Динамические системы, том 3(31), No. 1-2, 25–35

УДК 517.977+531.39

Стабилизация модели упругой балки с распределенными и сосредоточенными управляющими воздействиями[1]

А. Л. Зуев, Ю. И. Кучер

Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
Донецк 83114. *E-mail: al_zv@mail.ru; julykucher@gmail.com*

Аннотация. В работе рассмотрена задача стабилизации колебаний упругой шарнирно опертой балки с присоединенными пьезоэлементами и точечным управляющим механизмом. Математическая модель колебаний представлена в виде абстрактной задачи Коши в гильбертовом пространстве. Из условия невозрастания полной энергии на траекториях механической системы получены функции управления в виде обратной связи, обеспечивающие устойчивость по Ляпунову положения равновесия.

Ключевые слова: балка Эйлера–Бернулли, управление с обратной связью, устойчивость по Ляпунову.

1. Введение

Одним из эффективных методов для исследования задач устойчивости и стабилизации динамических систем является прямой метод Ляпунова, основы которого изложены в работах [9], [10], [3], [7] для конечномерных систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. В обзоре [14] В. Н. Рубановский отмечает актуальность дальнейших исследований по развитию этого метода для систем с распределенными параметрами, которые описываются уравнениями в частных производных.

В работах [12], [15] доказаны теоремы об устойчивости динамических систем в бесконечномерных пространствах. В монографии [17] А. А. Шестаков развил прямой метод Ляпунова для распределенных систем, в частности, доказал теоремы о локализации предельных множеств траекторий для абстрактных динамических систем в бесконечномерных фазовых пространствах.

Методы теории управления для систем, движение которых описывается уравнениями в частных производных, изложены в работах [2], [20], [21].

В современной теории стабилизации бесконечномерных систем особое место занимает теория сильно непрерывных полугрупп, подробно освещенная в монографиях [22], [20] применительно к динамическим процессам в гильбертовых пространствах.

В статьях [4], [5] доказана устойчивость по Ляпунову положения равновесия балки Эйлера–Бернулли с присоединенным твердым телом при использовании управления с обратной связью.

Предметом исследования данной работы является стабилизация балочной системы, прототипом которой является экспериментальная установка Института механики и мехатроники Технического университета г. Вена, Австрия. Мехатронная система состоит

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке проекта научно–технического сотрудничества “Control, Stability, and Model Reduction of Hybrid Systems with Elastic Components” Украины и Республики Австрия (№ 0111U007275).

из упругой шарнирно опертой балки длины l с присоединенными k пьезоэлектрическими пластинами и точечным управляющим механизмом в виде электромагнита.

Данная статья имеет следующую структуру. Раздел 2 содержит вывод уравнения колебаний упругой балки и постановку задачи. В разделе 3 математическая модель колебаний записана в виде абстрактного дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве. В разделе 4 получены функционалы управления с обратной связью с использованием условия монотонности эрегрии на траекториях замкнутой системы. Теорема об устойчивости положения равновесия системы сформулирована и доказана в разделе 5. Там же приведены условия, при которых устойчивость тривиального решения задачи является асимптотической. Заключительные выводы содержатся в разделе 6.

2. Модель колебаний

Для вывода уравнений движения воспользуемся принципом Гамильтона–Остроградского, применение которого для систем с распределенными параметрами изложено в работах [1], [8], [13].

Пусть $w(x,t)$ — поперечное перемещение центральной линии балки в момент времени t. Точкой будем обозначать дифференцирование по времени, штрихом — дифференцирование по пространственной переменной x.

