Динамические системы, вып. 21 (2006), 7–13

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 533.6.013.42

Свободные колебания упругих мембран, разделяющих многослойную жидкость в цилиндрическом сосуде с упругим дном

Ю. Н. Кононов*, Е. А. Татаренко**

* Донецкий национальный университет,
Донецк 83055. *E-mail: kononov@univ.donetsk.ua*
** Донбасская национальная академия строительства и архитектуры,
Макеевка 86123. *E-mail: tata.donetsk@mail.ru*

Аннотация. Рассмотрена задача о свободных колебаниях упругих мембран, разделяющих многослойную жидкость в цилиндрическом сосуде с упругим дном. Выведено и исследовано частотное уравнение. Получены условия устойчивости плоского равновесного положения упругого дна.

1. Введение

В данной статье обобщены результаты работ [1,2] на случай плоского упругого дна в виде упругой мембраны. Операторными методами задача о колебании многослойной жидкости в сосуде с плоским упругим дном исследована Нго Зуй Каном [3], а затем Н. Д. Копачевским и А. В. Андроновым [4, 5]. В этих работах была доказана теорема о существовании решения, изучены свойства спектра, методом Бубнова-Галеркина получено уравнение частот для прямоугольного канала (плоская задача) и прямоугольного параллелепипеда (пространственная задача). Задача о собственных колебаниях однородной жидкости со свободной поверхностью и упругого днища в цилиндрической полости была рассмотрена М. П. Петренко [6].

2. Постановка задачи

Рассмотрим механическую систему, состоящую из m идеальных несмешивающихся жидкостей с плотностями ρ_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$, заполняющих до глубин h_i прямой круговой цилиндр радиуса a с жесткой боковой поверхностью и плоским упругим дном. На свободной поверхности верхней жидкости $(i = 1)$, на поверхностях раздела многослойной жидкости и на дне цилиндрической полости равномерно натянуты гибкие мембраны с погонными усилиями T_i $(i = 1, 2, \ldots, m + 1)$. Мембраны жестко закреплены по краю. Движение жидкостей и мембран будем рассматривать в системе координат $Oxyz$, расположенной так, что плоскость Oxy

совпадает со свободной поверхностью верхней жидкости в невозмущенном состоянии, а ось Oz направлена вдоль оси цилиндра противоположно вектору силы тяжести $\vec{g}$. Задачу будем решать в рамках линейной теории, считая движение жидкости потенциальным, а совместные колебания мембран и жидкости безотрывными, т. е. без кавитации.

3. Построение аналитического решения задачи

Задача о собственных колебаниях рассматриваемой механической системы в поле силы тяжести может быть сформулирована следующим образом [1, 2]:

$$\begin{gathered}
\Delta\Phi_i = 0, \quad (i=\overline{1,m}),\\
\frac{\partial\Phi_i}{\partial r}\Big|_{r=a} = 0, \quad \frac{\partial\Phi_m}{\partial z}\Big|_{x=-H_{m+1}} = \frac{\partial W_{m+1}}{\partial t},\\
\frac{\partial\Phi_{i-1}}{\partial z} = \frac{\partial\Phi_i}{\partial z} = \frac{\partial W_i}{\partial t} \quad (z=-H_i),\\
k_{0i}\frac{\partial^2 W_i}{\partial t^2} - T_i\Big[\frac{\partial^2 W_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial W_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 W_i}{\partial\theta^2}\Big] + g\Delta\rho_i W_i =\\
= \rho_{i-1}\frac{\partial\Phi_{i-1}}{\partial t} - \rho_i\frac{\partial\Phi_i}{\partial t} + c_i \quad (z=-H_i), \quad (i=\overline{1,m+1}),\\
W_i|_{r=a} = 0, \quad \int_S W_i ds = \int_S W_{i+1} ds.
\end{gathered} \tag{3.1}$$

Здесь $H_i = \sum\limits_{k=1}^{i-1} h_k$ $(H_1 = 0)$; W_i, ρ_{0i} и δ_{0i} — соответственно прогиб, плотность и толщина i-ой мембраны; S — поперечное сечение цилиндрической полости; c_i — константа, определяемая из статической задачи; $k_{0i} = \rho_{0i}\delta_{0i}$; $\Delta\rho_i = \rho_i - \rho_{i-1}$ $(\rho_0 = \rho_{m+1} = 0)$; $P_0 = P_{m+1} = 0$.

