Динамические системы, том 1(29), №1 (2011), 15–30

УДК 517.928

Про побудову асимптотичного розв'язку двоточкової крайової задачі для лінійної сингулярно збуреної диференціально-алгебраїчної системи

М. Б. Віра

Ніжинський державний університет ім. М. Гоголя,
Ніжин 16600. *E-mail: VyraMaryna@mail.ru*

Анотація. Досліджується можливість побудови асимптотичного розв'язку двоточкової крайової задачі для лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з тотожно виродженою матрицею при похідних у випадку кратного спектра граничної в'язки матриць. Знаходяться умови існування єдиного розв'язку цієї крайової задачі і побудована його асимптотика у вигляді розвинень за дробовими степенями малого параметра. В ході дослідження використовуються результати асимптотичного аналізу загального розв'язку лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з виродженнями

Ключові слова: сингулярні збурення, гранична в'язка матриць, кратний спертр, асимптотичний розв'язок

Розглянемо двоточкову крайову задачу

$$\varepsilon^h B(t)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + f(t,\varepsilon), \tag{1}$$

$$Mx(0,\varepsilon) + Nx(T,\varepsilon) = d(\varepsilon), \tag{2}$$

де $x(t,\varepsilon)$ — шуканий n-вимірний вектор, $t \in [0;T]$; $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$ — малий дійсний параметр, $h \in N$; $A(t,\varepsilon), B(t)$ — квадратні матриці n-го порядку; M, N — $(n-1)\times n$-вимірні матриці зі сталими елементами; $f(t,\varepsilon)$, $d(\varepsilon)$ — задані n- і $(n-1)$-вимірні вектори відповідно.

Нехай виконуються такі умови:

1° матриця $A(t,\varepsilon)$ і вектор $f(t,\varepsilon)$ допускають на відрізку $[0;T]$ рівномірні асимптотичні розвинення за степенями параметра ε:

$$A(t,\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k A_k(t); f(t,\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k f_k(t);$$

2° коефіцієнти розвинень $A_k(t), f_k(t)$ і матриця $B(t)$ нескінченно диференційовані на відрізку $[0;T]$;

3° $\det B(t) = 0, \forall t \in [0;T]$;

4° гранична в'язка матриць

$$L(t, \lambda) = A_0(t) - \lambda B(t)$$

регулярна при всіх $t \in [0; T]$ і зберігає на цьому відрізку сталу кронекерову структуру, тобто кратності всіх власних значень граничної в'язки і відповідних скінченних та нескінченних елементарних дільників є сталими на даному відрізку.

Крайова задача (1), (2) розглядалась у роботах [1,4] за умови, коли гранична в'язка матриць $A_0(t) - \lambda B(t)$ має на відрізку $[0; T]$ простий спектр. У цій статті розглянемо можливість побудови асимптотичного розв'язу крайової задачі у значно складнішому випадку, коли гранична в'язка матриць має на $[0; T]$ кратний спектр, а саме: один скінченний елементарний дільник $(\lambda - \lambda_0(t))^p$ кратністю p і один нескінченний — кратністю q $(p + q = n)$.

Як показано в [2, с.97-98], скінченному елементарному дільнику $(\lambda - \lambda_0(t))^p$ відповідає жорданів ланцюжок векторів матриці $A_0(t)$ відносно $B(t)$ завдовжки p, вектори якого визначаються виразами $\varphi_i(t) = [H(t)B(t)]^{i-1}\varphi(t)$, $i = \overline{1, p}$, де $H(t)$ – напівобернена матриця для матриці $A_0(t) - \lambda_0 B(t)$, а $\varphi(t)$ — власний вектор цієї в'язки матриць. Нескінченному елементарному дільнику відповідає жорданів ланцюжок векторів матриці $B(t)$ відносно $A_0(t)$ завдовжки q, вектори якого визначаються виразами $\widetilde{\varphi}_i(t) = [G(t)A_0(t)]^{i-1}\widetilde{\varphi}(t)$, $i = \overline{1, q}$, де $G(t)$ — напівобернена матриця для матриці $B(t)$.

Позначимо $\psi(t)$ і $\widetilde{\psi}(t)$ — нулі матриць $(A_0 - \lambda_0 B)^*$ та B^* відповідно і визначимо їх так, щоб виконувалися співвідношення

$$(B(HB)^{i-1}\varphi, \psi) = \delta_{i,p}, i = \overline{1, p}, \; (A_0(GA_0)^{j-1}\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}) = \delta_{j,q}, j = \overline{1, q},$$

де $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера, що завжди можливо [2]. Згідно з теорією асимптотичного інтегрування вироджених лінійних систем диференціальних рівнянь, розробленою в [2,3], асимптотичні розвинення лінійно незалежних розв'язків однорідної системи

$$\varepsilon^h B(t) \frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon) x, \tag{3}$$

що відповідають скінченному елементарному дільнику, можна побудувати у вигляді

$$x(t, \varepsilon) = u(t, \varepsilon) \exp(\varepsilon^{-h} \int_0^t (\lambda_0(\tau) + \lambda(\tau, \varepsilon)) d\tau), \tag{4}$$

де $u(t, \varepsilon)$ — n-вимірна вектор-функція, $\lambda(t, \varepsilon)$ — скалярна вектор-функція, які зображаються формальними розвиненнями за дробовими степенями малого параметра. При цьому, як показано в [2], функція $\lambda(t, \varepsilon)$ має задовольняти рівняння розгалуження

$$\lambda^p + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s L_{0s} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s L_{ks}[\lambda^k] = 0, \tag{5}$$

коефіцієнти якого виражаються формулами

$$L_{0s} = \sum_{j=1}^{s} (-1)^j (P_j^s(H\Gamma)\varphi, \psi), s = 1, 2, \dots,$$

$$L_{ks}[\lambda^k] = \sum_{i=0}^{[\frac{s}{h}]} \sum_{j=0}^{s-ih} (-1)^j D^i[\lambda^k](P_{i+k,j}^{s-hi}(HB, H\Gamma)\varphi, \psi), k, s = 1, 2, \dots.$$

Відповідний вектор $u(t,\varepsilon)$ зображається у вигляді

$$u(t,\varepsilon) = \varphi + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s H\widetilde{L}_{0s}\varphi + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s H\widetilde{L}_{ks}[\lambda^k]\varphi, \tag{6}$$