Запишем кинетическую энергию системы:

$$2T = \int_0^l \rho(x)(\dot w(x,t))^2 dx + m(\dot w(l_0,t))^2, \tag{2.1}$$

а также потенциальную энергию:

$$2U = \int_0^l E(x)I(x)(w''(x,t))^2 dx + \varkappa(w^2(l_0,t)). \tag{2.2}$$

Здесь $l_0 \in (0,l)$ — точка приложения силы управляющего механизма (электромагнита), m — масса его подвижной части, $\varkappa$ — коэффициент жесткости подвески электромагнита; $\rho(x)$ — масса балки на единицу длины, $E(x)$ — модуль Юнга, $I(x)$ — момент инерции поперечного сечения балки. Будем считать, что $m > 0$, $\varkappa > 0$ $\rho(x) > 0$; $E(x)I(x) \in C^2[0,l]$, $E(x)I(x) > 0$ при всех $x \in (0,l)$.

Поскольку балка закреплена шарнирами на концах, запишем геометрические краевые условия вида

$$w(0,t) = w(l,t) = 0. \tag{2.3}$$

Движение системы $w(x,t)$ будем рассматривать для $t \in (0,\tau)$, $\tau > 0$. Действие j-го пьезоэлемента (актуатора) будем описывать моментом сил M_j и функцией формы $\psi_j(x)$. Будем предполагать, что все пьезоэлементы отделены от концевых точек балки и от точки приложения силы электромагнита, т.е. $\operatorname{supp}\psi_j \cap \{0, l_0, l\} = \emptyset$, $j = \overline{1,k}$.

Согласно принципу Гамильтона–Остроградского с учетом работы внешних сил, равенство

$$\delta \int_0^\tau (T-U)dt + \int_0^\tau \left\{ F\delta w(l_0,t) + \sum_{j=1}^k M_j \int_0^l \psi_j(x)\delta w''(x,t)dx \right\} dt = 0 \tag{2.4}$$

выполнено для произвольной функции $\delta w(x,t)$ класса $C^2([0,l]\times[0,\tau])$, удовлетворяющей краевым условиям:

$$\delta w\Big|_{t=0} = \delta w\Big|_{t=\tau} = \delta w\Big|_{x=0} = \delta w\Big|_{x=l} = 0.$$

В формуле (2.4) F — сила воздействия электромагнита.

Интегрирование (2.4) по частям по переменной t приводит к соотношению

$$\int\limits_0^\tau \left\{ \int\limits_0^l \left[\rho\ddot{w}\delta w + \left(EIw'' - \sum_{j=1}^k M_j\psi_j \right) \delta w'' \right] dx + (m\ddot{w} + \varkappa w - F)\delta w\Big|_{x=l_0} \right\} dt = 0.$$

В силу произвольности δw, имеем:

$$\int\limits_0^l \left[\rho\ddot{w}\delta w + \left(EIw'' - \sum_{j=1}^k M_j\psi_j \right) \delta w'' \right] dx + (m\ddot{w} + \varkappa w - F)\delta w\Big|_{x=l_0} = 0. \tag{2.5}$$

Интегрирование (2.5) по частям по переменной x приводит к уравнению

$$\begin{gathered}\int\limits_0^l \left\{ \rho\ddot{w} - \sum_{j=1}^k M_j\psi_j'' \right\} \delta w dx + \int\limits_{(0,l)\setminus\{l_0\}} (EIw'')''\delta w dx \quad +(EIw'')'\delta w\Big|_{x=l_0+0} - \\ - (EIw'')'\delta w\Big|_{x=l_0-0} + (m\ddot{w} + \varkappa w - F)\delta w\Big|_{x=l_0} = 0\end{gathered}$$

и краевым условиям

$$w''(0) = w''(l) = 0.$$

Таким образом, движение рассматриваемой механической системы описывается следующей краевой задачей:

$$\rho(x)\ddot{w}(x,t) + (E(x)I(x)w''(x,t))'' = \sum_{j=1}^k \psi_j''(x)M_j, \quad x \in (0,l)\setminus\{l_0\}, \tag{2.6}$$

$$\begin{gathered} w(x,t) \in C^2([0,l]\times[0,\tau]); \\ w\Big|_{x=0} = w\Big|_{x=l} = 0, \quad w''\Big|_{x=0} = w''\Big|_{x=l} = 0, \\ (m\ddot{w} + \varkappa w)\Big|_{x=l_0} = (EIw'')'\Big|_{x=l_0-0} - (EIw'')'\Big|_{x=l_0+0} + F. \end{gathered} \tag{2.7}$$