Ограничиваясь первой модой по угловой координате, решение задачи (3.1) будем искать в виде [1, 2]

$$\Phi_i = \omega\cos\omega t\cos\theta\varphi_i(z,r), \quad W_i = \sin\omega t\cos\theta w_i(r) + W_{0i}, \tag{3.2}$$

где

$$\varphi_i = \sum_{n=1}^{\infty}(A_{in}e^{k_n z} + B_{in}e^{-k_n z})R_1(k_n r), \tag{3.3}$$

$$R_1(k_n r) = \frac{J_1(k_n r)}{J_1(\mu_n)}, \ \mu_n = k_n a, \ J_1^{'}(\mu_n) = 0,$$

$$w_i(r) = A_i\frac{Z_1(p_i r)}{Z_1(p_i a)} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{in}R_1(k_n r), \ \frac{Z_1(p_i r)}{Z_1(p_i a)} = \sum_{n=1}^{\infty}\beta_{in}R_1(k_n r), \tag{3.4}$$

$$Z_1(p_i r) = \left\{ \begin{array}{ll} I_1(p_i r), & p_i^2 = \frac{1}{T_i}g\Delta\rho_i - \omega^2 k_{0i} > 0 \\ J_1(\widetilde{k}_i r), & \widetilde{k}_i^2 = -\widetilde{p}_i^2 > 0 \end{array} \right. ,$$

$$\beta_{in} = \frac{\int_0^a rZ_1(p_i r)R_1(k_n r)dr}{N_n^2 Z_1(p_i a)}, \quad N_n^2 = \int\limits_0^a rR_1^2(k_n r)dr,$$

W_{0i} — статический прогиб мембран.

Решение $w_i(r)$ неоднородного дифференциального уравнения представляется в виде суммы общего решения однородного и частного решения неоднородного уравнения [1]. Подставляя соотношения (3.2)–(3.4) в (3.1) и, используя ортогональность с весом r на отрезке $[0, a]$ функций Бесселя $J_1(k_n r)$, получаем систему линейных уравнений для неизвестных A_{in}, B_{in}, C_{in}, A_i:

$$\begin{cases} k_n(A_{in}e^{-k_nH_i} - B_{in}e^{k_nH_i}) = A_i\beta_{in} + C_{in} \ (i = \overline{1, m}) \\ k_n(A_{mn}e^{-k_nH_{m+1}} - B_{mn}e^{k_nH_{m+1}}) = A_{m+1}\beta_{m+1,n} + C_{m+1,n} \\ (A_{i-1,n} - A_{in})e^{-k_nH_i} - (B_{i-1,n} - B_{in})e^{k_nH_i} = 0 \ (i = \overline{2, m}) \end{cases} \tag{3.5}$$

$$(p_i^2 + k_n^2)C_{in} = \frac{\omega^2}{T_i}[(\rho_i A_{in} - \rho_{i-1}A_{i-1,n})e^{-k_nH_i} + \\ + (\rho_i B_{in} - \rho_{i-1}B_{i-1,n})e^{k_nH_i}] \quad (i = \overline{1, m+1}) \tag{3.6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(A_i\beta_{in} + C_{in}) = 0 \quad (i = \overline{1, m+1}). \tag{3.7}$$

Решая систему (3.5) относительно A_{in}, B_{in}, находим

$$\begin{cases} A_{in} = i\omega\dfrac{e^{k_nH_i}}{2k_n \operatorname{sh}\kappa_{in}}(e^{\kappa_{in}}\zeta_{in} - \zeta_{i+1,n}), \\ B_{in} = i\omega\dfrac{e^{k_nH_i}}{2k_n \operatorname{sh}\kappa_{in}}(e^{-\kappa_{in}}\zeta_{in} - \zeta_{i+1,n}). \end{cases} \tag{3.8}$$

