Динамические системы, вып. 25 (2008), 23–36

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 517.929

Стабилизация динамической системы со случайными состояниями

И. А. Джалладова

Киевский национальный экономический университет им. В. Гетмана
Киев 02032. *E-mail: irada-05@mail.ru*

Аннотация. В статье представлены результаты по исследованию некоторых видов устойчивости широкого класса разностных уравнений со случайными коэффициентами и случайными преобразованиями решений. Получены необходимые и достаточные условия устойчивости в среднем квадратичном нулевого решения системы разностных уравнений, в общем и в частных случаях. Предложен метод построения функции Ляпунова и обоснованы условия ее существования.

Ключевые слова: полумарковская цепь, случайные преобразования решений, функция Ляпунова, L_2-устойчивость, системы разностных уравнений.

1. Введение

Исследование устойчивости решений разностных уравнений со случайными коэффициентами, зависящими от конечнозначного марковского или полумарковского случайного процесса является актуальной проблемой. Теории полумарковских процессов посвящены работы П. Леви [16], В.С. Королюка [14, 20], И.Н. Коваленко [12], В.В. Анисимова [1], А.Ф. Турбина [15], И.И. Гихмана, А.В. Скорохода [5] и др. Рассматриваемые в настоящей статье динамические системы получили название систем со случайными состояниями. Они изучались в работах В.М. Артемьева [2], Н.Я. Каца, Н.Н. Красовского [11] и др. Для исследования устойчивости в среднем и устойчивости в среднем квадратичном используется традиционный метод функций Ляпунова, который разрабатывали Е.А. Барбашин [3], В.И. Зубов [9], К.Г. Валеев [4], Р.З. Хасьминський [19] и др. Системы со скачками изучали Н.Я. Кац [10], Н.А. Перестюк, А.М. Самойленко [17] и др.

В работе получены необходимые и достаточные условия устойчивости в среднем квадратичном и условия L_2-устойчивости для систем с полумарковскими коэффициентами и случайными преобразованиями решений. В случае, когда коэффициенты зависят от марковского процесса и нет скачков, результаты совпадают с результатами Н.Я. Каца [10].

2. Постановка задачи

Пусть стохастическая динамическая система, заданная линейными разностными уравнениями с полумарковскими переключениями

$$X_{k+1} = A(k, \xi_k) X_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.1}$$

и скачками решений

$$\begin{aligned} X_k &= N_s(k - k_{j-1}) X_{k_{j-1}}, \quad k_{j-1} \leqslant k \leqslant k_j, \\ X_{k_j} &= C_{ls} N_s(k - k_{j-1}) X_{k_{j-1}}, \quad \det C_{ls} \neq 0 \quad (l, s = 1, \ldots, n), \\ X_k &= N_l(k - k_j) X_{k_j}, \quad k_j \leqslant k \leqslant k_{j+1}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

рассматривается на вероятностном пространстве $(\Omega, , F)$, $F = \{_t, \forall t \geqslant 0\} \subset$ [8]. Компоненты вектора X_k — случайные величины, определенные на множестве Ω, для которых существует математическое ожидание их квадратов [7, 6]; ξ_k — полумарковская цепь, принимающая конечное число значений $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ с интенсивностями $q_{js}(k)$ $(j, s = 1, \ldots, n)$ перехода из состояния θ_s в состояние θ_j, которые в момент $t = k$ удовлетворяют условиям [18]

$$\begin{gathered} q_{js}(k) \geqslant 0, \quad \sum_{k=1}^{a} q_{js}(k) = \pi_{js} \quad (j, s = 1, \ldots, n), \\ \sum_{s=1}^{n} q_{js}(k) = 1, \quad q_s(k) = \sum_{j=1}^{n} q_{js}(k) \qquad (s = 1, \ldots, n), \end{gathered} \tag{2.3}$$

$N_s(k)$, $N_s(0) = E$ $(s = 1, \ldots, n)$ — фундаментальные матрицы решений нестационарных систем линейных уравнений

$$X_{k+1,s} = A_s(k) X_{k,s} \quad (s = 1, \ldots, n;\ k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{2.4}$$

которые определяются системой (2.1) в каждой из реализаций полумарковской цепи, т.е., $A_s(k) = A(k, \theta_s)$.