3. Уравнения движения в операторной форме

Всюду в дальнейшем будем использовать обозначение $L^2(\Omega)$ для пространства вещественных измеримых в области Ω функций с суммируемым квадратом. Обозначим через $H^k(\Omega)$ пространство функций из $L^2(\Omega)$, имеющих все обобщенные производные до порядка k включительно из $L^2(\Omega)$; $\overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)$ — подпространство функций $f \in H^2(\Omega)$, для которых $f(\partial\Omega) = 0$.

Введем в рассмотрение фазовое пространство $X = \overset{\circ}{H}{}^2(0,l) \times L^2(0,l) \times \mathbb{R}^2$ (здесь $\overset{\circ}{H}{}^2(0,l) = \{u \in H^2(0,l) : u(0) = u(l) = 0\}$). Скалярное произведение его элементов $\xi_1 = (u_1, v_1, p_1, q_1)^T \in X$, $\xi_2 = (u_2, v_2, p_2, q_2)^T \in X$ зададим формулой:

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_X = \int\limits_0^l (E(x)I(x)u_1''(x)u_2''(x) + \rho(x)v_1(x)v_2(x))dx + \varkappa p_1 p_2 + m q_1 q_2. \tag{3.1}$$

Положим $EI^* = \sup\limits_{[0,\,l]} E(x)I(x) > 0$, $\rho^* = \sup\limits_{[0,\,l]} \rho(x) > 0$, $EI_* = \inf\limits_{[0,\,l]} E(x)I(x) > 0$, $\rho_* = \inf\limits_{[0,\,l]} \rho(x) > 0$.

Запишем неравенство Стеклова (см.[11], с.150) для функции $u \in \overset{\circ}{H}{}^2(0,l)$:

$$\|u\|^2_{L^2(0,\,l)} = \int\limits_0^l (u(x))^2 dx \le \frac{l^2}{2} \int\limits_0^l (u'(s))^2 ds = \frac{l^2}{2} \|u'\|^2_{L^2(0,\,l)}.$$

В области $\Omega = (-\varepsilon, l+\varepsilon)$, где ε — произвольная положительная постоянная, введем вспомогательную функцию $\hat{u} : \Omega \to R$, такую, что $\hat{u}(x) = u(x)$ при $x \in [0,l]$ и $\hat{u}(x) = 0$ при $x \in \Omega \setminus (0,l)$. Очевидно, $\hat{u}'(x) = u'(x)$ при $x \in (0,l)$ и $\hat{u}'(x) = 0$ при $x \in \Omega \setminus (0,l)$. В силу неравенства Стеклова для функции $\hat{u}'(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(0,l)$ выполнена следующая оценка:

$$\begin{aligned}
\|u'\|^2_{L^2(0,\,l)} &= \int\limits_0^l (u'(x))^2 dx = \int\limits_\Omega (\hat{u}'(x))^2 dx \le \frac{(l+2\varepsilon)^2}{2} \int\limits_{-\varepsilon}^{l+\varepsilon} (\hat{u}''(x))^2 dx = \\
&= \frac{(l+2\varepsilon)^2}{2} \left(\int\limits_{-\varepsilon}^0 (\hat{u}''(x))^2 dx + \int\limits_0^l (\hat{u}''(x))^2 dx + \int\limits_l^{l+\varepsilon} (\hat{u}''(x))^2 dx \right) = \\
&= \frac{(l+2\varepsilon)^2}{2} \int\limits_0^l (u''(x))^2 dx = \frac{(l+2\varepsilon)^2}{2} \|u''\|^2_{L^2(0,\,l)}.
\end{aligned}$$

Отсюда видно, что

$$\|u\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^2(0,l)} \le \bar{C}_1 \|u''\|^2_{L^2(0,\,l)},$$

где $\bar{C}_1 = \frac{l^2(l+2\varepsilon)^2}{4} + \frac{(l+2\varepsilon)^2}{2} + 1$.