Здесь

$$\zeta_{in} = A_i\beta_{in} + C_{in}, \ \kappa_{in} = k_n h_i.$$

Подставив соотношения (3.8) в (3.6), получим систему линейных уравнений относительно C_{in}:

$$b_{i-1,n}C_{i-1,n} + \widetilde{T}_{in}C_{in} + b_{in}C_{i+1,n} = -b_{i-1,n}\widetilde{A}_{i-1} + a_{in}\widetilde{A}_i - b_{in}\widetilde{A}_{i+1}. \tag{3.9}$$

В матричной форме решение системы (3.9) имеет вид

$$C_n = (D_n^{-1}T_n - E)\widetilde{A}_n$$

или

$$\widetilde{A}_n + C_n = D_n^{-1}T_n\widetilde{A}_n, \tag{3.10}$$

где

$$C_n = (C_{1n}, \ldots, C_{m+1n}), \ \widetilde{A}_n = (\widetilde{A}_1, \ldots, \widetilde{A}_{m+1}), \ \widetilde{A}_{in} = \beta_{in}A_i,$$

$$\beta_{in} = \alpha_n \frac{k_n^2}{k_n^2+p_i^2} \begin{cases} p_i I_1'(p_i a)/I_1(p_i a) & (p_i^2>0) \\ \widetilde{k}_i J_1'(\widetilde{k}_i a)/J_1(\widetilde{k}_i a) & (\widetilde{k}_i^2 = -p_i^2 > 0) \end{cases}$$

$$D_n(\omega^2) = \begin{vmatrix} \widetilde{T}_{1n} & b_{1n} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b_{1n} & \widetilde{T}_{2n} & b_{2n} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{m-1n} & \widetilde{T}_{mn} & b_{mn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{mn} & \widetilde{T}_{m+1,n} \end{vmatrix},$$

$$\widetilde{T}_{in} = T_{in} - a_{in},\ T_{in} = \frac{T_i k_n (p_i^2 + k_n^2)}{\omega^2},\ \alpha_n = \frac{2a}{\mu_n^2 - 1},$$

$$a_{in} = \rho_{i-1} \operatorname{cth} \kappa_{i-1n} + \rho_i \operatorname{cth} \kappa_{in},\ b_{in} = \frac{\rho_i}{\operatorname{sh} \kappa_{in}},\ \rho_0 = \rho_{m+1} = 0;$$

T_n — диагональная матрица, состоящая из элементов T_{in}, E — единичная матрица.

Подставив (3.10) в (3.7) и проведя преобразования, аналогичные [1,2], получим частотное уравнение собственных колебаний, не зависящее от β_{in}:

$$\begin{vmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{g}_{11n} & \dots & \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{g}_{1,m+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{g}_{m+1,1,n} & \dots & \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{g}_{m+1,m+1,n} \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.11)$$

Здесь $\widetilde{g}_{ijn} = \alpha_n k_n^3 g_{ijn}/\Delta_n$, $\Delta_n = |D_n|$, g_{ijn} — элементы D_n^{-1}:

$$D_n^{-1} = \frac{1}{\Delta_n} \left\| g_{ijn} \right\|_{i,j=1}^{m+1}.$$

Так как D_n является симметричной матрицей, то и обратная матрица D_n^{-1} также будет симметричной, то есть $g_{ijn} = g_{jin}$. В дальнейшем для удобства записи индекс n в g_{ijn} будем опускать.

