Динамические системы, вып. 26 (2009), 13–24

УДК 517.926(07)

Асимптотика розв'язку крайової задачі для лінійної сингулярно збуреної диференціально-алгебраїчної системи

М.Б. Віра

Ніжинський державний університет ім. М.В. Гоголя,
Ніжин 16600. *E-mail: VyraMaryna@mail.ru*

Анотація. Використовуючи результати асимптотичного аналізу загального розв'язку лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з тотожно виродженою матрицею при похідних, досліджується можливість побудови асимптотичного розв'язку двоточкової крайової задачі для такої системи у випадку простого спектра граничної в'язки матриць, знаходяться умови існування єдиного розв'язку цієї крайової задачі і будується його асимптотика у вигляді розвинень за степенями малого параметра. При цьому задача розглядається при досить загальних припущеннях щодо матриць крайових умов

Ключові слова: асимптотика, сингулярні збурення, гранична в'язка матриць

Розглянемо крайову задачу

$$\varepsilon^h B(t)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + f(t,\varepsilon), \tag{1}$$

$$Mx(0,\varepsilon) + Nx(1,\varepsilon) = d(\varepsilon), \tag{2}$$

де $t \in [0;1]$; $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$– малий дійсний параметр, $h \in N$; $A(t,\varepsilon), B(t)$ — дійсні або комплекснозначні квадратні матриці n-го порядку; M, N – матриці зі сталими елементами розмірністю $(l \times \; n)$; $f(t,\varepsilon)$, $d(\varepsilon)$ — задані $n-$ і $l-$вимірні вектори відповідно, $x(t,\varepsilon)$ — шуканий $n-$вимірний вектор.

Будемо передбачати, що виконуються такі умови:

1° $\det B(t) = 0, \forall t \in [0;1]$;

2° матриця $A(t,\varepsilon)$ і вектор $f(t,\varepsilon)$ допускають на відрізку $[0;1]$ рівномірні асимптотичні розвинення за степенями параметра ε:

$$A(t,\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A_k(t); f(t,\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f_k(t);$$

3° коефіцієнти розвинень $A_k(t), f_k(t)$ і матриця $B(t)$ нескінченно диференційовані на відрізку $[0;1]$;

4° гранична в'язка матриць

$$L(t,\lambda) = A_0(t) - \lambda B(t) \tag{3}$$

регулярна при всіх $t \in [0;1]$ і зберігає на цьому відрізку сталу кронекерову структуру.

Крайова задача (1), (2) розглядалась у роботах [2], [3] у випадку, коли матриця $B(t)$ при похідній — одинична, де для побудови асимптотичного розв'язку застосовувався метод примежових функцій. У роботі [6], виходячи із асимптотичного аналізу загального розв'язку системи (1), проведеного в [4], [5], побудована асимптотика розв'язку даної задачі у випадку, коли гранична в'язка матриць має прості скінченні і нескінченний елементарні дільники. При цьому передбачалось, що розмірність матриць крайової умови пов'язана із кількістю скінченних елементарних дільників граничної в'язки (3).

У даній статті, узагальнюючи результати, отримані в [6], вивчається можливість побудови асимптотичного розв'язку крайової задачі (1), (2) у випадку, коли матриці крайової умови M і N мають довільну розмірність (M, N- $(l \times n)$-матриці, $l \in N$).

Як і в [6], будемо розглядати випадок, коли:

5° в'язка матриць (3) має $n-1$ простих скінченних елементарних дільників $\lambda - \lambda_1(t), ..., \lambda - \lambda_{n-1}(t)$ і один — нескінченний.

З цієї умови випливає [4], що власним значенням $\lambda_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$ даної в'язки відповідають лише власні вектори $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$ матриці $A_0(t)$ відносно $B(t)$, а приєднані вектори відсутні. Нульовому власному значенню матриці $B(t)$ відносно $A_0(t)$ також відповідає лише власний вектор, який позначимо $\widetilde{\varphi}(t)$. Позначивши $\psi_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, $\widetilde{\psi}(t)$ — нулі спряжених матриць $(A_0(t) - \lambda B(t))^*$ та $B^*(t)$ відповідно, визначимо їх так, щоб виконувалися співвідношення

$$(B\varphi_i, \psi_i) = 1, \; i = \overline{1, n-1}; \; (A_0\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}) = 1, \tag{4}$$

де (x, y) — скалярний добуток в унітарному $n-$вимірному просторі, в якому розглядається дана задача.

При цьому, згідно з [7], вектори $\varphi_i(t)$, $\psi_i(t)$, $\widetilde{\varphi}(t)$, $\widetilde{\psi}(t)$, $i = \overline{1, n-1}$ можна визначити так, щоб вони мали такий же ступінь гладкості, що і матриці $A_0(t)$, $B(t)$, тобто були нескінченно диференційованими, що і передбачається в подальших викладках.