Пространство решений X часто интерпретируют как фазовое пространство состояний случайной среды, измеримые подмножества которого представляют совокупность наблюдаемых состояний этой среды. В качестве фазового пространства состояний рассматривают полное метрическое сепарабельное пространство или конечное множество с σ-алгеброй всех подмножеств X. При определенных условиях решения задачи рассматриваемого типа определяют в смысле сильного решения задачи Коши [5]. Наша цель — получение надежного и простого метода исследования устойчивости решений такого класса систем, а также его обоснование.

3. Необходимые и достаточные условия L_2-устойчивости решений

Для получения условий устойчивости докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть* X_k *(*$k = 0, 1, 2, \ldots$*) — решения системы уравнений* (2.1) *со скачками* (2.2)*. Если* k_j *(*$j = 0, 1, 2, \ldots$*) — скачки случайной цепи* ξ_k*, то вектор частных плотностей распределения* $F(k, X)$ *определяется при условии* $k \geqslant k_j$ *из уравнений*

$$F(s + k_j, X) = L(s)F(k_j, X) \quad (j, s = 0, 1, 2, \ldots), \tag{3.1}$$

где стохастический оператор $L(s)$ *определяется уравнением*

$$L(s) = \psi(s)R(s) + \sum_{j=1}^{k} L(s - j)S(j)R(j). \tag{3.2}$$

Решение уравнения (3.2) *находится из системы уравнений*

$$L(k) = \psi(k)R(k) + \sum_{j=1}^{k} \psi(k - j)R(k - j)U(j) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{3.3}$$

$$U(k) = S(k)R(k) + \sum_{r=1}^{k-1} S(r)R(r)U(k - j) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3.4}$$

Доказательство. Рассмотрим случайный процесс (X_k, ζ_k) и запишем плотность его распределения в виде

$$f(k, X, \zeta) = \sum_{k=1}^{n} f_k(k, X)\delta(\zeta - \theta_s),$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака [7].

Введем вектор частных плотностей распределения

$$F(k, X) = (f_1(k, X), \ldots, f_n(k, X))^* \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3.5}$$

и рассмотрим последовательность вектора $F(k, X)$, где k — моменты скачков полумарковского процесса ζ_k. В моменты скачков k_j вся предыстория случайного процесса «забывается», т.е. не влияет на поведение решений системы (2.1) при условии $k > k_j$. Поэтому существует стохастический оператор $L(s)$ $(s = 0, 1, 2, \ldots)$ такой, что удовлетворяется (3.1). При этом предполагаем, что оператор $L(s)$ имеет вид матрицы с операторными элементами

$$L(s) \equiv \begin{bmatrix} L_{11}(s) & L_{12}(s) & \cdots & L_{1n}(s) \\ L_{21}(s) & L_{22}(s) & \cdots & L_{2n}(s) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L_{n1}(s) & L_{n2}(s) & \cdots & L_{nn}(s) \end{bmatrix}. \tag{3.6}$$

Поскольку все моменты скачков k_j $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ равновероятны, то для простоты в качестве начального момента возьмем $k = 0$. Система уравнений (3.1) принимает вид

$$f_k(k, X) = \sum_{s=1}^{n} L_{js}(k)f_s(0, X) \quad (j = 1, \ldots, n;\ k > 0) \tag{3.7}$$

Пусть случайный процесс ζ_k при $k = 0$ попадет в состояние θ_k. При этом выполнены условия [5]

$$f_k(0, X) \equiv 0, \quad f_k(0, X) \geqslant 0, \int\limits_{E_n} f_k(0, X)dX = 1.$$

С вероятностью ψ_k случайный процесс остается в состоянии θ_k в течение времени $k > 0$ и с вероятностью $q_{sk}(\tau)d\tau$ в течение временного промежутка $[\tau, \tau + d\tau]$ переходит в состояние θ_k. Для частных плотностей $f_k(k, X)$ получим

$$f_k(k, X) = \psi_k(k)f_k(0, N_k^{-1}(k)X)detN_k^{-1}(k)+ \\ + \sum_{k=0}^{\infty}\sum q_{sk}(\tau)L_{ks}(k-\tau)f_k(0, N_k^{-1}(k)C_{sk}^{-1}X)detN_k^{-1}(\tau)|detC_{sk}^{-1}| \quad (3.8)$$

$$f_l(k, X) = \sum\sum q_{sk}L_{ks}(k-\tau)f_k(0, N_k^{-1}(k)C_{sk}^{-1}X)detN_k^{-1}(\tau)|detC_{sk}^{-1}| \quad (3.9)$$