Если одна из глубин заполнения $h_k = \infty$ ($b_{in} = g_{k,k+1} = g_{k+1,k} = 0$) и $\vec{g} = 0$ (в противном случае будут неограниченные статические прогибы мембран), то из уравнения (3.11) следует

$$\begin{vmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_{11} & \dots & \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{g}_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_{k1} & \dots & \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{g}_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{g}_{k+1,k+1} & \dots & \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{g}_{k+1,m+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{g}_{m+1,k+1} & \dots & \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{g}_{m+1,m+1} \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$\widetilde{g}_{ij} = \alpha_n k_n^3 g_{ij},\ \Delta_{in} = |D_{in}|,\ D_{kn}^{-1} = \frac{\left\| g_{ij} \right\|_{i,j=1}^{k}}{\Delta_{kn}},\ D_{k+1,n}^{-1} = \frac{\left\| g_{ij} \right\|_{i,j=k+1}^{m+1}}{\Delta_{k+1,n}},$$

$$D_{kn} = \begin{vmatrix} \widetilde{T}_{1n} & b_{1n} & \dots & 0 \\ b_{1n} & \widetilde{T}_{2n} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \widetilde{T}_{kn} \end{vmatrix},\ D_{k+1,n} = \begin{vmatrix} \tilde{T}_{k+1,n} & b_{k+1,n} & \dots & 0 \\ b_{k+1,n} & \tilde{T}_{k+2,n} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{T}_{m+1,n} \end{vmatrix}.$$

Если же все $h_i = \infty$, то

$$\prod_{i=1}^{m+1} \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{g}_{ii} = 0, \ \widetilde{g}_{ii} = \alpha_n k_n^3 / \widetilde{T}_{in}.$$

Таким образом, если k-й слой жидкости имеет бесконечную глубину, то частотное уравнение (3.11) распадается на два уравнения. Первое уравнение описывает собственные частоты колебаний k-слойной жидкости, разделенной упругими мембранами с абсолютно жестким дном, а второе — $m-k$-слойной жидкости с абсолютно жесткой "крышкой". Если упругое дно является абсолютно жестким ($T_{m+1} = \infty$), то уравнение (3.11) совпадает с уравнением работы [1].

При $m = 2$ (двухслойная жидкость) частотное уравнение имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{g}_{11} \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{g}_{22} \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{g}_{33} - \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{g}_{11} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{g}_{23} \Big)^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{g}_{33} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{g}_{12} \Big)^2 -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{g}_{22} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{g}_{13} \Big)^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{g}_{12} \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{g}_{13} \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{g}_{23} = 0. \quad (3.12)$$

Здесь $g_{11} = \widetilde{T}_{2n}\widetilde{T}_{3n} - b_{2n}^2$, $g_{12} = -\widetilde{T}_{3n} b_{1n}$, $g_{13} = b_{1n} b_{2n}$, $g_{22} = \widetilde{T}_{2n}\widetilde{T}_{3n}$, $g_{23} = -\widetilde{T}_{1n} b_{2n}$, $g_{33} = \widetilde{T}_{1n}\widetilde{T}_{2n} - b_{1n}^2$, $\Delta_n = (\widetilde{T}_{1n}\widetilde{T}_{2n} - b_{1n}^2)\widetilde{T}_{3n} - \widetilde{T}_{1n} b_{2n}$.

Для различных случаев отсутствия i-той мембраны ($T_i = 0, k_{0i} = 0$) уравнение (3.12) запишется следующим образом:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{g}_{22} \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{g}_{33} - \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{g}_{23} \Big)^2 = 0, \quad (T_1 = 0, k_{01} = 0),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{g}_{11} \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{g}_{33} - \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{g}_{13} \Big)^2 = 0, \quad (T_2 = 0, k_{02} = 0),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{g}_{13} = 0, \quad (T_1 = T_2 = 0, k_{01} = k_{02} = 0).$$

Если мембрана, находящаяся на свободной поверхности двухслойной жидкости, является абсолютно жесткой ($T_1 = \infty$), то уравнение (3.12) имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{g}_{22} \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{g}_{33} - \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{g}_{23} \Big)^2 = 0. \quad (3.13)$$

Здесь

$$\widetilde{g}_{22} = \widetilde{T}_{3n}, \ \widetilde{g}_{23} = -b_{2n}, \widetilde{g}_{33} = \widetilde{T}_{2n}, \ \Delta_n = \widetilde{T}_{2n}\widetilde{T}_{3n} - b_{2n}^2.$$

Для однородной жидкости ($m = 1$) уравнение (3.13) запишется следующим образом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{g}_{11} \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{g}_{22} - \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{g}_{12} \Big)^2 = 0, \quad (3.14)$$

где $g_{11} = \widetilde{T}_{2n}$, $g_{12} = -b_{2n}^2$, $g_{22} = \widetilde{T}_{1n}$.