Розв'язок двоточкової крайової задачі (1), (2) побудуємо, виходячи з результатів асимптотичного аналізу загального розв'язку однорідної системи

$$\varepsilon^h B(t) \frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon) x, \tag{5}$$

проведеного в [4]. Як показано в [4], за виконання умови 5°, загальний розв'язок системи рівнянь (5) являє собою лінійну комбініцію $n-1$ частинних розв'язків, які можна побудувати у вигляді

$$x_i(t, \varepsilon) = u_i(t, \varepsilon) \exp(\varepsilon^{-h} \int_0^t \lambda_i(t, \varepsilon) dt), \; i = \overline{1, n-1}, \tag{6}$$

де $u_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n-1}$ — n-вимірні вектор-функції, а $\lambda_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n-1}$ — скалярні функції, що зображаються розвиненнями за степенями ε:

$$u_i(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k u_k^{(i)}(t),\ \lambda_i(t,\varepsilon)=\lambda_i(t)+\sum_{k=1}^{h-1}\varepsilon^k\lambda_k^{(i)}(t),\ i=\overline{1,n-1}. \tag{7}$$

Виведемо формули для знаходження коефіцієнтів розвинень (7), які будуть необхідні для подальших викладок. Підставивши (6), (7) у (5) і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях ε, дістанемо

$$(A_0(t)-\lambda_i(t)B(t))u_0^{(i)}(t)=0, \tag{8}$$

$$(A_0(t)-\lambda_i(t)B(t))u_k^{(i)}(t)=b_k^{(i)}(t),\ k=1,2,..., \tag{9}$$

$$b_k^{(i)}(t)=B(t)(u_{k-h}^{(i)}(t))'+B(t)\sum_{j=1}^{h-1}\lambda_j^{(i)}(t)u_{k-j}^{(i)}(t)-\sum_{j=1}^{k}A_j(t)u_{k-j}^{(i)}(t),k=1,2,\ldots. \tag{10}$$

Розв'язуючи рівняння (8), маємо

$$u_0^{(i)}(t)=c_0^{(i)}(t)\varphi_i(t),\ i=\overline{1,n-1}, \tag{11}$$

де $c_0^{(i)}(t)$ — поки що невідомі функції. Із рівнянь (9), за виконання умови розв'язності

$$(b_k^{(i)}(t),\psi_i(t))=0,k=1,2,\ldots, \tag{12}$$

вектори $u_k^{(i)}(t),\ i=\overline{1,n-1}$ знаходитимемо за формулами

$$u_k^{(i)}(t)=H_i(t)b_k^{(i)}(t)+c_k^{(i)}(t)\varphi_i(t),\ i=\overline{1,n-1},\ k=1,2\ldots, \tag{13}$$

де $c_k^{(i)}(t)$ — невідомі функції, які підлягають визначенню, $H_i(t)=(A_0-\lambda_0^{(i)}B)^-$ — напівобернені матриці до матриць $A_0(t)-\lambda_0^{(i)}(t)B(t)$. Здійснюючи взаємну підстановку формул (11), (13) в (10), при $k=\overline{1,h-1}$ дістанемо

$$b_k^{(i)}(t)=\sum_{s=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{k-s}c_s^{(i)}(t)(-1)^j\widehat{P}_j^{k-s}(H_i\Gamma^{(i)})\varphi_i(t),\ i=\overline{1,n-1},k=\overline{1,h-1}, \tag{14}$$

де символ $\widehat{P}_j^k(H_i\Gamma^{(i)})$ позначає суму всеможливих добутків j "множників" вигляду $H_i\Gamma_{l_1},\ldots,H_i\Gamma_{l_{h-1}}$, сума індексів яких $l_1+\ldots+l_{h-1}$ дорівнює k, $\Gamma_j^{(i)}=A_j-\lambda_j^{(i)}B,\ j=\overline{1,h-1},\ i=\overline{1,n-1}$, причому у всіх доданках відсутній перший множник H_i; $c_s^{(i)}(t)$, $s=\overline{0,k-1}$, $i=\overline{1,n-1}$ — невідомі функції.

Беручи до уваги останню формулу, умови розв'язності (12) запишемо у вигляді

$$\left(\sum_{s=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{k-s}c_s^{(i)}(t)(-1)^j\widehat{P}_j^{k-s}(H_i\Gamma^{(i)})\varphi_i(t),\psi_i(t)\right)=0,\ k=\overline{1,h-1},\ i=\overline{1,n-1}. \tag{15}$$

Звідси, враховуючи (4), дістанемо такі формули для функцій $\lambda_k^{(i)}(t)$, $i=\overline{1,n-1}$, $k=\overline{1,h-1}$:

$$\lambda_k^{(i)}(t)=\left(A_k\varphi_i-\sum_{j=2}^{k}(-1)^j\widehat{P}_j^k(H_i\Gamma^{(i)})\varphi_i(t),\psi_i(t)\right)=0,$$

$$k=\overline{1,h-1}, i=\overline{1,n-1}. \tag{16}$$

Підставивши (14) у (13), отримаємо відповідні формули для векторів $u_k^{(i)}(t)$:

$$u_k^{(i)}(t)=\sum_{s=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-s}c_s^{(i)}(t)(-1)^jP_j^{k-s}(H_i\Gamma^{(i)})\varphi_i(t),\ k=\overline{0,h-1}, \tag{17}$$

де $P_j^k(H_i\Gamma^{(i)})=H_i\widehat{P}_j^k(H_i\Gamma^{(i)})$.