Введем стохастические операторы $R_s(k)$ и S_{sk} определяемые формулами

$$R_s f(X) \equiv f(N_s^{-1}(k)X) \cdot |detN_s^{-1}(k)| \quad (s = 1, \ldots, n),$$

$$S_{sk} f(X) \equiv f(C_{sk}^{-1}X) \cdot |detC_{sk}^{-1}| \quad (s, k = 1, \ldots, n). \quad (3.10)$$

Тогда систему уравнений (3.8), (3.9) можно переписать в виде

$$L(k)F(0, X) = \psi(k)R(k)F(0, X) + \sum_{j=1}^{k} l(k-j)S(j)R(j)F(0, X), \quad (3.11)$$

где использованы обозначения

$$\psi(k) \equiv \|\delta_{ri}\psi_l(k)\|_1^n, \quad R(k) \equiv \|\delta_{ri}R_l(k)\|_1^n, \quad S(k) \equiv \|q_{ri}S_{ri}(k)\|_1^n. \quad (3.12)$$

Операторное разностное уравнение для стохастического оператора $L(k)$ принимает вид (3.2). Решение уравнения (3.2) можно найти методом последовательных приближений.

Подставим выражение для оператора $L(k)$ в уравнение (3.2). Изменяя порядок суммирования, приходим к уравнению для оператора $U(k)$

$$U(k) = S(k)R(k) + \sum_{r=1}^{k-1} U(r)S(k-r)R(k-r) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \quad (3.13)$$

Аналогично ищется решения операторного уравнения (3.13) в виде

$$U(k) = S(k)R(k) + \sum_{r=1}^{k-1} S(r)R(r)V(k-r) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \quad (3.14)$$

При этом получаем разностное уравнение для оператора $V(k)$

$$V(k) = S(k)R(k) + \sum_{r=1}^{k-1} V(r)S(k-r)R(k-r) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3.15}$$

Сопоставляя системы уравнений (3.13) и (3.15), можно положить

$$U(k) \equiv V(k) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Рассматривая замену (3.14) как уравнение для оператора $U(k)$, получим уравнение (3.4), которое удобнее использовать для вывода моментных уравнений, чем уравнение (3.3). Лемма доказана. □

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда вектор моментов первого порядка*

$$M(k) \equiv \langle X(k) \rangle = \sum_{k=1}^{n} M_s(k)$$

определяется системой уравнений для частных моментов первого порядка

$$\begin{aligned} V_s(k) &= \sum_{j=1}^{n} q_{sl}(k) C_{sl} N_l(k) M_l(0) + \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{l=1}^{n} q_{sl}(k-j) C_{sl} N_l(k-j) V_l(j), \\ M_s(k) &= \psi(k) N_s(k) M_s(0) + \sum_{j=1}^{k} \psi_s(k-j) V_s(j), \quad (s = 1, \ldots, n), \end{aligned} \tag{3.16}$$

а матрица моментов второго порядка

$$D(k) = \langle X(k) X^*(k) \rangle = \sum_{s=1}^{n} D_s(k) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

определяется системой уравнений для частных моментов второго порядка

$$\begin{aligned} D_s(k) &= \psi_s(k) N_s(k) D_s(0) N_s^*(k) + \sum_{j=1}^{k} \psi_s(k-j) N_s(k-j) W_s(j) N_s^*(k-j) \\ W_s(k) &= \sum_{j=1}^{n} q_{sl}(k) C_{sl} N_l(k) D_l N_l^*(k)(0) C_{sl}^* + \\ &\qquad + \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{l=1}^{n} q_{sl}(k-j) C_{sl} N_l(k-j) W_l(j) N_l^*(k-j) C_{sl}^* \end{aligned} \tag{3.17}$$

$(s = 1, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots)$

Доказательство. Умножим операторные уравнения (3.3) и (3.4) справа на вектор $F(0,X)$. Полагая

$$F(k,X) = L(k)F(0,X), \quad H(k,X) = U(k)F(0,X) \quad (k = 0,1,2,\ldots) \tag{3.18}$$

получим систему уравнений

$$F(k,X) = \psi(k)R(k)F(0,X) + \sum_{j=1}^{k}\psi(k-j)R(k-j)H(j,X) \quad (k = 0,1,2,\ldots) \tag{3.19}$$

$$H(k,X) = \psi(k)R(k)F(0,X) + \sum_{j=1}^{k-1}S(j)R(j)H(k-j,X) \quad (k = 0,1,2,\ldots) \tag{3.20}$$