Если мембрана, находящаяся на свободной поверхности однородной жидкости является абсолютно жесткой ($T_1 = \infty$), то уравнение (3.14) имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{g}_{11} = 0. \tag{3.15}$$

4. Исследование вопроса об устойчивости собственных колебаний

Для приближенного анализа корней уравнения (3.13) и (3.15) ограничимся двумя членами в рядах этих уравнений, т. к. учет одного члена ряда не приводит к уравнению, содержащему неизвестную частоту. Проведя вычисления, аналогичные [1,2], можно показать, что для положительности корней частотного уравнения (3.13) достаточно потребовать выполнения условий

$$T_2 > \frac{\alpha_1 k_1^2 + \alpha_2 k_2^2}{(\alpha_1 + \alpha_2) k_1^2 k_2^2} g(\rho_1 - \rho_2) = Rg(\rho_1 - \rho_2)a^2 \ (R = 0.0560). \tag{4.1}$$

Интересно отметить, что полученное условие устойчивости (4.1) не зависит от величины натяжения упругого дна T_3, от массовых характеристик мембран и глубин заполнения жидкостей. Неустойчивость может возникнуть при малом натяжении внутренней мембраны и $\rho_1 > \rho_2$. Если же более тяжелая жидкость находится на дне сосуда ($\rho_2 > \rho_1$), то уравнение (4.1) всегда выполнено и в этом случае плоская форма равновесия упругой мембраны, разделяющей жидкости разной плотности и упругого дна является устойчивой.

Следует отметить, что этот вывод получен для абсолютно жесткой верхней мембраны ($T_1 = \infty$, $W_{10} = 0$).

Если учитывать три члена в рядах (3.13), получим $R = 0.0609$, а при четырех — $R = 0.0618$. Таким образом, с достаточной для практики точностью можно положить $R = 0.062$.

Для однородной жидкости ($m = 1$) и $T_1 = \infty$ с учетом двух членов ряда получим

$$\omega^2 = \frac{\alpha_1 k_1^3 k_2 (T_2 k_2^2 - g\rho_1) + \alpha_2 k_2^3 k_1 (T_2 k_1^2 - g\rho_2)}{\rho_1(\alpha_1 k_1^3 \operatorname{cth} \kappa_2 + \alpha_2 k_2^3 \operatorname{cth} \kappa_1)} \ (\kappa_n = k_n h_1),$$

а условие устойчивости принимает вид

$$T_2 > \frac{\alpha_1 k_1^2 + \alpha_2 k_2^2}{(\alpha_1 + \alpha_2) k_1^2 k_2^2} g\rho_1. \tag{4.2}$$

Интересно отметить, что условие (4.2) следует из (4.1), если в нем положить $\rho_2 = 0$.

Список цитируемых источников

1. *Кононов Ю. Н., Татаренко Е. А.* Свободные колебания многослойной жидкости, разделенной упругими инерционными мембранами // Динамические системы. — 2004. — Вып. 18. — С. 111–118.
2. *Кононов Ю. Н., Шевченко В. П.* Свободные колебания многослойной стратифицированной жидкости, разделенной упругими мембранами // Теоретическая и прикладная механика. — 1999. — № 29. — С. 151–163.
3. *Нго Зуй Кан.* О движении не смешивающихся жидкостей в сосуде с плоским упругим днищем // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1979. — № 5. — С. 143–154.
4. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989. — 406 с.
5. *Андронов А. В.* О малых колебаниях идеальной жидкости в сосуде с упругими днищами Симфер. ун-т. — Симферополь, 1983. — 26 с. — Рус. —Деп. в УкрНИИНТИ 30.12.83, № 1478.
6. *Петренко М. П.* Собственные колебания жидкости со свободной поверхностью и упругого днища цилиндрической полости // Прикладная механика. — 1969. — Т. 5, № 6. — С. 44–50.

Получено 1.10.2006