Таким образом, неравенство

$$\begin{aligned}
\|\xi\|'_X &= \left(\int\limits_0^l \left(u^2(x) + (u'(x))^2 + (u''(x))^2 + v^2(x)\right) dx + p^2 + q^2 \right)^{1/2} \le \\
&\le M_1 \left(\int\limits_0^l \left(EI(u''(x))^2 + \rho v^2(x)\right) dx + \varkappa p^2 + m q^2 \right)^{1/2} = M_1 \|\xi\|_X
\end{aligned} \tag{3.2}$$

выполнено с константой $M_1 = \left(\max\left\{\frac{\bar{C}_1}{EI_*}, \frac{1}{\rho_*}, \frac{1}{\varkappa}, \frac{1}{m}\right\}\right)^{1/2}$. Очевидно, неравенство

$$\begin{gathered}\|\xi\|_X = \left(\int\limits_0^l \left(EI(u''(x))^2 + \rho v^2(x)\right)dx + \varkappa p^2 + mq^2\right)^{1/2} \leq \\ \leq M_2\left(\int\limits_0^l \left(u^2(x) + (u'(x))^2 + (u''(x))^2 + v^2(x)\right)dx + p^2 + q^2\right)^{1/2} = M_2\|\xi\|'_X\end{gathered} \tag{3.3}$$

выполнено при $M_2 = (\max\{EI^*, \rho^*, \varkappa, m\})^{1/2}$.

Неравенства (3.2) и (3.3) доказывают эквивалентность нормы, порожденной скалярным произведением (3.1), стандартной норме

$$\|u, v, p, q\|_X = \left(\|u\|^2_{L^2} + \|u'\|^2_{L^2} + \|u''\|^2_{L^2} + \|v\|^2_{L^2} + |p|^2 + |q|^2\right)^{1/2}$$

пространства $\overset{\circ}{H}{}^2(0,l) \times L^2(0,l) \times \mathbb{R}^2$. Этот факт показывает, что пространство X со скалярным произведением (3.1) является гильбертовым.

Задачу (2.6)-(2.7) можно записать в операторной форме:

$$\frac{d}{dt}\xi(t) = A\xi(t) + By(t), \tag{3.4}$$

где $A : D(A) \to X$ — линейный дифференциальный оператор с областью определения

$$D(A) = \left\{\xi = (u, v, p, q)^T \in X : \begin{array}{l} u \in H^4(0, l_0) \cap H^4(l_0, l), \\ u''(0) = u''(l) = 0, \\ u''(l_0 - 0) = u''(l_0 + 0), \\ v \in \overset{\circ}{H}{}^2(0, l), \\ p = u(l_0), \\ q = v(l_0) \end{array}\right\} \subset X, \tag{3.5}$$

действующий по правилу

$$A : \xi = \begin{pmatrix} u \\ v \\ p \\ q \end{pmatrix} \mapsto A\xi = \begin{pmatrix} v \\ -\frac{1}{\rho}(EIu'')'' \\ q \\ -\frac{\varkappa}{m}p + \frac{1}{m}\left[(EIu'')'\Big|_{l_0-0} - (EIu'')'\Big|_{l_0+0}\right] \end{pmatrix}; \tag{3.6}$$

$y = (F, M_1, \ldots, M_k)^T$ — управление, $B : \mathbb{R}^{k+1} \to X$ — отображение, заданное матрицей

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho}\psi''_1 & \ldots & \frac{1}{\rho}\psi''_k \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

4. Построение управления с обратной связью

Запишем полную энергию механической системы в следующем виде:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\int\limits_0^l (\rho v^2 + EI(u'')^2)dx + \frac{mq^2}{2} + \frac{\varkappa p^2}{2} = \frac{1}{2}\|\xi\|_X^2. \tag{4.1}$$