Розглянемо рівняння (9), поклавши $k=h$. Вектор $b_h^{(i)}(t)$ матиме вигляд

$$b_h^{(i)}(t)=-\sum_{j=1}^{h}\Gamma_j^{(i)}u_{h-j}^{(i)},$$

де $\Gamma_h u=(A_h-B\frac{d}{dt})u$. Враховуючи в останньому виразі рівність

$$\Gamma_h u_0^{(i)}=c_0^{(i)}(t)\Gamma_h\varphi_i-(c_0^{(i)}(t))'B\varphi_i,$$

а також формули (17), перетворимо його до вигляду

$$b_h^{(i)}(t)=\sum_{s=0}^{h-1}\sum_{j=1}^{h-s}c_s^{(i)}(t)(-1)^j\widehat{P}_j^{h-s}(H_i\Gamma^{(i)})\varphi_i(t)+(c_0^{(i)}(t))'B\varphi_i, i=\overline{1,n-1} \tag{18}$$

де $c_s^{(i)}(t)$, $i=\overline{1,n-1}$, $s=\overline{0,h-1}$ — поки що невідомі функції. Тоді умова (12) при $k=h$ запишеться у вигляді

$$\left(\sum_{j=1}^{h}c_s^{(i)}(t)(-1)^j\widehat{P}_j^h(H_i\Gamma^{(i)})\varphi_i(t)+(c_0^{(i)}(t))'B\varphi_i(t),\psi_i(t)\right)+(\ldots)=0, \tag{19}$$

де трикрапкою позначено ті доданки, які анулюються із врахуванням умов розв'язності (12) на попередніх кроках. Ввівши позначення

$$\lambda_h^{(i)}(t)=\left(\sum_{j=1}^{h}(-1)^{j+1}\widehat{P}_j^h(H_i\Gamma^{(i)})\varphi_i(t),\psi_i(t)\right), i=\overline{1,n-1}, \tag{20}$$

і, врахувавши співвідношення (4), рівняння (19) подамо у вигляді

$$(c_0^{(i)}(t))'=\lambda_h^{(i)}(t)c_0^{(i)}(t),\ i=\overline{1,n-1}, \tag{21}$$

звідки однозначно визначимо функції $c_0^{(i)}(t)$, $i=\overline{1,n-1}$ (сталі інтегрування покладаємо рівними одиниці). Підставивши (21) у (18), дістанемо

$$b_h^{(i)}(t)=\sum_{s=0}^{h-1}\sum_{j=1}^{h-s}c_s^{(i)}(t)(-1)^j\widehat{P}_j^{h-s}(H_i\Gamma^{(i)})\varphi_i(t)+c_0^{(i)}(t)\lambda_h^{(i)}(t)B\varphi_i,$$

де $c_s^{(i)}(t)$, $s=\overline{1,h-1}$, $i=\overline{1,h-1}$ — все ще невідомі функції.

Беручи до уваги останній вираз, коефіцієнти $u_h^{(i)}(t)$, $i=\overline{1,n-1}$ знайдемо за формулою (13):

$$u_h^{(i)}(t)=\sum_{s=0}^{h}\sum_{j=0}^{h-s}c_s^{(i)}(t)(-1)^jP_j^{h-s}(H_i\Gamma^{(i)})\varphi_i(t)+c_0^{(i)}(t)\lambda_h^{(i)}(t)H_iB\varphi_i,\ i=\overline{1,n-1}.$$

Аналогічно дослідимо рівняння (9) при $k=\overline{h+1,2h-1}$. Введемо позначення

$$\lambda_k^{(i)}(t)=(\sum_{l=1}^{k-h}\sum_{i=1}^{k-h+1-l}(-1)^{i+1}\lambda_{h-1+l}\widehat{P}_i^{k-h+1-l}(H_iB,H_i\Gamma^{(i)})\varphi_i(t)+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}P_i^k(H_i\Gamma^{(i)})\varphi_i,\psi_i),k=\overline{h+1,2h-1},i=\overline{1,h-1},\tag{22}$$