Используя обозначения для векторов

$$F(k,X) = \begin{bmatrix} f_1(k,X) \\ \cdots \\ f_n(k,X) \end{bmatrix}, \quad H(k,X) = \begin{bmatrix} h_1(k,X) \\ \cdots \\ h_n(k,X) \end{bmatrix},$$

можно записать системы уравнений (3.19) и (3.20) в скалярной форме

$$f_s(k,X) = \psi_s(k)R_s(k)f_s(0,X) + \sum_{j=1}^{k}\psi_s(k-j)R_s(k-j)h_s(j,X), \tag{3.21}$$

$$h_s(k,X) = \sum_{l=1}^{n} q_{sl}(k)S_{sl}R_l(k)f_1(0,X) + \sum_{j=1}^{k-1}\sum_{l=1}^{n} q_{sl}R_l(k-j)h_l(j,X), \tag{3.22}$$

$s = 1,\ldots,n$. Системы уравнений (3.21) и (3.22) используем для вывода системы разностных уравнений, определяющих моменты случайного решения. Используя вектор моментов первого порядка и матрицу моментов второго порядка, а также вспомогательные векторы $V_j(k)$ и вспомогательные матрицы $W_j(k)$ умножим системы уравнений (3.21) и (3.22) на вектор X и просуммируем от 0 до бесконечности по E_m. Получим систему векторных уравнений (3.16) для моментов первого порядка. Аналогично умножим системы уравнений (3.21) и (3.22) на матрицу XX^* и проинтегрируем по всему пространству E_m. При этом получим систему уравнений для матриц моментов второго порядка (3.17). Лемма доказана. □

Напомним определения устойчивости решений системы линейных однородных разностных уравнений (2.1) [4, 13, 7].

Определение 1. Нулевое решение системы линейных разностных уравнений (2.1) называется *асимптотически устойчивым в среднем*, если для произвольного решения X_k $(k = 0,1,2,\ldots)$ системы (2.1) выполнено предельное соотношение

$$\lim_{k\to+\infty} M(k) = \lim_{k\to+\infty}\langle X_k\rangle = 0,$$

где $M(k) \equiv \langle X_k\rangle$ — вектор первого момента от решения уравнения (2.1).

Определение 2. Нулевое решение системы линейных разностных уравнений (2.1) называется *асимптотически устойчивым в среднем квадратичном*, если при произвольных начальных значениях выполнено предельное соотношение

$$\lim_{k\to+\infty}\langle\|X_k\|^2\rangle = 0, \quad \|X\|^2 = \sum_{s=1}^{n}|x_s|^2. \tag{3.23}$$

Очевидно, что асимптотическая устойчивость решений в среднем квадратичном равносильна выполнению предельного соотношения

$$\lim_{k\to+\infty} D(k) = 0, \quad D(k) = \langle X_k X_k^*\rangle \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

где $D(k) = \langle X_k X_k^*\rangle$ — матрица второго момента от решения уравнения (2.1).

Определение 3. Нулевое решение системы (2.1) называется L_2-*устойчивым*, если для произвольного случайного решения X_k системы (2.1) сходится ряд

$$I = \sum_{k=0}^{\infty}\langle\|X_k\|^2\rangle. \tag{3.24}$$

Замечание 1. Для исследования устойчивости решений в среднем можно использовать систему моментных уравнений (3.16). Для исследования устойчивости решений в среднем квадратичном можно использовать систему уравнений (3.17).

Замечание 2. Нулевое решение системы (2.1) будет L_2-устойчивым, если сходится матричный ряд

$$D = \sum_{k=0}^{\infty} D(k), \text{ где } D(k) \equiv < X_k X_k^* > . \tag{3.25}$$

Если нулевое решение системы (2.1) L_2-устойчиво, то оно асимптотически устойчиво в среднем квадратичном, так как из сходимости матричного рядка (3.25) вытекает сходимость ряда по определению.