де

$$\widetilde{L}_{0s} = \sum_{j=1}^{s} (-1)^j P_j^s(H\Gamma), s = 1, 2, \dots,$$

$$\widetilde{L}_{ks}[\lambda^k] = \sum_{i=0}^{[\frac{s}{h}]} \sum_{j=0}^{s-ih} (-1)^j D^i[\lambda^k] P_{i+k,j}^{s-hi}(HB, H\Gamma), k = 1, 2, \dots, s = 0, 1, \dots. \tag{7}$$

Символом $P_{s,k}^m(HB, H\Gamma)$ тут позначено суму всеможливих "добутків"s множників матриць HB і k операторів $H\Gamma_{j_1}, H\Gamma_{j_2}, \dots, H\Gamma_{j_k}$ з натуральними індексами, сума яких $j_1 + j_2 + j_k = m$, де $\Gamma_k = A_k(t) - \delta_{k,h}B(t)\frac{d}{dt}, k = 1, 2, \dots$. При цьому перший множник H у всіх доданках цього виразу "відбирається тобто першим "множником"у них є або B або Γ_j з відповідним індексом. Символом $D^i[\lambda^k]$ позначається диференціальний вираз, що являє собою суму всеможливих добутків k "множників"λ та i "множників"$D = \frac{d}{dt}$. При цьому оператор D діє на весь вираз, який міститься праворуч від нього, наприклад,

$$D^2[\lambda^2] = D^2\lambda^2 + D\lambda D\lambda + \lambda D^2\lambda = 3(\lambda')^2 + 4\lambda\lambda''.$$

Доведено, що за відсутності точок повороту рівняння розгалуження (5) завжди має p розв'язків $\lambda_i(t,\varepsilon)$, які можна знайти у вигляді формальних розвинень за дробовими степенями малого параметра, показники яких залежать від поведінки коефіцієнтів $L_{ks}[\lambda^k]$ і визначаються за допомогою діаграм Ньютона.

Розглянемо найпростіший випадок, коли

$$L_{01} = -(\Gamma_1\varphi, \psi) = (A_1\varphi, \psi) + \delta_{h,1}(\varphi', \psi) \neq 0, \forall t \in [0; T]. \tag{8}$$

Тоді відповідна діаграма Ньютона має вигляд відрізка, що сполучає точки з координатами $(0; 1)$ і $(p; 0)$ (на осі Ox відкладаємо показники степеня λ, а на осі ординат — показники степенів ε членів рівняння (5)). Звідси випливає, що тангенс кута нахилу діаграми до від'ємного напряму осі Ox дорівнює $\frac{1}{p}$. Тому відповідні розвинення для функцій $\lambda_i(t,\varepsilon)$ можна побудувати за степенями $\mu_1 = \varepsilon^{\frac{1}{p}}$:

$$\lambda_j(t,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_1^k \lambda_k^{(j)}(t), j = \overline{1,p}. \tag{9}$$

При цьому перший коефіцієнт цього розвинення задовольняє визначальне рівняння

$$(\lambda_1^{(j)}(t))^p + L_{01} = 0, \tag{10}$$

з якого знаходимо

$$\lambda_1^{(j)}(t) = \sqrt[p]{|(\Gamma_1\varphi,\psi)|} \exp\left(i\frac{arg(\Gamma_1\varphi,\psi) + 2\pi(j-1)}{p}\right), j = \overline{1,p}.$$

Підставивши ряд (9) у рівняння розгалуження (5), дістанемо

$$\sum_{k=p}^{\infty} \mu_1^k P_p^k(\lambda^{(i)}) + \sum_{k=p}^{\infty} \mu_1^k L_{0,\frac{k}{p}} + \sum_{k=p+1}^{\infty} \sum_{s=1}^{[\frac{k-1}{p}]} \sum_{j=1}^{k-sp} \mu_1^k L_{js}[P_j^{k-sp}(\lambda^{(i)})] = 0, \tag{11}$$

де $L_{0,\frac{k}{p}} = 0$, якщо число k не ділиться на p. Прирівнявши в (11) вирази при однакових степенях μ_1, отримаємо нескінченну систему рівнянь

$$P_p^k(\lambda^{(i)}) + L_{0,\frac{k}{p}} + \sum_{s=1}^{[\frac{k-1}{p}]} \sum_{j=1}^{k-sp} L_{js}[P_j^{k-sp}(\lambda^{(i)})] = 0, k = p, p+1, \ldots. \tag{12}$$

Перше рівняння цієї системи (при $k = p$) збігається із визначальним рівнянням (10). Поклавши в ньому $p+k$ замість k і взявши до уваги, що

$$P_p^{p+k}(\lambda^{(i)}) = p(\lambda_1^{(i)})^{p-1}\lambda_{k+1}^{(i)} + \widetilde{P}_p^{p+k}(\lambda^{(i)}),$$

де $\widetilde{P}_p^{p+k}(\lambda^{(i)})$ — та частина виразу $P_p^{p+k}(\lambda^{(i)})$, яка містить тільки ті $\lambda_j^{(i)}$, індекси яких $j < k+1$, а третій доданок у (12) не містить $\lambda_j^{(i)}$, індекси яких перевищують k, матимемо таку рекурентну формулу для визначення коефіцієнтів розвинення (9):

$$\lambda_{k+1}^{(i)}(t) = -\frac{1}{p(\lambda_1^{((i))})^{p-1}} \left(\widetilde{P}_p^{p+k}(\lambda^{(i)}) + L_{0,\frac{p+k}{p}} + \sum_{s=1}^{[\frac{p+k-1}{p}]} \sum_{j=1}^{p+k-sp} L_{js}[P_j^{p+k-ps}(\lambda^{(i)})]\right). \tag{13}$$

Щоб одержати відповідні розвинення для векторів $u_i(t,\varepsilon)$, підставимо (9) у (6). Перегрупувавши доданки, дістанемо розвинення

$$u_i(t,\varepsilon) = \varphi(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_1^k u_k^{(i)}(t), i = \overline{1,p},$$

коефіцієнти яких визначаються формулами

$$u_k^{(i)}(t) = \sum_{s=0}^{[\frac{k-1}{p}]} \sum_{j=1}^{k-sp} H\widetilde{L}_{js}[P_j^{k-ps}(\lambda^{(i)})]\varphi + H\widetilde{L}_{0,\frac{k}{p}}\varphi, k = 1, 2, \ldots, i = \overline{1, p}. \tag{14}$$

Однорідна система (3) крім p розв'язків першої групи вигляду (4), що відповідають скінченному елементарному дільнику граничної в'язки матриць $A_0 - \lambda B(t)$, матиме ще і розв'язки другої групи, які відповідають нескінченному елементарному дільнику.