де символ $\widehat{P}_j^k(H_iB,H_i\Gamma^{(i)})$ позначає суму всеможливих добутків j "множників" виду $H_i\Gamma_{l_1}^{(i)},...,H_i\Gamma_{l_j}^{(i)},j=\overline{1,h-1}$ і один виду H_iB, причому сума натуральних індексів $l_1+\ldots+l_j$ дорівнює k, а перший множник H_i у всіх доданках відсутній. Тоді, врахувавши (15), (20), (22), умови (12) подамо у вигляді лінійної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{gathered}(c_1^{(i)}(t))'=\lambda_h^{(i)}(t)c_1^{(i)}(t)+\lambda_{h+1}^{(i)}(t)c_0^{(i)}(t);\\ (c_2^{(i)}(t))'=\lambda_h^{(i)}(t)c_2^{(i)}(t)+\lambda_{h+1}^{(i)}(t)c_1^{(i)}(t)+\lambda_{h+2}^{(i)}(t)c_0^{(i)}(t);\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (c_{h-1}^{(i)}(t))'=\lambda_h^{(i)}(t)c_{h-1}^{(i)}(t)+\lambda_{h+1}^{(i)}(t)c_{h-2}^{(i)}(t)+\ldots+\lambda_{2h-1}^{(i)}(t)c_0^{(i)}(t).\end{gathered}\tag{23}$$

Розв'язуючи послідовно кожне з цих рівнянь, дістанемо функції $c_j^{(i)}(t)$, $j=\overline{1,h-1}$, взявши сталі інтегрування рівними одиниці.

Нарешті, враховуючи (22), (23), вирази для вектор-функцій $u_k^{(i)}(t)$, $k=\overline{h+1,2h-1}$ перетворимо до вигляду

$$u_k^{(i)}(t)=\sum_{l=0}^{k-h}\sum_{j=1}^{k-h+1-l}\sum_{s=0}^{k-h+1-l-j}c_l^{(i)}(t)\lambda_{h-1+j}^{(i)}(-1)^sP_s^{k-h+1-l-j}(H_iB,H_i\Gamma^{(i)})\varphi_i+$$

$$+\sum_{l=0}^{k}\sum_{s=0}^{k-l} c_l^{(i)}(t)(-1)^s P_s^{k-l}(H_i\Gamma^{(i)})\varphi_i,$$

де $P_j^k(H_iB, H_i\Gamma^{(i)}) = H_i\widehat{P}_j^k(H_iB, H_i\Gamma^{(i)})$, а оператори $\Gamma_j u$, $j = \overline{h+1, 2h-1}$ мають наступну структуру

$$\Gamma_j^{(i)}u = \begin{cases} (A_j - \lambda_j^{(i)}B)u, \ j < h, \\ (A_h - B\frac{d}{dt})u, \ j = h, \\ A_j u, \ j > h. \end{cases} \tag{24}$$

Розглянувши рівняння (9) при довільному k, враховуючи (24), за формулою (13) визначимо вектор-функції $u_k^{(i)}(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, $k = 1, 2, \ldots$:

$$u_k^{(i)}(t) = \sum_{s=0}^{k}\sum_{l=0}^{k-s}(-1)^l c_s^{(i)}(t)P_l^{k-s}(\overline{H_i\Gamma^{(i)}})\varphi_i +$$

$$+\sum_{j=0}^{k-h-1}\sum_{l=1}^{k-h-j}(-1)^l P_l^{k-h-j}(H_i\Gamma^{(i)})H_i g_{h+j}^{(i)} + H_i g_k^{(i)}, \tag{25}$$

де

$$g_k^{(i)}(t) = -\Gamma_h u_{k-h}^{(i)} - \sum_{l=1}^{k-h} A_{h+l}u_{k-h-l}^{(i)},$$

а символ $P_j^k(\overline{H_i\Gamma^{(i)}})$ — позначає суму всеможливих добутків j "множників" виду $H_i\Gamma_{l_1}^{(i)}, \ldots, H_i\Gamma_{l_j}^{(i)}$, сума індексів яких дорівнює k, причому оператори $\Gamma_j^{(i)} \equiv 0$ при $j \geq h$, а функції $c_s^{(i)}(t)$, $s = \overline{0, k}$ визначаються із ланцюга диференціальних рівнянь

$$(c_0^{(i)}(t))' = \lambda_h^{(i)}(t)c_0^{(i)}(t);$$

$$(c_1^{(i)}(t))' = \lambda_h^{(i)}(t)c_1^{(i)}(t) + \lambda_{h+1}^{(i)}(t)c_0^{(i)}(t);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(c_{k-h}^{(i)}(t))' = \lambda_h^{(i)}(t)c_{k-h}^{(i)}(t) + \lambda_{h+1}^{(i)}(t)c_{k-h-1}^{(i)}(t) + \ldots + \lambda_k^{(i)}(t)c_0^{(i)}(t).$$

Визначення скалярів $\lambda_j^{(i)}(t)$, $j = \overline{1, h-1}$, $i = \overline{1, n-1}$ і вектор-функцій $u_k^{(i)}(t)$, $k = 0, 1, \ldots,\ i = \overline{1, n-1}$ завершує побудову формальних розв'язків (6) однорідної системи (5).