Теорема 1 (необходимое условие L_2-устойчивости)**.** *Если для $s = 1, \ldots, n$ матричные ряды*

$$I_s = \sum_{k=0}^{\infty}\psi_s(k)N_s(k)N_s^*(k)$$

сходятся и $I_s > 0$, то L_2-устойчивость решений системы разностных уравнений (2.1) *равносильна ограниченности симметричных матриц*

$$W_s \equiv \sum_{k=0}^{\infty} W_s(k) \quad (s = 1, \ldots, n).$$

Доказательство. Если матрицы $D_s \geqslant 0$, $s = 1, \dots, n$, ограничены, то из условий $D_s \geqslant 0$, $W_s \geqslant 0$ $(s = 1, \dots, n)$ и неравенств

$$D_s \geqslant \sum_{k=0}^{\infty} \psi_s(k) N_s(k) W_s N_s^*(k), \quad \rho_s I_{s0} \geqslant D_s \quad (s = 1, \dots, n)$$

находим неравенства

$$\sum_{k=0}^{\infty} \psi_s(k) N_s(k) (\rho_s E - W_s) N_s^*(k) \geqslant 0 \quad (s = 1, \dots, n)$$

откуда получаем условия

$$W_s \leqslant \rho_s E \quad (s = 1, \dots, n). \tag{3.26}$$

В свою очередь, если выполнены неравенства вида (3.26), то из уравнений (3.17) находим неравенства

$$D_s \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \psi_s(k) N_s(k) (D_s(0) + \rho_s E) N_s^*(k) \quad (s = 1, \dots, n), \tag{3.27}$$

что и доказывает справедливость теоремы. □

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для того, чтобы нулевое решение системы разностных уравнений* (2.1) *со скачками* (2.2) *было* L_2-*устойчиво необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1) *Система матричных уравнений* (3.17) *при условии* $D_s(0) > 0$ *имеет решение* $B_s > 0$.

2) *Сходятся последовательные приближения*

$$B_s^{(j+1)} = D_s(0) + \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{\infty} q_{sl}(k) C_{sl} N_l(k) B_l^{(j)} N_j^*(k) C_{sl}^*, \tag{3.28}$$

$$B_s^{(0)} = 0 \quad (s = 1, \dots, n; \; j = 0, 1, 2, \dots).$$

Доказательство. Запишем систему уравнений (3.17) в операторной форме. Вводим монотонные операторы L_{ks} $(k, s = 1, \dots, n)$

$$L_{sl} B_l = \sum_{k=1}^{\infty} q_{sl}(k) C_{sl} N_l(k) B_l N_l^*(k) C_{sl}^* \quad (l, s = 1, \dots, n). \tag{3.29}$$

Из теоремы 1 следует, что система уравнений (3.14) имеет ограниченное положительно определенное решение $B_s > 0$ $(s = 1, \dots, n)$ при условии $D_s > 0$ $(s = 1, \dots, n)$ в том и только в том случае, когда сходятся последовательные приближения (3.28). Если выполнены условия теоремы 1, то из ограниченности матриц B_s $(s = 1, \dots, n)$ из формул (3.29) следует ограниченность матриц D_s $(s = 1, \dots, n)$ и, следовательно, L_2-устойчивость решений системы разностных уравнений (2.1). □

4. Построение функций Ляпунова

Эффективным методом исследования решений системы разностных уравнений (2.1) со случайными полумарковскими коэффициентами является метод функций Ляпунова. Опишем основную идею построения функции Ляпунова и приведем основной результат.

Введем положительно определенную квадратичную форму

$$w(k, X_k, \xi_k) = X_k^* B(k, \xi_k) X_k, \quad B(k, \xi_k) > 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{4.1}$$

где элементами матрицы $B(k, \xi_k)$ являются полумарковские функции [4]. Для задания матрицы задаем n различных симметричных матриц $B_s(k)$. Пусть k_j $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ — скачки полумарковской цепи. Если при условии $k_j \leqslant k < k_{j-1}$ выполнено равенство $\xi_k = \theta_s$, то полагаем

$$B(k, \xi_k) = B_s(k - k_j),\ w_s(k, X_k) = X_k^* B_s(k) X_k \ (s = 1, \ldots, n;\ j = 0, 1, 2, \ldots).$$

Определим значение квадратичного функционала

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} \langle X_k^* B(k, \xi_k) X_k \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \langle w(k, X_k, \xi_k) \rangle. \tag{4.2}$$

Для вычисления функционала v вводим основные функции Ляпунова

$$v_s = \sum_{k=0}^{\infty} \langle w(k, X_k, \xi_k)(X_0 = X, \xi_0 = \theta_s) \rangle (s = 1, \ldots, n) \tag{4.3}$$