Згідно з теорією, розробленою в [2], асимптотичні розвинення цих розв'язків можна побудувати у вигляді

$$x(t, \varepsilon) = v(t, \varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \frac{d\tau}{\xi(\tau, \varepsilon)}\right), \tag{15}$$

де $v(t, \varepsilon)$ — n-вимірна вектор-функція, $\xi(t, \varepsilon)$ — скалярна вектор-функція, які зображаються формальними розвиненнями за дробовими степенями малого параметра. При цьому, функція $\xi(t, \varepsilon)$ має задовольняти рівняння розгалуження

$$\xi^q + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s M_{ks}[\xi^k] = 0, \tag{16}$$

коефіцієнти якого виражаються формулами:

$$M_{1s}[\xi] = \xi(A_s\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}), s = 1, 2, \ldots,$$

$$M_{ks}[\xi^k] = \sum_{j=0}^{min(k-2;[\frac{s}{h}])} (-1)^j \xi^2 \widetilde{D}^j(\xi^{k-2})(P_{k-j}^{s-hj}(G\Gamma)\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}), k, s = 1, 2, \ldots, \tag{17}$$

де $\widetilde{D}^j(\xi^s)$ — сума всеможливих добутків j множників $D\xi$ та $s - j$ множників ξ, а відповідний вектор $v(t, \varepsilon)$ зображається у вигляді

$$v(t, \varepsilon) = \widetilde{\varphi} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s G\widetilde{M}_{ks}[\xi^k]\widetilde{\varphi}, \tag{18}$$

де

$$\widetilde{M}_{k0}[\xi^k] = \xi^k A_0(GA_0)^{k-1}, k = 1, 2, \ldots,$$

$$\widetilde{M}_{ks}[\xi^k] = \sum_{j=0}^{min(k-1;[\frac{s}{h}])} (-1)^j \xi \widetilde{D}^j(\xi^{k-1}) P_{k-j}^{s-hj}(G\Gamma), k, s = 1, 2, \ldots. \tag{19}$$

Розглянемо найбільш простий випадок, коли коефіцієнт M_{11} відмінний від нуля, тобто виконується умова

$$(A_1\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}) \neq 0, \forall t \in [0; T]. \tag{20}$$

Тоді діаграма Ньютона, побудована за коефіцієнтами рівняння розгалуження (16) має вигляд відрізка, що сполучає точки з координатами $(1; 1)$ та $(q; 0)$ (на осі абсцис відкладаємо показники степеня ξ, а на осі ординат — показники степеня ε членів рівняння (16)). Тангенс кута нахилу діаграми до від'ємного напрямку осі абсцис дорівнює довжині проекції діаграми на вісь абсцис, а саме $q-1$. Звідки випливає, що це рівняння має $q-1$ розв'язків $\xi_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,q-1}$, які можна побудувати у вигляді розвинень за степенями $\mu_2=\varepsilon^{\frac{1}{q-1}}$:

$$\xi_i(t,\varepsilon)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_2^k\xi_k^{(i)}(t), i=\overline{1,q-1}. \tag{21}$$

При цьому перший коефіцієнт розвинення (21) задовольняє відповідне визначальне рівняння

$$(\xi_1^{(i)})^q+\xi_1^{(i)}(t)M_{11}=0, \tag{22}$$

звідки знаходимо

$$\xi_1^{(j)}(t)=\sqrt[q-1]{-(A_1\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})}\exp\left(i\frac{arg(-(A_1\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}))+2\pi(j-1)}{q-1}\right), j=\overline{1,q-1}.$$

Для знаходження наступних коефіцієнтів підставимо ряд (21) у рівняння (16). Перегрупувавши доданки і прирівнявши вирази з однаковими степенями μ_2, дістанемо нескінченну систему рівнянь

$$P_q^k(\xi^{(i)})+\sum_{s=1}^{[\frac{k-1}{q-1}]}\sum_{j=1}^{k-(q-1)s}M_{js}[P_j^{k-(q-1)s}(\xi^{(i)})]=0, k=q+1,\dots.$$

Поклавши в ній $q+k$ замість k, дістанемо

$$P_q^{q+k}(\xi^{(i)})+M_{11}[\xi_{k+1}^{(i)}]+\sum_{s=2}^{[\frac{q+k-1}{q-1}]}\sum_{j=1}^{q+k-(q-1)s}M_{js}[P_j^{q+k-(q-1)s}(\xi^{(i)})]+$$

$$+\sum_{j=2}^{k+1}M_{j1}[P_j^{k+1}(\xi^{(i)})]=0. \tag{23}$$

Згідно з (17), (22) виконується рівність

$$P_q^{q+k}(\xi^{(i)})+M_{11}[\xi_{k+1}^{(i)}]=-(q-1)\xi_{k+1}^{(i)}M_{11}+\widetilde{P}_q^{q+k}(\xi^{(i)}),$$

де $\widetilde{P}_q^{q+k}(\xi^{(i)})$ — та частина виразу $P_q^{q+k}(\xi^{(i)})$, яка не містить $\xi_{k+1}^{(i)}$. Тоді із рівняння (23) дістанемо таку рекурентну формулу для знаходження коефіцієнтів розвинення (21):

$$\xi_{k+1}^{(i)}(t)=\frac{1}{(q-1)(A_1\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})}[\sum_{s=2}^{[\frac{q+k-1}{q-1}]}\sum_{j=1}^{q+k-(q-1)s}M_{js}[P_j^{q+k-(q-1)s}(\xi^{(i)})]+$$

$$+\sum_{j=2}^{k+1} M_{j1}[P_j^{k+1}(\xi^{(i)})]], k = 1, 2, \ldots, i = \overline{1, q-1}.$$

Підставивши ряд (21) у (18) і здійснивши відповідні дії над формальними рядами та згрупувавши доданки з однаковими степенями μ_2, дістанемо формальні розвинення для вектор-функції $v_i(t, \varepsilon)$:

$$v_i(t, \varepsilon) = \widetilde{\varphi}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_2^k v_k^{(i)}(t), i = \overline{1, q-1},$$

коефіцієнти яких виражаються формулами

$$v_k^{(i)}(t) = \sum_{s=0}^{[\frac{k-1}{q-1}]} \sum_{j=1}^{k-(q-1)s} G\widetilde{M}_{js}[P_j^{k-(q-1)s}(\xi^{(i)})]\widetilde{\varphi}, k = 1, 2, \ldots.$$

Таким чином, за виконанням умов (8), (20), однорідна система (3) має p формальних розв'язків, що відповідають скінченному елементарному дільнику, вигляду (4) та $q-1$ формальних розв'язків, що відповідають нескінченному елементарному дільнику, вигляду (15).