Частинний розв'язок неоднорідної системи (1) побудуємо у вигляді

$$\widetilde{x}(t, \varepsilon) = v(t, \varepsilon), \tag{26}$$

де $n-$вимірна функція $v(t, \varepsilon)$ зображається формальним розвиненням

$$v(t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j v_j(t). \tag{27}$$

Для визначення коефіцієнтів розвинення $v_k(t)$ підставимо вектор (26) і розвинення (27) в систему (1) та прирівняємо вирази при однакових степенях ε :

$$A_0(t)v_k(t) = B(v_{k-h})' - \sum_{i=1}^{k} A_i(t)v_{k-i}(t) - f_k(t),\ k = 0, 1, \ldots .$$

Припустивши, що виконується умова

$$\det A_0(t) \neq 0, \forall t \in [0; 1], \tag{28}$$

дістанемо таку рекурентну формулу:

$$v_k(t) = A_0^{-1}(t) \left(B(v_{k-h})' - \sum_{i=1}^{k} A_i(t)v_{k-i} - f_k(t) \right), k = 0, 1, \ldots . \tag{29}$$

Розв'язок крайової задачі (1), (2) тепер будуватимемо у вигляді

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n-1} u_i(t,\varepsilon) \exp(\varepsilon^{-h} \int_0^t \lambda_i(t,\varepsilon)dt)\widetilde{c}^{(i)}(\varepsilon) + v(t,\varepsilon), \tag{30}$$

де $\widetilde{c}^{(i)}(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \widetilde{c}_j^{(i)}(\varepsilon)$, де $\widetilde{c}_j^{(i)}(\varepsilon)$, $i = \overline{1, n-1}$ — коефіцієнти, які підлягають визначенню із крайових умов.

Перейдемо до аналізу крайової умови (2), припускаючи, що:

$$Re\lambda_i(t) < 0,\ i = \overline{1, n-1},\ \forall t \in [0; 1]. \tag{31}$$

З цією метою підставимо формулу (30) у (2):

$$M \sum_{i=1}^{n-1} u_i(0,\varepsilon)\widetilde{c}^{(i)}(\varepsilon) + N \sum_{i=1}^{n-1} u_i(1,\varepsilon) \exp(\varepsilon^{-h} \int_0^1 \lambda_i(t,\varepsilon)dt)\widetilde{c}^{(i)}(\varepsilon) =$$

$$= d(\varepsilon) - Mv(0,\varepsilon) - Nv(1,\varepsilon). \tag{32}$$

Прирівнявши в одержаному рівнянні вирази при ε^0, і ввівши позначення

$$Q_0(\varepsilon) = [Mu_0^{(1)}(0) + Nu_0^{(1)}(1) \exp(\varepsilon^{-h} \int_0^1 \lambda_1(t,\varepsilon)dt), \ldots,$$

$$Mu_0^{(n-1)}(0) + Nu_0^{(n-1)}(1) \exp(\varepsilon^{-h} \int_0^1 \lambda_{n-1}(t,\varepsilon)dt)]$$

$\widetilde{c}_0(\varepsilon) = col(\widetilde{c}_0^{(1)}(\varepsilon), \ldots, \widetilde{c}_0^{(n-1)}(\varepsilon))$, $l_0 = d_0 - Mv_0(0) - Nv_0(1)$ дістанемо

$$Q_0(\varepsilon)\widetilde{c}_0(\varepsilon) = l_0. \tag{33}$$

Аналогічно, прирівнюючи в (32) вирази при $k-$х степенях малого параметра, дістанемо рівняння

$$Q_0(\varepsilon)\widetilde{c}_k(\varepsilon) = l_k - Q_1(\varepsilon)\widetilde{c}_{k-1}(\varepsilon) - \ldots - Q_k(\varepsilon)\widetilde{c}_0(\varepsilon), \tag{34}$$

в якому

$$Q_k(\varepsilon) = [Mu_k^{(1)}(0) + Nu_k^{(1)}(1)\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^1 \lambda_1(t,\varepsilon)dt), \ldots,$$
$$Mu_k^{(n-1)}(0) + Nu_k^{(n-1)}(1)\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^1 \lambda_{n-1}(t,\varepsilon)dt)],$$

$\widetilde{c}_k(\varepsilon) = col(\widetilde{c}_k^{(1)}(\varepsilon), \ldots, \widetilde{c}_k^{(n-1)}(\varepsilon))$, $l_k = d_k - Mv_k(0) - Nv_k(1)$.