или

$$v_s(X) = X^* C_s X \quad (s = 1, \ldots, n),$$

которые могут быть найдены из соотношения

$$v_s(X) = \sum_{k=0}^{\infty} U_s(k, X) = X^* \sum_{k=0}^{\infty} U_s(k) X \quad (s = 1, \ldots, n),$$

где

$$U_s(k) = \psi_s(k) N_s^*(k) B_s(k) B_s(k) N_s(k) + \\ + \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} q_{ls}(j) N_s^*(j) C_{ls} U_l(k - j) C_{ls}^* N_s(j) \quad (s = 1, \ldots, n). \tag{4.4}$$

Тогда $C_s = \sum\limits_{k=n}^{\infty} U_s(k)$. Суммируя уравнения (4.4) по $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, получим систему матричных уравнений для матриц C_s:

$$C_s = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_s(k) N_s^*(k) B_s(k) N_s(k) + \\ + \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{\infty} q_{ls}(k) N_s^*(k) C_{ls}^* C_l C_{ls} N_s(k) \quad (s = 1, \ldots, n). \quad (4.5)$$

Введем обозначения

$$H_s = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_s(k) N_s^*(k) B_s(k) N_s(k) \quad (s = 1, \ldots, n).$$

Получим систему уравнений

$$C_s = H_s + \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{\infty} q_{ls}(k) N_s^*(k) C_{ls}^* C_l C_{ls} N_s(s) \quad (s = 1, \ldots, n). \quad (4.6)$$

Система (4.6) является сопряженной к системе уравнений (3.17) и может быть записана в операторной форме

$$C_s = H_s + \sum_{l=1}^{n} L_{sl}^* C_l \quad (s = 1, \ldots, n), \quad (4.7)$$

где операторы L_{sl} $(s, l = 1, \ldots, n)$ введены в формулах (3.7). Существование положительного решения $C_s > 0$ $(s = 1, \ldots, n)$ системы уравнений (4.5) равносильно существованию положительно определенного решения $B_s > 0$ $(s = 1, \ldots, n)$ при условии $D_s(0) > 0$ $(s = 1, \ldots, n)$ системы уравнений (4.7) и, следовательно, равносильно L_2-устойчивости решений системы уравнений (2.1). Пусть для матриц $B_s(k)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots;\ s = 1, \ldots, n)$ выполнено условие

$$\lambda_1 E \leqslant B_s(k) \leqslant \lambda_2 E \quad (\lambda_1 > 0;\ k = 0, 1, 2, \ldots;\ s = 1, \ldots, n). \quad (4.8)$$

Тогда из существования функций $v_s(X)$ следует сходимость ряда (3.25) и L_2-устойчивость решений системы разностных уравнений (2.1). Полученные результаты сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть для системы уравнений* (2.1) *выполнены условия лемм 1 и 2. Для того чтобы нулевое решение системы уравнений* (2.1) *было* L_2*-устойчиво необходимо и достаточно выполнения одного из следующих равносильных условий:*

1. *Система уравнений* (4.7) *при любых матрицах* $H_s > 0$ $(s = 1, \ldots, n)$ *имеет решение* $C_s > 0$ $(s = 1, \ldots, n)$.

2. *Сходится метод последовательных приближений при решении системы уравнений* (4.7)

$$C_s^{(j+1)} = H_s + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{\infty} q_{ls}(k) N_s^*(k) C_{ls}^* C_l^{(j)} C_{ls} N_s(k) > 0;$$

$$C_s^{(0)} = 0 \quad (j = 0, 1, 2, \ldots;\ s = 1, \ldots, n)$$

Для L_2-устойчивости решений системы уравнений (2.1) достаточно, чтобы при некоторых симметрических положительно определенных матрицах $C_s > 0$ $(s = 1, \ldots, n)$ выполнялись матричные неравенства

$$C_s - \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{\infty} q_{ls}(k) N_s^*(k) C_{ls}^* C_{ls} N_s(k) > 0 \quad (s = 1, \ldots, n). \tag{4.9}$$

5. Частные случаи

5.1. Пусть коэффициенты системы (2.1) не зависят от времени:

$$X_{k+1} = A(\zeta_k) X_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{5.1}$$