Частинний розв'язок неоднорідної системи (1) шукаємо у вигляді

$$x(t, \varepsilon) = \widetilde{v}(t, \varepsilon),$$

де $\widetilde{v}(t, \varepsilon)$ — n-вимірна вектор-функція, що зображається розвиненням

$$\widetilde{v}(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \widetilde{v}_k(t). \tag{24}$$

Підставивши останнє розвинення у систему (1) і прирівнявши вирази при однакових степенях ε, дістанемо систему рівнянь:

$$A_0(t)\widetilde{v}_k(t) = B(t)\widetilde{v}'_{k-h}(t) - \sum_{i=1}^{k} A_i(t)\widetilde{v}_{k-i}(t) - f_k(t), k = 0, 1, \ldots.$$

Нехай

$$\det A_0(t) \neq 0, \forall t \in [0; T], \tag{25}$$

тоді із останньої системи одержимо

$$\widetilde{v}_k(t) = A_0^{-1}(t)[B(t)\widetilde{v}'_{k-h}(t) - \sum_{i=1}^{k} A_i(t)\widetilde{v}_{k-i}(t) - f_k(t)], k = 0, 1, \ldots. \tag{26}$$

Припустимо тепер, що виконуються умови:

$$Re\lambda_0(t) < 0, Re\xi_1^{(i)}(t) < 0, i = \overline{1, l}, Re\xi_1^{(j)} > 0, j = \overline{l+1, q-1}. \tag{27}$$

Тоді розв'язок крайової задачі (1), (2) будуємо у вигляді суми лінійної комбінації розв'язків однорідної системи і частинного розв'язку неоднорідної системи:

$$x(t,\varepsilon)=\mu_1^{-(p-1)}\sum_{i=1}^{p}u_i(t,\mu_1)c_i(\varepsilon)\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^t\lambda_i(\tau,\mu_1)d\tau)+$$

$$\mu_2^{-(l-1)}\sum_{i=1}^{l}v_i(t,\mu_2)\widetilde{c}_i(\varepsilon)\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^t\frac{d\tau}{\xi_i(\tau,\mu_2)})+$$

$$+\mu_2^{-(q-l-2)}\sum_{i=l+1}^{q-1}v_i(t,\mu_2)\widetilde{c}_i(\varepsilon)\exp(-\varepsilon^{-h}\int_t^T\frac{d\tau}{\xi_i(\tau,\mu_2)})+\widetilde{v}(t,\varepsilon), \tag{28}$$

де $c_i(\varepsilon)$, $i=\overline{1,p}$, $\widetilde{c}_j(\varepsilon)$, $j=\overline{1,q-1}$ — скалярні множники, які розкладаються в формальні степеневі ряди

$$c_i(\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k c_k^{(i)}, i=\overline{1,p},$$

$$\widetilde{c}_j(\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\widetilde{c}_k^{(j)}, j=\overline{1,q-1}, \mu=\sqrt[p(q-1)]{\varepsilon},$$

коефіцієнти яких $c_k^{(i)}$, $\widetilde{c}_k^{(j)}$, $k=0,1,\ldots$, підлягають визначенню із крайової умови (2). Підставивши вектор (28) у крайову умову (2) і знехтувавши, на підставі умови (27), експоненціально малими доданками, отримаємо:

$$\mu^{-(p-1)(q-1)}\sum_{i=1}^{p}Mu_i(0,\mu_1)c_i(\varepsilon)+\mu^{-(l-1)p}\sum_{i=1}^{l}Mv_i(0,\mu_2)\widetilde{c}_i(\varepsilon)+$$

$$+\mu^{-(q-l-2)p}\sum_{i=l+1}^{q-1}Nv_i(T,\mu_2)\widetilde{c}_i(\varepsilon)=d(\varepsilon)-M\widetilde{v}(0,\varepsilon)-N\widetilde{v}(T,\varepsilon).$$

Припустимо, для визначеності, що $p\geq q-1$. Тоді $(p-1)(q-1)>(l-1)p$, $(p-1)(q-1)>(q-l-2)p$. Помноживши останнє рівняння на $\mu^{(p-1)(q-1)}$ і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях μ, дістанемо систему рівнянь

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=0}^{[\frac{k}{q-1}]}Mu_j^{(i)}(0)c_{k-(q-1)j}^{(i)}+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=0}^{[\frac{k-(q-1)(p-1)+p(l-1)}{p}]}Mv_j^{(i)}(0)\widetilde{c}_{k-(q-1)(p-1)+p(l-1)-pj}^{(i)}+$$

$$+\sum_{i=l+1}^{q-1}\sum_{j=0}^{[\frac{k-(q-1)(p-1)+p(q-l-2)}{p}]}Nv_j^{(i)}(T)\widetilde{c}_{k-(q-1)(p-1)+p(q-l-2)-pj}^{(i)}=l_{\frac{k-(q-1)(p-1)}{p(q-1)}}, k=0,1,\ldots, \tag{29}$$

де $l_k = d_k - M\widetilde{v}_k(0) - N\widetilde{v}_k(T)$, причому $l_{\frac{a}{b}} = 0$, якщо a не ділиться на b або $\frac{a}{b} < 0$.

Нехай

$$\det U_0 \neq 0, \tag{30}$$

де

$$U_0 = [M\varphi(0), MH(0)B(0)\varphi(0), \ldots, M[H(0)B(0)]^{p-1}\varphi(0),$$
$$M\widetilde{\varphi}(0), MG(0)A_0(0)\widetilde{\varphi}(0), \ldots, M[G(0)A_0(0)]^{l-1}\widetilde{\varphi}(0),$$
$$N\widetilde{\varphi}(T), NG(T)A_0(T)\widetilde{\varphi}(T), \ldots, N[G(T)A_0(T)]^{q-l-2}\widetilde{\varphi}(T)].$$

Підставимо відповідні вектор-функції у систему (29). Взявши до уваги (7), (19) і змінивши порядок сумування, дістанемо