Таким чином, розв'язання крайової задачі (1), (2) зводиться до відшукання розв'язків системи алгебраїчних рівнянь (33), (34).

Припустимо, що

$$rank Q_0(\varepsilon) = n - 1. \tag{35}$$

Тоді існує псевдообернена по Муру-Пенроузу $(n-1)\times l$-матриця $[Q_0(\varepsilon)]^+$, яка може бути обчислена за формулою [1, с.91]

$$[Q_0(\varepsilon)]^+ = (Q_0^*(\varepsilon)Q_0(\varepsilon))^{-1}Q_0^*(\varepsilon).$$

Позначимо через $\widehat{\varphi}_s$, $s = \overline{1, l-(n-1)}$ — базис нуль-простору $N([Q_0(\varepsilon)]^*)$. Складемо із цих векторів $(l \times l)-$вимірну матрицю Грама

$$\beta = \{\beta_{sk}\} = \{(\widehat{\varphi}_s, \widehat{\varphi}_k)\}$$

і визначимо матрицю-ортопроектор

$$P_{Q_0^*(\varepsilon)} = \Sigma_{s,k=1}\beta_{sk}^{(-1)}\widehat{\varphi}_s\widehat{\varphi}_k^T, \tag{36}$$

де $\beta_{sk}^{(-1)}$ — елементи матриці, оберненої до симетричної матриці Грама β. Тоді згідно з теорією, розробленою в [1], рівняння (33) має єдиний розв'язок

$$c_0(\varepsilon) = [Q_0(\varepsilon)]^+ l_0, \tag{37}$$

якщо виконується умова

$$P_{Q_0^*(\varepsilon)} l_0 = 0, \tag{38}$$

а рівняння (34) має розв'язок

$$\widetilde{c}_k(\varepsilon) = [Q_0(\varepsilon)]^+(l_k - Q_1(\varepsilon)\widetilde{c}_{k-1}(\varepsilon) - \ldots - Q_k(\varepsilon)\widetilde{c}_0(\varepsilon)), \ k = 1, 2, \ldots, \tag{39}$$

якщо

$$P_{Q_0^*(\varepsilon)}(l_k - Q_1(\varepsilon)\widetilde{c}_{k-1}(\varepsilon) - \ldots - Q_k(\varepsilon)\widetilde{c}_0(\varepsilon)) = 0, \ k = 1, 2, \ldots \tag{40}$$

Таким чином, виконання нескінченного ланцюга умов (38), (40) забезпечує існування єдиного набору векторів $\widetilde{c}_k(\varepsilon)$, $k = 0, 1, ...$, а, отже, і єдиність формального розв'язку крайової задачі (1), (2).

Переконаємося, що побудований в такий спосіб формальний розв'язок крайової задачі (1), (2) має асимптотичний характер. Введемо до розгляду $m-$наближення шуканого розв'язку

$$x_m(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n-1} u_m^{(i)}(t,\varepsilon)\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^t \lambda_i(t,\varepsilon)dt)\widetilde{c}_m^{(i)}(\varepsilon) + v_m(t,\varepsilon),$$

де

$$\widetilde{c}_m^{(i)}(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{m} \varepsilon^j \widetilde{c}_j^{(i)}(\varepsilon),\ \widetilde{v}_m(t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{m} \varepsilon^j \widetilde{v}_j(t),\ u_m^{(i)}(t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{m} \varepsilon^j u_j^{(i)}(t).$$

Підставимо вектор $x_m(t,\varepsilon)$ в диференціальний вираз

$$L(x) = \varepsilon^h B(t)\frac{dx}{dt} - A(t,\varepsilon)x - f(t,\varepsilon),$$

враховуючи при цьому алгоритм визначення функцій $\lambda_i(t,\varepsilon)$ і вектор-функцій $u_m^{(i)}(t,\varepsilon)$, $v_m(t,\varepsilon)$ а також умову (31). Дістанемо

$$L(x_m) = \varepsilon^{m+1}a(t,\varepsilon),$$

де $a(t,\varepsilon)$ – $n-$вимірна вектор-функція, рівномірно обмежена на $[0;1]$ при $\varepsilon \to 0$.

Нехай $x(t,\varepsilon)$ - точний розв'язок задачі (1), (2), існування якого [4] забезпечується умовами (31), (38), (40). Позначимо

$$y_m(t,\varepsilon) = x_m(t,\varepsilon) - x(t,\varepsilon). \tag{41}$$

Тоді вектор $y_m(t,\varepsilon)$ буде розв'язком крайової задачі

$$B(t)\frac{dy_m}{dt} = \widetilde{A}(t,\varepsilon)y_m + \varepsilon^{m+1-h}a(t,\varepsilon), \tag{42}$$

$$My_m(0,\varepsilon) + Ny_m(1,\varepsilon) = \varepsilon^{m+1}b(\varepsilon), \tag{43}$$

де

$$\widetilde{A}(t,\varepsilon) = \varepsilon^{-h}A(t,\varepsilon),$$

$b(\varepsilon)$ - деякий обмежений $l-$вимірний вектор.

