (17) є більш жорсткими ніж умови, що визначені в СП Фурасова [3]. Це означає, що у випадку асимптотичної стійкості СП Бейлі система порівняння Фурасова також буде асимптотично стійкою. Маємо наступне твердження.

Теорема 3. *Для систем порівняння Бейлі (17), (18) та Фурасова (7), (8) справедливі співвідношення*

$$\prod_{i=i_1}^{i_k} q(H_i)S_i \geq 2^{-k}\Delta_k/(k-1),\ k = \overline{2,m}, \tag{20}$$

де $q(H_i)$, S_i, $i = \overline{1,m}$, Δ_k, $k = \overline{2,m}$, *визначені в (10),(19),* $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_k \leq m$, $i_p \neq i_q$, $p \neq q$ *- довільні набори індексів з діапазону [1,m] розмірності k,* $k = \overline{2,m}$.

Доказательство. Запишемо умову асимптотичної стійкості СП Фурасова (7), (8) у вигляді $a < 1$, позначивши через a ліву частину нерівності (9), а умову стійкості СП Бейлі (17), (18) - у вигляді $b < 1$, де b - відповідно, позначення лівої частини нерівності (19).

З урахуванням більш жорстких умов СП Бейлі з нерівності $b < 1$ слідує, що $a < 1$. Для порівняння величин $a > 0$ та $b > 0$ отримуємо нерівність $1 - a \geq 1 - b$, або $a \leq b$.

Розглянемо відповідні доданки в лівих частинах нерівностей (9) та (19). Нескладно перевірити, що

$$2^{2m}(m-1)\prod_{i=1}^{m} q^2(H_i)S_i \geq 2^m\Delta_m \prod_{i=1}^{m} q(H_i), \tag{21}$$

$$2^{2k}(k-1)\prod_{i=i_1}^{i_k} q^2(H_i)S_i \geq 2^k\Delta_k \prod_{i=i_1}^{i_k} q(H_i), \tag{22}$$

де $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_k \leq m$, $i_p \neq i_q$, $p \neq q$ - довільні набори індексів з діапазону $[1,m]$ розмірності k, $k = m-1, m-2, \ldots, 2$.

Звідси маємо співвідношення

$$2^k(k-1)\prod_{i=i_1}^{i_k} q(H_i)S_i \geq \Delta_k, \quad k = \overline{2,m},$$

з яких слідують нерівності (20). □

Наслідок 1. *За умов асимптотичної стійкості системи порівняння Бейлі (17),(18) справедливі нерівності*

$$\prod_{i=i_1}^{i_k} q^2(H_i)S_i \leq 2^{-2k}/(k-1), \quad k=\overline{2,m}. \tag{23}$$

Наслідок 2. *За умов асимптотичної стійкості системи порівняння Фурасова (7),(8) справедливі нерівності*

$$\prod_{i=i_1}^{i_k} q(H_i) \leq 2^{-k}/\Delta_k, \quad k=\overline{2,m}. \tag{24}$$

Доведення наслідків тривіально. Умови (23), (24) отримуються безпосередньо з нерівностей $2^{2k}(k-1)\prod\limits_{i=i_1}^{i_k} q^2(H_i)S_i \leq 1$ та $2^k\Delta_k \prod\limits_{i=i_1}^{i_k} q(H_i) \leq 1$, $k=\overline{2,m}$.

На завершення хочу подякувати доктору фіз.-мат. наук А. Г. Мазко за увагу до роботи, зроблені зауваження та обговорення результатів.

Перелік цитованих джерел

1. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. — М.: Наука, 1970. — 240 с.
2. *Beiley F.N.* The application of Lyapunov second method to interconnected systems// Journ. SIAM Contr. Ser.A. — 1966. — Vol. 3. — №3. — P. 443–462.
3. *Фурасов В.Д.* Устойчивость движения, оценки и стабилизация. — М.: Наука, 1977. — 248 с.
4. *Ивохин Е.В.* К вопросу об оптимизации построения линейных систем сравнения// Дифференциальные уравнения. — 1986. —Т22. — №11. — С. 2000–2001.
5. *Ивохин Е.В., Хусаинов Д.Я.* Об оценке решений линейных систем с использованием функций Ляпунова// Кибернетика. — 1985. — №2. — С.7–10.
6. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984. — 318 с.
7. *Проскуряков И.В.* Сборник задач по линейной алгебре. — М.: Наука, 1966. — 385 с.

Получена 30.10.2007