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{s=0}^{[\frac{k}{q-1}]}\sum_{j=s}^{[\frac{k}{q-1}]} P_s^j(\lambda^{(i)}(0))c^{(i)}_{k-(q-1)j}M(HB)^s\varphi(0)+$$

$$+\sum_{i=1}^{l}\sum_{s=0}^{[\frac{k-(q-1)(p-1)+p(l-1)}{p}]}\sum_{j=s}^{[\frac{k-(q-1)(p-1)+p(l-1)}{p}]} P_s^j(\xi^{(i)}(0))\widetilde{c}^{(i)}_{k-(q-1)(p-1)+p(l-1)-pj}M(GA_0)^s\widetilde{\varphi}(0)+$$

$$+\sum_{i=l+1}^{q-1}\sum_{s=0}^{[\frac{k-(q-1)(p-1)+p(q-l-2)}{p}]}\sum_{j=s}^{[\frac{k-(q-1)(p-1)+p(q-l-2)}{p}]} P_s^j(\xi^{(i)}(T))\widetilde{c}^{(i)}_{k-(q-1)(p-1)+p(q-l-2)-pj}\times$$

$$\times N(GA_0)^s\widetilde{\varphi}(T) = \widetilde{l}_k, k = 0, 1, \ldots, \tag{31}$$

$$\widetilde{l}_k = l_{\frac{k-(q-1)(p-1)}{p(q-1)}} - \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=0}^{[\frac{k}{q-1}]} MH\widetilde{L}_{0,\frac{j}{p}}\varphi(0)c^{(i)}_{k-(q-1)j}-$$

$$-\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=0}^{[\frac{k}{q-1}]}\sum_{s=1}^{[\frac{j-1}{p}]}\sum_{r=1}^{j-ps} MH\widetilde{L}_{rs}[P_r^{j-ps}(\lambda^{(i)}(0))]c^{(i)}_{k-(q-1)j}\varphi(0)-$$

$$-\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{[\frac{k-(q-1)(p-1)+p(l-1)}{p}]}\sum_{s=1}^{[\frac{j-1}{q-1}]}\sum_{r=1}^{j-(q-1)s} \widetilde{M}_{rs}[P_r^{j-(q-1)s}(\xi^{(i)}(0))]\widetilde{c}^{(i)}_{k-(q-1)(p-1)+p(l-1)-pj}\times$$

$$\times MG\widetilde{\varphi}(0) - \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=0}^{[\frac{k-(q-1)(p-1)+p(l-1)}{p}]} MG\widetilde{M}_{0,\frac{j}{q-1}}(0)\widetilde{\varphi}(0)\widetilde{c}^{(i)}_{k-(q-1)(p-1)+p(l-1)-pj}-$$

$$-\sum_{i=l+1}^{q-1}\sum_{j=1}^{[\frac{k-(q-1)(p-1)+p(q-l-2)}{p}]}\sum_{s=1}^{[\frac{j-1}{q-1}]}\sum_{r=1}^{j-(q-1)s} \widetilde{M}_{rs}[P_r^{j-(q-1)s}(\xi^{(i)}(T))]\widetilde{c}^{(i)}_{k-(q-1)(p-1)+p(q-l-2)-pj}\times$$

$$\times NG\widetilde{\varphi}(T) - \sum_{i=l+1}^{q-1} \sum_{j=1}^{[\frac{k-(q-1)(p-1)+p(q-l-2)}{p}]} NG\widetilde{M}_{0,\frac{j}{q-1}}(T)\widetilde{\varphi}(T)\widetilde{c}^{(i)}_{k-(q-1)(p-1)+p(q-l-2)-pj}.$$

Проаналізуємо одержані рівняння. При $k < (q-1)(p-1)$ у це рівняння входять вектори $M(HB)^s\varphi(0)$, $s=\overline{0,p-2}$, $M(GA_0)^i\widetilde{\varphi}(0)$, $i=\overline{0,l-2}$, $N(GA_0)^j\widetilde{\varphi}(T)$, $j=\overline{0,q-l-s}$, які є стовпцями матриці U_0. А оскільки матриця U_0 неособлива, то ці вектори лінійно незалежні. Крім того, $\widetilde{l}_k=0$ при $k<(q-1)(p-1)$. Тому, враховуючи лінійну незалежність цих векторів, із (31) дістанемо

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=s}^{[\frac{k}{q-1}]} P_s^j(\lambda^{(i)}(0))c^{(i)}_{k-(q-1)j} = 0, s=\overline{0,\left[\frac{k}{q-1}\right]}, \tag{32}$$

$$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=s}^{[\frac{k-(q-1)(p-1)+p(l-1)}{p}]} P_s^j(\xi^{(i)}(0))\widetilde{c}^{(i)}_{k-(q-1)(p-1)+p(l-1)-pj} = 0, \tag{33}$$

$$s=\overline{0,\left[\frac{k-(q-1)(p-1)+p(l-1)}{p}\right]},$$

$$\sum_{i=l+1}^{q-1}\sum_{j=s}^{\left[\frac{k-(q-1)(p-1)+p(q-l-2)}{p}\right]} P_s^j(\xi^{(i)}(T))\widetilde{c}^{(i)}_{k-(q-1)(p-1)+p(q-l-2)-pj} = 0, \tag{34}$$

$$s=\overline{0,\left[\frac{k-(q-1)(p-1)+p(q-l-2)}{p}\right]}.$$

Розглянемо рівняння (31) при $k=(q-1)(p-1)$:

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{s=0}^{p-1}\sum_{j=s}^{p-1} P_s^j(\lambda^{(i)}(0))c_{(q-1)(p-1)-(q-1)j}M(HB)^s\varphi(0)+$$

$$+\sum_{i=1}^{l}\sum_{s=0}^{l-1}\sum_{j=s}^{l-1} P_s^j(\xi^{(i)}(0))\widetilde{c}^{(i)}_{p(l-1)-pj}M(GA_0)^s\widetilde{\varphi}(0)+$$

$$+\sum_{j=l+1}^{q-1}\sum_{s=0}^{q-l-2}\sum_{j=s}^{q-l-2} P_s^j(\xi^{(i)}(T))\widetilde{c}^{(i)}_{p(q-l-2)-pj}N(GA_0)^s\widetilde{\varphi}(T) = l_0. \tag{35}$$

Розкладемо вектор l_0 за векторами базису $M(HB)^s\varphi(0)$, $s=\overline{0,p-1}$, $M(GA_0)^i\widetilde{\varphi}(0)$, $i=\overline{0,l-1}$, $N(GA_0)^j\widetilde{\varphi}(T)$, $j=\overline{1,q-l-2}$:

$$l_0=\sum_{s=0}^{p-1}\alpha_s^{((q-1)(p-1))}M(H(0)B(0))^s\varphi(0)+$$

$$+\sum_{s=0}^{l-1} \alpha_{p+s}^{((q-1)(p-1))} M(G(0)A_0(0))^s \widetilde{\varphi}(0)+$$
$$+\sum_{s=0}^{q-l-2} \alpha_{p+l+s}^{((q-1)(p-1))} N(G(T)A_0(T))^s \widetilde{\varphi}(T).$$