Полагаем $A_s \equiv A(\theta_s) \quad (s = 1, \ldots, n)$. Фундаментальные матрицы решений систем

$$X_{k+1} = A_s X_k \quad (s = 1, \ldots, n;\ k = 0, 1, 2, \ldots)$$

имеют вид

$$N_s(k) = A_k^s \quad (s = 1, \ldots, n;\ k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Тогда системы уравнений (3.16) принимают вид

$$M_s(k) = \psi_s(k) A_s^k(k) M_s(0) + \sum_{j=1}^{k} \psi_s(k-j) A_s^{k-j} V_s(j),$$

$$V_s(k) = \sum_{l=1}^{n} q_{sl}(k) C_{sl} A_l^k(k) M_l(0) + \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{n} q_{sl}(k-j) C_{sl} A_s^{k-j} V_l(j) \quad (s = 1, \ldots, n) \tag{5.2}$$

а системы уравнений (3.17) примут вид

$$D_s(k) = \psi_s(k) A_s^k D_s(0) (A_s^*)^k + \sum_{j=1}^{k} \psi_s(k-j) A_s^{k-j} W_s(j) (A_s^*)^{k-j}, \tag{5.3}$$

$$W_s(k) = \sum_{l=1}^{n} q_{sl}(k) C_{sl} A_l^k D_l(0) (A_l^*) C_{sl}^* + \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{n} q_{sl}(k-j) C_{sl} A_l^{k-j} W_l(j) (A_l^*)^{k-j} C_{sl}^*$$

$s = 1, \ldots, n.$

5.2. Пусть полумарковская цепь в системе (2.1) является марковской и принимает значения $\theta_1, \ldots, \theta_n$ с вероятностями $P_s(k)$ $(s = 1, \ldots, n)$, которые удовлетворяют системе разностных уравнений

$$P_s(k+1) \equiv \sum_{l=1}^{n} \pi_{sl} P_l(k) \quad (s = 1, \ldots, n).$$

Система уравнений (5.2) принимает после преобразований вид

$$M_s(k+1) = \sum_{l=1}^{n} \pi_{sl} C_{sl} A_l M_l(k) \quad (s = 1, \ldots, n;\ k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{5.4}$$

при $C_{ss} = E$ $(s = 1, \ldots, n)$.

Если скачки решений отсутствуют, т.е $C_{sl} = E$ $(s, l = 1, \ldots, n)$, то система уравнений (5.4) совпадает с ранее полученной системой моментных уравнений [12].

Аналогично системы уравнений (5.3) примут

$$D_s(k+1) = \sum_{l=1}^{n} \pi_{sl} C_{sl} A_l D_l(k) A_l^* C_{sl}^* \quad (s = 1, \ldots, n). \tag{5.5}$$

В частном случае, когда скачки решений отсутствуют, т.е. $C_{sl} = E$ $(s, l = 1, \ldots, n)$, система уравнений (5.5) совпадает с системой уравнений [11].

6. Пример

Исследуем устойчивость решений разностного уравнения

$$x_{k+1} = a(\xi_k) x_k$$

со скачками решений

$$x_{k+1} = c \cdot x_k, \quad c \neq 0,$$

где ξ_k — полумарковская цепь, которая принимает три состояния $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ и $a(\theta_s) \equiv$ $\equiv a_s$ $(s = 1, 2, 3)$. Предположим, что интенсивности перехода заданы выражениями

$$\begin{array}{lll} q_{12}(1) = a, & q_{12}(2) = b, & q_{12}(3) = 1 - (a+b) \\ q_{13}(1) = e, & q_{13}(2) = d, & q_{13}(3) = 1 - (e+d) \\ q_{23}(1) = k, & q_{23}(2) = l, & q_{23}(3) = 1 - (k+l) \end{array}$$

Тогда система уравнений (3.28) примет вид

$$\begin{aligned} b_1 &= D_1(0) + c^2(a \cdot a_2^2 + ba_2^4 + (1-(a+b))a_2^6)b_2 + c^2(ea_3^2 + da_3^4 + (1-(e+d)a_3^6))b_3, \\ b_2 &= D_2(0) + c^2(a \cdot a_1^2 + ba_1^4 + (1-(a+b))a_1^6)b_1 + c^2(ka_3^2 + la_3^4 + (1-(k+l)a_3^6))b_3, \\ b_3 &= D_3(0) + c^2(ea_1^2 + da_1^4 + (1-(e+d))a_2^6)b_2, \end{aligned}$$