Управление y в виде обратной связи подберем из условия невозрастания полной энергии системы на траекториях замкнутой системы, т.е. из условия $\dot{\mathcal{E}}(\xi(t)) \le 0$. Найдем $\dot{\mathcal{E}}(\xi(t))$ в силу уравнения (3.4) при $\xi(t) \in D(A)$:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{dt} &= \int\limits_0^l \left(v\sum_{j=1}^k \psi_j'' M_j - (EIu'')''v + EIu''v'' \right) dx - \varkappa pq + \\ &+ q\left\{ (EIu'')'\Big|_{l_0-0} - (EIu'')'\Big|_{l_0+0} + F \right\} + \varkappa pq = \sum_{j=1}^k M_j \int\limits_0^l v(x)\psi_j''(x)dx + qF. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Условие $\dot{\mathcal{E}}(\xi(t)) \le 0$ выполнено, в частности, при

$$\begin{aligned} M_j &= -\alpha_j \int\limits_0^l \psi_j''(x)v(x)dx, \quad \alpha_j > 0, \quad j = \overline{1,k}, \\ F &= -\alpha_0 q, \quad \alpha_0 > 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

При подстановке управления $(M_1, \ldots, M_k, F)^T$, заданного формулами (4.3), в уравнение (3.4) получим замкнутую систему, которую можно записать в операторном виде следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\,\xi(t) = \tilde{A}\xi(t), \tag{4.4}$$

где оператор $\tilde{A}$ с областью определения $D(\tilde{A}) = D(A)$ действует по правилу:

$$\tilde{A} : \xi = \begin{pmatrix} u \\ v \\ p \\ q \end{pmatrix} \mapsto \tilde{A}\xi = \begin{pmatrix} v \\ -\frac{1}{\rho}(EIu'')'' - \frac{1}{\rho}\sum\limits_{j=1}^k \alpha_j \psi_j'' \int\limits_0^l \psi_j''(s)v(s)ds \\ q \\ -\frac{1}{m}\left\{ \varkappa p + (EIu'')'\Big|_{l_0+0} - (EIu'')'\Big|_{l_0-0} + \alpha_0 q \right\} \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

5. Устойчивость положения равновесия

Напомним определение сильной устойчивости по Ляпунову (см. [17]).

Определение 1. Решение $\xi = 0$ уравнения (4.4) сильно устойчиво по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что любое решение $\xi(t)$ с $\|\xi(0)\|_X < \delta$ определено на $t \in [0, +\infty)$ и удовлетворяет условию $\|\xi(t)\|_X < \varepsilon$, $\forall t \ge 0$.

При дальнейшем рассмотрении будем предполагать, что E, I, ρ — положительные постоянные. Можно показать, что оператор $\tilde{A}$ максимален.

Теорема 1. *Рассмотрим абстрактную задачу Коши:*

$$\frac{d}{dt}\xi(t) = \tilde{A}\xi(t), \tag{5.1}$$

$$\xi(0) = \xi_0 \in X. \tag{5.2}$$

где оператор $\tilde{A} : D(\tilde{A}) \to X$ *задан формулой* (4.5). *Тогда задача* (5.1), (5.2) *корректна на* $t \geq 0$ *и решение* $\xi = 0$ *уравнения* (5.1) *сильно (в смысле нормы в* X*) устойчиво по Ляпунову.*

Доказательство. Согласно теории C_0-полугрупп операторов в гильбертовых пространствах (см. [6], [22], [20]), задача (5.1)-(5.2) корректна, если оператор $\tilde{A}$ является инфинитезимальным генератором C_0-полугруппы в пространстве X.

Область определения $D(\tilde{A})$ плотна в пространстве X. Оператор $\tilde{A}$ диссипативен, поскольку $\dot{\mathcal{E}} = \langle \tilde{A}\xi, \xi \rangle_X \leq 0$.

Докажем замкнутость оператора $\tilde{A}$. Для этого достаточно показать, что обратный оператор $\tilde{A}^{-1}$ ограничен и определен во всем пространстве X (см. [16], с.162).