Враховуючи лінійну незалежність базисних векторів, з рівняння (35) дістанемо

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=s}^{p-1} P_s^j(\lambda^{(i)}(0)) c^{(i)}_{(q-1)(p-1)-(q-1)j} = \alpha_s^{(q-1)(p-1)},\ s=\overline{0,p-1}, \tag{36}$$

$$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=s}^{l-1} P_s^j(\xi^{(i)}(0)) \widetilde{c}^{(i)}_{p(l-1)-pj} = \alpha_{p+s}^{((q-1)(p-1))},\ s=\overline{0,l-1}, \tag{37}$$

$$\sum_{i=l+1}^{q-1}\sum_{j=s}^{q-l-2} P_s^j(\xi^{(i)}(T)) \widetilde{c}^{(i)}_{p(q-l-2)-pj} = \alpha_{p+l+s}^{(q-1)(p-1)},\ s=\overline{0,q-l-2}. \tag{38}$$

Взявши $p-1$ рівнянь із системи (32) (при $k=(q-1)s$, $s=\overline{0,p-2}$) і останнє рівняння із системи (36) (при $s=p-1$), дістанемо систему p рівнянь відносно невідомих $c_0^{(i)}$, $i=\overline{1,p}$:

$$\sum_{i=1}^{p} c_0^{(i)} = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_1^{(i)}(0) c_0^{(i)} = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\sum_{i=1}^{p} [\lambda_1^{(i)}(0)]^{p-2} c_0^{(i)} = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{p} [\lambda_1^{(i)}(0)]^{p-1} c_0^{(i)} = \alpha_{p-1}^{((q-1)(p-1))},$$

яку можна записати у вигляді

$$W_1 c_0 = m_0,$$

де

$$W_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1^{(1)}(0) & \lambda_1^{(2)}(0) & \dots & \lambda_1^{(p)}(0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\lambda_1^{(1)}(0))^{p-1} & (\lambda_1^{(2)}(0))^{p-1} & \dots & (\lambda_1^{(p)}(0))^{p-1} \end{pmatrix},$$

$c_0 = \mathrm{col}(c_0^{(1)}, c_0^{(2)}, \dots, c_0^{(p)})$, $m_0 = \mathrm{col}(0, \dots, 0, \alpha_{p-1}^{((q-1)(p-1))})$.

Визначник матриці W_1 є визначником Вандермонда, і, отже, не дорівнює нулю, оскільки $\lambda_1^{(i)}(0) \neq \lambda_1^{(j)}(0)$ при $i \neq j$. Отже,

$$c_0 = W^{-1} m_0.$$

Взявши рівняння із (33) при $k = ps + (q-1)(p-1) - p(l-1)$, $s = \overline{0, l-2}$ і останнє рівняння із (37) (при $s = l-1$), дістанемо аналогічну систему рівнянь відносно сталих $\widetilde{c}_0^{(i)}, i = \overline{1, l}$:

$$\sum_{i=1}^{l} \widetilde{c}_0^{(i)} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{l} \xi_1^{(i)}(0) \widetilde{c}_0^{(i)} = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\sum_{i=1}^{l} [\xi_1^{(i)}(0)]^{l-2} \widetilde{c}_0^{(i)} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{l} [\xi_1^{(i)}(0)]^{l-1} \widetilde{c}_0^{(i)} = \alpha_{p+l-1}^{((q-1)(p-1))},$$

або у векторно-матричному вигляді

$$W_2 \widetilde{c}_0 = \widetilde{m}_0,$$

де

$$W_2 = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \xi_1^{(1)}(0) & \dots & \xi_1^{(l)}(0) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\xi_1^{(1)}(0))^{l-1} & \dots & (\xi_1^{(l)}(0))^{l-1} \end{pmatrix},$$

$\widetilde{c}_0 = \mathrm{col}(\widetilde{c}_0^{(1)}, \widetilde{c}_0^{(2)}, \dots, \widetilde{c}_0^{(l)})$, $\widetilde{m}_0 = \mathrm{col}(0, \dots, 0, \alpha_{p+l-1}^{((q-1)(p-1))})$. Оскільки $\xi_1^{(i)}(0) \neq \xi_1^{(j)}(0)$, $i \neq j$, то $\det W_2 \neq 0$ і, отже,

$$\widetilde{c}_0 = W_2^{-1} \widetilde{m}_0.$$

Нарешті, взявши із системи (34) $q-l-2$ рівнянь: при $k = ps + (q-1)(p-1) - p(q-l-2)$, $s = \overline{0, q-l-3}$ і останнє рівняння з (38) (при $s = q-l-2$), отримаємо систему рівнянь відносно сталих $\widetilde{c}_0^{(i)}$ з індексами $i = \overline{l+1, q-1}$:

$$\sum_{i=l+1}^{q-1} \widetilde{c}_0^{(i)} = 0,$$

$$\sum_{i=l+1}^{q-1} \xi_1^{(i)}(T) \widetilde{c}_0^{(i)} = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\sum_{i=l+1}^{q-1}[\xi_1^{(i)}(T)]^{q-l-3}\widetilde{c}_0^{(i)}=0,$$

$$\sum_{i=l+1}^{q-1}[\xi_1^{(i)}(T)]^{q-l-2}\widetilde{c}_0^{(i)}=\alpha_{p+q-2}^{((q-1)(p-1))},$$

яка у векторно-матричній формі записується у вигляді

$$W_3\widehat{c}_0=\widehat{m}_0,$$

де

$$W_3=\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \xi_1^{(l+1)}(T) & \dots & \xi_1^{(q-1)}(T) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\xi_1^{(l+1)}(T))^{q-l-2} & \dots & (\xi_1^{(q-1)}(T))^{q-l-2} \end{pmatrix},$$

$\widehat{c}_0=\mathrm{col}(\widetilde{c}_0^{(l+1)},\widetilde{c}_0^{(l+2)},\dots,\widetilde{c}_0^{(q-1)})$, $\widehat{m}_0=\mathrm{col}(0,\dots,0,\alpha_{p+q-2}^{((q-1)(p-1))})$. Оскільки $\xi_1^{(i)}\neq\xi_1^{(j)}$ при $i\neq j$, то і $\det W_3\neq 0$, і, отже,

$$\widehat{c}_0=W_3^{-1}\widehat{m}_0.$$

Аналогічно знайдемо сталі $c_k^{(i)}$, $i=\overline{1,p}$, $\widetilde{c}_k^{(j)}$, $j=\overline{1,q-1}$, $k=1,2,\dots$.