Поряд із крайовою задачею (42), (43) розглянемо відповідну однорідну задачу

$$B(t)\frac{dx}{dt} = \widetilde{A}(t,\varepsilon)x, \tag{44}$$

$$Mx(0,\varepsilon) + Nx(1,\varepsilon) = 0, \tag{45}$$

а також систему, спряжену з (44)

$$\frac{d}{dt}B^*(t)x = -\widetilde{A}^*(t,\varepsilon)x. \tag{46}$$

Згідно з [4] фундаментальна матриця однорідної системи (44) в даному випадку має вигляд

$$X_{n-1}(t,\varepsilon) = (U_m(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1}))\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^t \Lambda(t,\varepsilon)dt),$$

де $\Lambda(t,\varepsilon) = diag\{\lambda_1(t,\varepsilon),\ldots,\lambda_{n-1}(t,\varepsilon)\}$, $U_m(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k U_k(t)$, а матриці $U_k(t)$ складаються з вектор-стовпців, які визначаються за формулами (25). Фундаментальна матриця спряженої системи (46) має вигляд

$$Y_{n-1}(t,\varepsilon) = (\widehat{U}_m(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1}))\exp(-\varepsilon^{-h}\int_0^t \Lambda^*(t,\varepsilon)dt),$$

де $\widehat{U}_m(t,\varepsilon)$ – матриця, елементи якої визначаються за тим же алгоритмом, що і елементи матриці $U_m(t,\varepsilon)$; Λ^* - матриця, комплексно спряжена з Λ. Тоді, використовуючи [4, с.64], загальний розв'язок системи (42) подамо у вигляді

$$\begin{gathered}
y_m(t,\varepsilon) = (U_m(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1}))\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^t \Lambda(s,\varepsilon)ds)c(\varepsilon)+ \\
+\int_0^t (U_m(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1}))\exp(\varepsilon^{-h}\int_\tau^t \Lambda(s,\varepsilon)ds)\times \\
\times(\widehat{U}_m^*(\tau,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1}))q(\tau,\varepsilon)d\tau - \widetilde{\varphi}(t)(\widetilde{\psi}^*(t)\widetilde{L}\widetilde{\varphi}(t))^{-1}\widetilde{\psi}^*(t)q(t,\varepsilon),
\end{gathered} \tag{47}$$

де

$$q(t,\varepsilon) = \varepsilon^{m-h+1}a(t,\varepsilon),$$

$$\widetilde{L}(t) = \widetilde{A}(t,\varepsilon) - \varepsilon^h B(t)\frac{d}{dt}.$$

Підставивши одержаний вираз у крайову умову (43), дістанемо алгебраїчне рівняння

$$Q_m(\varepsilon)c(\varepsilon) = \beta_m(\varepsilon), \tag{48}$$

де

$$Q_m(\varepsilon) = MU_m(0,\varepsilon) + NU_m(1,\varepsilon)\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^1 \Lambda(t,\varepsilon)dt),$$

$$\beta_m(\varepsilon) = \varepsilon^{m+1}b(\varepsilon) + M\xi(0,\varepsilon) + N\xi(1,\varepsilon) - \int_0^1 (NU_m(1,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1}))\times$$

$$\times\exp(\varepsilon^{-h}\int_\tau^1 \Lambda(s,\varepsilon)ds)(\widehat{U}_m^*(\tau,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1}))q(\tau,\varepsilon)d\tau - O(\varepsilon^{m+1})exp(\varepsilon^{-h}\int_0^1 \Lambda(t,\varepsilon)dt),$$

де

$$\xi(t,\varepsilon)=\widetilde{\varphi}(t)(\widetilde{\psi}^*(t)\widetilde{L}\widetilde{\varphi}(t))^{-1}\widetilde{\psi}^*(t)q(t,\varepsilon),$$

звідки, беручи до уваги, що згідно з (35) $rankQ_m(\varepsilon)=n-1$ при досить малих ε, вектор $c(\varepsilon)$ визначимо за формулою

$$c(\varepsilon)=[Q_m(\varepsilon)]^+\beta_m(\varepsilon), \tag{49}$$

де $[Q_m(\varepsilon)]^+$ — псевдообернена по Муру-Пенроузу матриця до матриці $Q_m(\varepsilon)$. Виходячи із означення псевдооберненої матриці та умови (35), легко переконатися, що $[Q_m(\varepsilon)]^+=[Q_0(\varepsilon)]^++O(\varepsilon)$, де $[Q_0(\varepsilon)]^+$ — обмежена матриця.