Построим оператор $\tilde{A}^{-1}$, для чего разрешим уравнение $\tilde{A}\xi = \bar{\xi}$ относительно $\xi \in D(\tilde{A})$ для любого вектора $\bar{\xi} = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{p}, \bar{q})^T \in X$.

По компоненам векторов ξ и $\bar{\xi}$ это уравнение записывается в виде следующей системы:

$$\begin{cases} v = \bar{u}, \\ -\dfrac{1}{\rho} EIu^{(4)} - \dfrac{1}{\rho} \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \psi_j'' v dx = \bar{v}, \quad x \neq l_0, \\ q = \bar{p}, \\ -\dfrac{1}{m}\left(\varkappa p + EIu''' \Big|_{l_0+0} - EIu''' \Big|_{l_0-0} + \alpha_0 q \right) = \bar{q}. \end{cases} \tag{5.3}$$

Найдем решение второго уравнения системы (5.3), которое является дифференциальным уравнением четвертого порядка и распадается на два уравнения на каждом из промежутков непрерывности функции $u'''(x)$:

$$u^{(4)} = -\frac{\rho}{EI}\,\bar{v} - \frac{1}{EI} \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \psi_j'' \int_0^{l_0} \psi_j''\, \bar{u}\, dx, \quad x \in (0, l_0), \tag{5.4}$$

$$u^{(4)} = -\frac{\rho}{EI}\,\bar{v} - \frac{1}{EI} \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \psi_j'' \int_{l_0}^{l} \psi_j''\, \bar{u}\, dx, \quad x \in (l_0, l). \tag{5.5}$$

Правые части уравнений (5.4) и (5.5) обозначим через Θ_1 и Θ_2 соответственно. С учетом краевых условий $u(0) = u''(0) = u(l) = u''(l) = 0$, получим решения

$$u(x) = \int_0^x \int_0^s \int_0^\eta \int_0^\zeta \Theta_1(\tau) d\tau d\zeta d\eta ds + \frac{x^3}{6} u'''(0) + x u'(0), \quad x \in (0, l_0), \tag{5.6}$$

$$u(x) = \int_x^l \int_s^l \int_\eta^l \int_\zeta^l \Theta_2(\tau) d\tau d\zeta d\eta ds + \frac{(x-l)^3}{6} u'''(l) + (x-l) u'(l), \quad x \in (l_0, l) \tag{5.7}$$

уравнений (5.4) и (5.5) соответственно.

Для отыскания констант интегрирования $u'(0)$, $u'''(0)$, $u'(l)$ и $u'''(l)$ из условий сопряжения в точке l_0:

$$\begin{aligned} &u(l_0 - 0) = u(l_0 + 0), \\ &u'(l_0 - 0) = u'(l_0 + 0), \\ &u''(l_0 - 0) = u''(l_0 + 0), \\ &u'''(l_0 - 0) - u'''(l_0 + 0) = \frac{\alpha_0}{EI} \bar{p}, \end{aligned} \tag{5.8}$$

получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$M \begin{pmatrix} u'(0) \\ u'''(0) \\ u'(l) \\ u'''(l) \end{pmatrix} = K, \tag{5.9}$$

где

$$M = \begin{pmatrix} l_0 & \frac{(l_0)^3}{6} & -(l_0 - l) & -\frac{(l_0-l)^3}{6} \\ 1 & \frac{(l_0)^2}{2} & -1 & -\frac{(l_0-l)^2}{2} \\ 0 & l_0 & 0 & -(l_0 - l) \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$K = \begin{pmatrix} -\int_0^{l_0}\int_0^s\int_0^\eta\int_0^\zeta \Theta_1(\tau) d\tau d\zeta d\eta ds + \int_{l_0}^l\int_s^l\int_\eta^l\int_\zeta^l \Theta_2(\tau) d\tau d\zeta d\eta ds \\ -\int_0^{l_0}\int_0^s\int_0^\zeta \Theta_1(\tau) d\tau d\zeta ds - \int_{l_0}^l\int_s^l\int_\zeta^l \Theta_2(\tau) d\tau d\zeta ds \\ -\int_0^{l_0}\int_0^s \Theta_1(\tau) d\tau ds + \int_{l_0}^l\int_s^l \Theta_2(\tau) d\tau ds \\ -\int_0^{l_0} \Theta_1(\tau) d\tau - \int_{l_0}^l \Theta_2(\tau) d\tau \end{pmatrix}.$$