Переконаємося, що побудований таким чином формальний розв'язок має асимптотичний характер. Для цього розглянемо m-наближення

$$x_m(t,\varepsilon)=\mu^{-(p-1)(q-1)}\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=0}^{m}\mu^k(\sum_{j=0}^{[\frac{k}{q-1}]}u_j^{(i)}(t)c_{k-(q-1)j}^{(i)})\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^t\lambda_m^{(i)}(\tau,\mu_1)d\tau)+$$

$$+\mu^{-(l-1)p}\sum_{i=1}^{l}\sum_{k=0}^{m}\mu^k(\sum_{j=0}^{[\frac{k}{p}]}v_j^{(i)}(t)\widetilde{c}_{k-pj}^{(i)})\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^t\frac{d\tau}{\xi_m^{(i)}(\tau,\mu_2)})+$$

$$\mu^{-(q-l-2)p}\sum_{i=l+1}^{q-1}\sum_{k=0}^{m}\mu^k(\sum_{j=0}^{[\frac{k}{p}]}v_j^{(i)}(t)\widetilde{c}_{k-pj}^{(i)})\exp(-\varepsilon^{-h}\int_t^T\frac{d\tau}{\xi_m^{(i)}(\tau,\mu_2)})+$$

$$+\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{p(q-1)}\right]}\mu^{kp(q-1)}\widetilde{v}_k(t), \tag{39}$$

де

$$\lambda_m^{(i)}(t,\mu_1)=\lambda_0(t)+\sum_{k=1}^{\left[\frac{m}{q-1}\right]}\mu_1^k\lambda_k^{(i)},i=\overline{1,p},\ \xi_m^{(j)}(t,\mu_2)=\sum_{k=1}^{\left[\frac{m}{p}\right]}\mu_2^k\xi_k^{(j)}(t),j=\overline{1,q-1}.$$

Подавши шуканий розв'язок задачі (1), (2) у вигляді $x(t,\varepsilon) = x_m(t,\varepsilon) + y_m(t,\varepsilon)$, дістанемо таку крайову задачу відносно нев'язки $y_m(t,\varepsilon)$:

$$\varepsilon^h B(t)\frac{dy_m}{dt} = A(t,\varepsilon)y_m + \mu^{m-(p-1)q}\widetilde{a}(t,\varepsilon), \tag{40}$$

$$My_m(0,\varepsilon) + Ny_m(T,\varepsilon) = \mu^{m+p+q-pq}b(\varepsilon), \mu = \sqrt[p(q-1)]{\varepsilon}, \tag{41}$$

де $a(t,\varepsilon)$, $b(\varepsilon)$ — деякі обмежені вектори.

Як показано в [2], фундаментальна матриця однорідної системи (3) зображається асимптотичною формулою

$$X(t,\varepsilon) = [U_m^{(1)}(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^\alpha); U_m^{(2)}(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^\alpha)]\times$$

$$\times\mathrm{diag}\{\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^t \Lambda_m^{(1)}(\tau,\varepsilon)d\tau); \exp(-\varepsilon^{-h}\int_t^T \Lambda_m^{(2)}(\tau,\varepsilon)d\tau)\},$$

в якій

$$\alpha = \frac{m-(p-1)q-hp(q-1)}{p(q-1)},$$

$$\Lambda_m^{(1)}(t,\varepsilon) = \mathrm{diag}\{\lambda_m^{(1)}(t,\varepsilon),\ldots,\lambda_m^{(p)}(t,\varepsilon),(\xi_m^{(1)}(t,\varepsilon))^{-1},\ldots,(\xi_m^{(l)}(t,\varepsilon))^{-1}\},$$

$$\Lambda_m^{(2)}(t,\varepsilon) = \mathrm{diag}\{(\xi_m^{(l+1)}(t,\varepsilon))^{-1},\ldots,(\xi_m^{(q-l-2)}(t,\varepsilon))^{-1}\},$$

$U_m^{(1)}(t,\varepsilon)$ — прямокутна $n\times(p+l)$-матриця, стовпцями якої є вектори $u_m^{(i)}(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,p}$, $v_m^{(j)}(t,\varepsilon)$, $j=\overline{1,l}$, а $U_m^{(2)}(t,\varepsilon)$ — $n\times(n-p-l-1)$-матриця, стовпцями якої є вектори $v_m^{(j)}(t,\varepsilon)$, $j=\overline{l+1,q-1}$, де

$$u_m^{(i)}(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^m \mu_1^k u_k^{(i)}(t), i=\overline{1,p}, v_m^{(j)}(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^m \mu_2^k v_k^{(j)}(t), j=\overline{1,q-1}.$$

Аналогічно виразимо й фундаментальну матрицю спряженої системи
$\varepsilon^h \frac{d}{dt}B^*(t)y = -A^*(t,\varepsilon)y$:

$$Y(t,\varepsilon) = [\widehat{U}_m^{(1)}(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^\alpha); \widehat{U}_m^{(2)}(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^\alpha)]\times$$

$$\times\mathrm{diag}\{\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^t \Lambda_m^{(1)^*}(\tau,\varepsilon)d\tau); \exp(-\varepsilon^{-h}\int_t^T \Lambda_m^{(2)^*}(\tau,\varepsilon)d\tau)\}.$$

Елементи матриць $\widehat{U}_m^{(i)}(t,\varepsilon)$, $i=1,2$ визначаються із спряженої системи за тим же алгоритмом, що і елементи матриць $U_m^{(i)}(t,\varepsilon)$, $i=1,2$.