Визначивши в такий спосіб вектор $c(\varepsilon)$, розв'язок неоднорідної крайової задачі (42), (43) отримаємо у вигляді

$$y_m(t,\varepsilon)=(Gq)(t,\varepsilon)+(U_m(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m+1}))\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^t\Lambda(t,\varepsilon)dt)\times$$
$$\times[Q_m(\varepsilon)]^+\varepsilon^{m+1}b(\varepsilon), \tag{50}$$

де $(Gq)(t,\varepsilon)$ — оператор Гріна, який має вигляд

$$(Gq)(t,\varepsilon)=\int_0^1 G_0(t,\tau,\varepsilon)q(\tau,\varepsilon)d\tau+(U_m(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m+1}))\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^t\Lambda(s,\varepsilon)ds)\times$$
$$\times[Q_m(\varepsilon)]^+(M\xi(0,\varepsilon)+N\xi(1,\varepsilon))-\xi(t,\varepsilon), \tag{51}$$

$G_0(t,\tau,\varepsilon)$ - матриця Гріна однорідної крайової задачі (44), (45), яка має наступну структуру:

$$G_0(t,\tau,\varepsilon)=\begin{cases}
-(U_m(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m+1}))\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^t\Lambda(t,\varepsilon)dt)\times\\
\times[Q_m(\varepsilon)]^+N(U_m(1,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m+1}))\times\\
\times\exp(\varepsilon^{-h}\int_\tau^1\Lambda(s,\varepsilon)ds)(\widehat{U}_m^*(\tau,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m+1})),\\
\text{якщо}\quad 0\le t<\tau\le 1;\\
(U_m(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m+1}))\exp(\varepsilon^{-h}\int_\tau^t\Lambda(s,\varepsilon)ds)\times\\
\times(\widehat{U}_m^*(\tau,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m+1}))-(U_m(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m+1}))\times\\
\times\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^t\Lambda(t,\varepsilon)dt)[Q_m(\varepsilon)]^+\times\\
\times N(U_m(1,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m+1}))\exp(\varepsilon^{-h}\int_\tau^1\Lambda(s,\varepsilon)ds)\times\\
\times(\widehat{U}_m^*(\tau,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m+1})),\\
\text{якщо}\quad 0\le\tau\le t\le 1.
\end{cases} \tag{52}$$

Перейдемо в рівності (50) до оцінок за нормою, беручи до уваги умову (31). Врахувавши обмеженість всіх матричних і векторних функцій, які містяться в (52), дістанемо

$$\|y_m(t,\varepsilon)\| \leq \varepsilon^{m-h+1}\widehat{c},$$

де $\widehat{c}$ – деяка стала, що не залежить від ε. Повернувшись до заміни (41), отримаємо остаточну оцінку

$$\|x_m(t,\varepsilon) - x(t,\varepsilon)\| \leq \varepsilon^{m-h+1}\widehat{c}.$$

Підсумком проведених викладок є така теорема.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови* $1^\circ - 5^\circ$, *і (28), (31), (35), (38), (40), то при досить малих* ε *крайова задача (1), (2) має єдиний розв'язок, який виражається асимптотичною формулою*

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n-1} u_m^{(i)}(t,\varepsilon)\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^t \lambda_i(t,\varepsilon)dt) + v_m(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m-h+1}),$$

де $u_m^{(i)}(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n-1}$; $v_m(t,\varepsilon)$ *—* $n-$*вимірні вектор-функції,* $\lambda_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n-1}$ *— скалярні функції, що зображаються у вигляді розвинень (7),(27), коефіцієнти яких визначаються за допомогою рекурентних формул (25), (16), (29).*

Перелік цитованих джерел

1. *Бойчук А.А., Журавлёв В.Ф., Самойленко А.М.* Обобщённо-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. Труди Інституту математики НАНУ, том 13. — Київ: Інститут математики НАН України, 1995. — 318 с.
2. *Каранджулов Л.И., Бойчук А.А., Божко В.А.* Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущённой линейной краевой задачи // Докл. АН Украины. — 1994. — № 1. — С. 7–10.
3. *Каранджулов Л.И.* Линейные краевые задачи для сингулярно возмущённых дифференциальных систем // Докл. АН Украины. — 1996. — № 7. — С. 1–5.
4. *Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — Київ: Вища школа, 2000. — 294 с.
5. *Шкиль Н.И., Старун И.И., Яковец В.П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями. — Київ: Вища школа, 1991. — 207 с.
6. *Яковец В.П., Вира М.Б* Построение асимптотических решений двухточечных краевых задач для вырожденной сингулярно возмущённой системы дифференциальных уравнений // Труды Воронежской зимней математической школы С.Г. Крейна-2008. Воронеж:ВорГУ. — 2008. — № 1. — С. 319-332.
7. *Sibuya Y.* Some global properties of matrixes of functions of one variable // Math. anal. — 1965. — 161, № 1. — P. 67–77.

Получена 10.06.2009