Система (5.9) имеет единственное решение, поскольку $\det M = -l^2 \neq 0$.

Каждую из строк матрицы K обозначим k_i, где $i = \overline{1,4}$ — номер строки. Тогда получим решение системы (5.9):

$$\begin{cases} u'(0) = \dfrac{1}{6l}\left(6k_1 + 6(l-l_0)k_2 + (3l_0^2 + 2l^2 - 6l_0 l)k_3 + (3l_0^2 l - l_0^3 - 2l_0 l^2)k_4\right), \\ u'''(0) = \dfrac{1}{l}\left(k_3 + (l-l_0)k_4\right), \\ u'(l) = \dfrac{1}{6l}\left(6k_1 - 6l_0 k_2 + (3l_0^2 - l^2)k_3 + (l_0 l^2 - l_0^3)k_4\right), \\ u'''(l) = \dfrac{1}{l}(k_3 - l_0 k_4). \end{cases} \tag{5.10}$$

Таким образом, получено решение системы уравнений (5.3), которое задает способ построения оператора $\tilde{A}^{-1}$:

$$\tilde{A}^{-1}\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{p} \\ \bar{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ p \\ q \end{pmatrix}, \tag{5.11}$$

где

$$u = \begin{cases} \int\limits_0^x\int\limits_0^s\int\limits_0^\eta\int\limits_0^\zeta \Theta_1(\tau)d\tau d\zeta d\eta ds + \dfrac{x^3}{6}u'''(0) + xu'(0), \quad x \in (0, l_0), \\ \int\limits_x^l\int\limits_s^l\int\limits_\eta^l\int\limits_\zeta^l \Theta_2(\tau)d\tau d\zeta d\eta ds + \dfrac{(x-l)^3}{6}u'''(l) + (x-l)u'(l), \quad x \in (l_0, l), \end{cases}$$

$$v = \bar{u}, \quad p = -\frac{m}{\varkappa}\bar{q}, \quad q = \bar{p}.$$

Константы $u'(0)$, $u'''(0)$, $u'(l)$ и $u'''(l)$ здесь определены соотношениями (5.10).

Область определения оператора $\tilde{A}^{-1}$ совпадает со всем пространством X, так как $\tilde{A}^{-1}$ определен для любого вектора $\bar{\xi} \in X$.

Согласно теореме Люмера–Филлипса (см. [19], [22]) можно утверждать, что задача (5.1)-(5.2) корректна на промежутке $t \in [0, \infty)$.

Для доказательства устойчивости выберем функционал Ляпунова в виде полной энергии:

$$2V = \int\limits_0^l (\rho v^2(x) + EI(u''(x))^2)dx + mq^2 + \varkappa p^2 = \|\xi\|_X^2, \tag{5.12}$$

тогда

$$\dot{V} = \dot{\mathcal{E}} = \sum_{j=1}^k M_j \int\limits_0^l v(x)\psi_j''(x)dx + qF = -\sum_{j=1}^k \alpha_j \left(\int\limits_0^l \psi_j''(x)v(x)dx\right)^2 - \alpha_0 q^2 \le 0. \tag{5.13}$$

Формула (5.12) показывает, что $V(\xi)$ — определенно положительный функционал в X.