Введемо позначення

$$Y_m^{(1)}(t,\varepsilon) = \mathrm{diag}\{\exp(\varepsilon^h\int_0^t \Lambda_m^{(1)}(\tau,\varepsilon)d\tau), 0\},$$

$$Y_m^{(2)}(t,\varepsilon) = \mathrm{diag}\{0, \exp(-\varepsilon^{-h}\int_t^T \Lambda_m^{(2)}(\tau,\varepsilon)d\tau)\},$$

де нульові блоки мають розмірність $(n-1-l)\times(n-1-l)$ і $l\times l$ відповідно. Тоді

$$X(t,\varepsilon)=X_1(t,\varepsilon)+X_2(t,\varepsilon),$$

де

$$X_i(t,\varepsilon)=[U_m^{(1)}(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^\alpha);U_m^{(2)}(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^\alpha)]Y_m^{(i)}(t,\varepsilon), i=1,2.$$

Тоді згідно з [2, с.62-64] загальний розв'язок системи (40) можна подати у вигляді

$$y_m(t,\varepsilon)=X(t,\varepsilon)c(\varepsilon)+\int_0^t X_1(t,\varepsilon)Y^*(\tau,\varepsilon)q(\tau,\varepsilon)d\tau+\int_T^t X_2(t,\varepsilon)Y^*(\tau,\varepsilon)q(\tau,\varepsilon)d\tau-$$

$$-\widetilde{\varphi}(t)(A(t,\varepsilon)\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})^{-1}\widetilde{\psi}^*q(t,\varepsilon),$$
$$q(t,\varepsilon)=\mu^{m-(p-1)q-p(q-1)h}\widetilde{a}(t,\varepsilon).$$

Підставивши цей вираз у крайову умову (41), встановимо, що із неї однозначно визначається вектор $c(\varepsilon)$, а шуканий розв'язок задачі (40),(41) виражається формулою

$$y_m(t,\varepsilon)=(Gq)(t,\varepsilon)+\mu^{m+p+q-pq}X(t,\varepsilon)([MU_m^{(1)}(0,\varepsilon);NU_m^{(2)}(1,\varepsilon)]+O(\varepsilon^\alpha))^{-1}b(\varepsilon),\quad(42)$$

у якій

$$(Gq)(t,\varepsilon)=\int_0^T G_0(t,\tau,\varepsilon)q(\tau,\varepsilon)d\tau+$$

$$+X(t,\varepsilon)([MU_m^{(1)}(0,\varepsilon);NU_m^{(2)}(T,\varepsilon)]^{-1}+O(\varepsilon^\alpha))(M\xi(0,\varepsilon)+N\xi(T,\varepsilon))-\xi(t,\varepsilon),$$
$$\xi(t,\varepsilon)=\widetilde{\varphi}(t)(A(t,\varepsilon)\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})^{-1}\widetilde{\psi}^*q(t,\varepsilon),$$

а $G(t,\tau,\varepsilon)$ — матриця Гріна, яка має наступну структуру:

$$G_0(t,\tau,\varepsilon)=\begin{cases}(U_m^{(1)}(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^\alpha))\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_\tau^t\Lambda_m^{(1)}(s,\varepsilon)ds\right)\times\\ \times[\widehat{U}_m^{(1)*}(\tau,\varepsilon)+O(\varepsilon^\alpha)]+K_m(t,\tau,\varepsilon),\\ \text{якщо}\quad 0\le\tau<t\le T,\\ (U_m^{(2)}(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m+1}))\exp\left(-\varepsilon^{-h}\int_t^\tau\Lambda_m^{(2)}(s,\varepsilon)ds\right)\times\\ \times(\widehat{U}_m^{(2)*}(\tau,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m+1}))+K_m(t,\tau,\varepsilon),\\ \text{якщо}\quad 0\le t\le\tau\le T,\end{cases}$$

де

$$K_m(t,\tau,\varepsilon)=(U_m(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^\alpha))(Y_m^{(1)}(t,\varepsilon)+Y_m^{(2)}(t,\varepsilon))\times$$
$$\times([MU_m^{(1)}(0,\varepsilon);NU_m^{(2)}(T,\varepsilon)]+O(\varepsilon^\alpha))^{-1}\times$$

$$\times[(MU_m^{(2)}(0,\varepsilon)+O(\varepsilon^\alpha))\exp(-\varepsilon^{-h}\int_0^\tau \Lambda_m^{(2)}(s,\varepsilon)ds)(\widehat{U}_m^{(2)*}(\tau,\varepsilon)+O(\varepsilon^\alpha))-$$

$$-(NU_m^{(1)}(T,\varepsilon)+O(\varepsilon^\alpha))\exp(\varepsilon^{-h}\int_\tau^T \Lambda_m^{(1)}(s,\varepsilon)ds)(\widehat{U}_m^{(1)*}(\tau,\varepsilon)+O(\varepsilon^\alpha))].$$

Взявши до уваги, що

$$[MU_m^{(1)}(0,\varepsilon)+O(\varepsilon^\alpha);NU_m^{(2)}(T,\varepsilon)+O(\varepsilon^\alpha)]^{-1}=\mu^{-(p-1)(q-1)}R(\varepsilon),$$

де $R(\varepsilon)$ — обмежена квадратна матриця $(n-1)$-го порядку і врахувавши обмеженість всіх векторних і матричних функцій, які входять у праву частину рівності (42) і перейшовши в ній до оцінок за нормою, дістанемо таку асимптотичну оцінку для нев'язки $y_m(t,\varepsilon)$:

$$\|y_m(t,\varepsilon)\|\le c\mu^{m-p(q-1)(h+1)-(p-1)(2q-1)},\ \mu=\sqrt[p(q-1)]{\varepsilon}.$$

У результаті проведених викладок приходимо до наступної теореми.

Теорема 1. *Якщо гранична в'язка матриць $A_0-\lambda_0 B$ має на відрізку $[0;T]$ один скінченний елементарний дільник кратністю p і один нескінченний — кратністю $q=n-p$, M,N — прямокутні матриці розмірністю $(n-1)\times n$, і виконуються умови $1^\circ-4^\circ$, (8), (20), (25), (27), (30), то при досить малих ε існує єдиний розв'язок крайової задачі (1), (2), що виражається асимптотичною формулою*

$$x(t,\varepsilon)=x_m(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^\gamma),$$

де $\gamma=\frac{m-p(q-1)(h+1)-(p-1)(2q-1)}{p(q-1)}$, а вектор $x_m(t,\varepsilon)$ зображається у вигляді розвинення (39), коефіцієнти якого визначаються за описаним алгоритмом.

Перелік цитованих джерел

1. *Віра М. Б.* Двоточкова крайова задача для вироджених сингулярно збурених лінійних систем диференціальних рівнянь / М. Б. Віра // Науковий часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2008. — № 9. — С. 47-64.
2. *Самойленко А. М.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями / Самойленко А. М. , Шкіль М. І. , Яковець В. П. — Київ: Вища школа, 2000. — 294 с.
3. *Шкиль Н. И.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями / Шкиль Н. И. , Старун И. И. , Яковец В. П. — Київ: Вища школа, 1991. — 207 с.
4. *Яковець В. П.* Про побудову асимптотичних розв'язків двоточкових крайових задач для вироджених сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь / В. П. Яковець, М. Б. Віра // Нелінійні коливання. — 2010. — Т. 13, № 2. — С. 272-286.

Получена 02.04.2011