и условия L_2-устойчивости представляются неравенствами

$$c^4 \cdot a_2^2 \cdot a_1^2(a + ba_2^2 + (a + ba_2^2 + (1-a-b))a_2^4)(a + ba_1^2 + (1-a-b)a_1^4) < 1$$

$$\begin{gathered} c^6 a_1^2 a_2^2 a_3^2 (a + ba_1^2 + (1-a-b)a_1^4)(k + ba_2^2 + (1-k-l)a_2^4)(e + da_3^2 + (1-e-d)a_3^4) + \\ + c^6 a_1^2 a_2^2 a_3^2 (e + da_1^2 + (1-e-d)a_1^4)(a + ba_2^2 + (1-a-b)a_2^4)(k + la_3^2 + (1-k-l)a_3^4) + \\ + c^4 a_1^2 a_3^2 (e + da_1^2 + (1-e-d)a_1^4)(e + da_3^2 + (1-e-d)a_3^4) + \end{gathered}$$

$$+c^4a_2^2a_3^2(k+la_2^2+(1-k-l)a_2^4)(k+la_3^2+(1-k-l)a_3^4)+$$
$$+c^4a_1^2a_2^2(a+ba_1^2+(1-a-b)a_2^4)(a+ba_1^2+(1-a-b)a_1^4)<1.$$

Полученными неравенствами можно воспользоваться для построении областей неустойчивости в пространстве параметров a_1, a_2, a_3.

7. Заключение

В статье получены необходимые и достаточные условия L_2-устойчивости и условия устойчивости в среднем квадратичном нулевого решения системы разностных уравнений. Предложен метод построения функции Ляпунова для системы разностных уравнений со случайными полумарковскими коэффициентами и обоснованы условия ее существования.

Список цитируемых источников

1. *Анисимов В.В.* Случайные процессы с дискретной компонентной. Предельные теоремы. – Київ: Вища шк., 1988. – 184 с.
2. *Артемьев В. М., Казаков И. Е.* Справочник по теории автоматического управления. – М.: Наука, 1987. – 721 с.
3. *Барбашин Е. А.* Функции Ляпунова. – М.: Наука, 1970. – 240 с.
4. *Валеев К.Г., Карелова О.Л, Горелов В.И.* Оптимизация линейных систем со случайными коэффициентами. – М. Изд-во РУДН, 1996. – 231 с.
5. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Управление случайными процессами. – Киев: Наукова думка,1997. – 252 с.
6. *Джалладова И.А.* Условия существования решения дифференциального уравнения со случайными коэффициентами //International Conference "Modelling and investigation of system stability". – Kiev, 1997. – С. 33.
7. *Джалладова I.А.* Оптимізація стохастичних систем: [Монографія] – К.: КНЕУ, 2005. – 221 с.
8. *Жакод Ж., Ширяев А.Н.* Предельные теоремы для случайных процессов: В 2 -х томах. – М.: Наука: Физматлит,1994. – Т. 2. – 366 с.
9. *Зубов В. И.* Методы Ляпунова и их применения. – Л.: Из-во ЛГУ, 1957. – 241 с.
10. *Кац И.Я.* Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры. – Екатеринбург: Изд-во Уральской госакадемии путей сообщения, 1998. – 222 с.
11. *Кац И.Я., Красовський Н.Н.* Про устойчивость систем со случайными параметрами // Прикладна математика и механика. –1960. – №5. – С. 809-823.
12. *Коваленко И. Н., Наконечный А. Н.* Приближенный расчет и оптимизация надежности. – Киев: Наукова думка, 1989. – 184 с.
13. *Кореневский Д.Г.* Дестабилизирующий эффект параметрического белого шу-ма в непрерывных и дискретных динамических системах. – Киев: Академпериодика, 2008. – 128 с.
14. *Королюк В. С.* Стохастические модели систем. – Киев: Наукова думка, 1989. – 210 с.

15. *Королюк В.С., Турбин А.Ф* Полумарковские процессы и их приложения. – Киев: Наукова думка, 1976. –182 с.
16. *Леви П.* Стохастические процессы и броуновское движение. – М.: Наука, 1972. – 232 с.
17. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульс-ным воздействиям. – Киев: Вища школа,1987. – 287 с.
18. *Тихонов В.Н., Миронов М.А.* Марковские процессы. – М.: Сов. радио, 1977. – 488 с.
19. *Хасьминський Р.З.* Устойчивость систем диференциальних уравнений при случай них возмущениях их параметров. – М.: Наука,1969. – 360 с.
20. *Korolyuk V.S., Limnios W.* Stochastic systems in merging phase space. – London: Word Scientific, 2006. – 331 с.

Получена 15.11.2008