В силу (5.13) для произвольного $\xi_0 \in D(\tilde{A})$

$$V(\xi(t)) \le V(\xi_0), \quad \forall t \ge 0. \tag{5.14}$$

Из неравенства (5.14) следует $V(\xi(t)) \leq 2(\|\xi_0\|_X^2)$. Значит, $\|\xi(t)\|_X \leq \|\xi_0\|_X$. Таким образом, в определении сильной устойчивости по Ляпунову можем взять $\delta = \varepsilon$. □

Из доказанного на основании теоремы Ла-Салля [18], [20] вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 1, траектории системы* (5.1) *предкомпактны в* X *и множество*

$$M = \{\xi : \dot{\mathcal{E}} = 0\} \setminus \{0\} \tag{5.15}$$

не содержит траекторий системы (5.1)*, определенных для* $t \in [0, +\infty)$*. Тогда решение* $\xi = 0$ *асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

6. Заключение

Основной результат данной работы состоит в решении задачи стабилизации механической системы в виде упругой балки с многомерным управлением. Новизна проведенных исследований заключается в построении функционалов управления для математической модели в виде абстрактного дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве с учетом распределенных и сосредоточенных управляющих воздействий. Доказательство корректности абстрактной задачи Коши для модели Эйлера–Бернулли с присоединенной массой сведено к проверке условий теоремы Люмера–Филлипса для порождающего оператора. Особенностью полученного результата является представление семейства управлений в явном виде (4.3) с произвольными положительными параметрами α_j. Для дальнейших исследований представляет интерес проверка условий следствия 1 для доказательства асимптотической устойчивости положения равновесия системы на основании принципа инвариантности Ла-Салля.

Список цитируемых источников

1. *Бердичевский В. Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. — М.: Наука, 1983. — 447 с.
2. *Бутковский А. Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1975. — 568 с.
3. *Зубов В. И.* Методы А.М. Ляпунова и их применение. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1957. — 241 с.
4. *Зуєв О. Л.* Стабілізація просторових коливань моделі пружної системи // Вісник Київського університету імені Тараса Шевченка, Серія: фізико-математичні науки. — 2007. — Вип. 3. — С. 74–79.
5. *Зуев А. Л.* Локализация предельного множества траекторий уравнения Эйлера–Бернулли с управлением // Український математичний журнал. — 2008. — Т. 60. — №2 — С. 173–182.
6. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967. — 464 с.
7. *Ла-Салль Ж., Лефшец С.* Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. — М.: Мир, 1964. — 186 с.
8. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. — М.: Физматгиз, 1961. — 824 с.
9. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. — М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950. — 473 с.
10. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. — М.: Наука, 1966. — 532 с.

11. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1976. — 392 с.
12. *Мовчан А. А.* Устойчивость процессов по двум метрикам // Прикладная математика и механика. — 1960. — Т. 24, Вып. 6. — С. 988–1001.
13. *Набиуллин М. К.* Стационарные движения и устойчивость упругих спутников. — Новосибирск: Наука, 1990. — 216 с.
14. *Рубановский В. Н.* Об устойчивости сложных механических систем // Итоги науки и техники. Общая механика. — М.: ВИНИТИ, 1982. — Т. 5. — С. 62–134.
15. *Сиразетдинов Т. К.* Устойчивость систем с распределенными параметрами. — Новосибирск: Наука, 1987. — 231 с.
16. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980. — 496 с.
17. *Шестаков А. А.* Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1990. — 320 с.
18. *LaSalle J. P.* Stability theory and invariance principles // Dynamical systems. — 1976. — Vol. 1. — P. 211–222.
19. *Lumer G., Phillips R. S,* Dissipative operators in a Banach space // Pacific J. Math. — 1961. — Vol. 11. — P. 679–698.
20. *Luo Z.-H., Guo B.-Z., Morgul O.* Stability and stabilization of infinite dimentional systems with applications. — London: Springer-Verlag, 1999. — 403 p.
21. *Oostveen J.* Strongly stabilizable distributed parameter systems. — Philadelphia: SIAM, 2000. — 150 p.
22. *Pazy A.* Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. — New York: Springer-Verlag, 1983. — 279 p.

Получена 22.04.2013