Динамические системы, том 1(29), №2 (2011), 219–226

УДК 519.642

О принципе невязки при регуляризации экспоненциально некорректных задач с возмущенными данными

А. В. Грушевая

Институт математики НАН Украины,
Киев 01601. *E-mail: anna_mos@imath.kiev.ua*

Аннотация. В статье рассматривается проблема приближенного решения экспоненциально некорректных задач, представленных в виде линейных операторных уравнений первого рода с возмущенными правыми частями и операторами. Для такого класса задач был разработан метод решения, состоящий в комбинации принципа невязки Морозова и конечномерного варианта тихоновской регуляризации. Установлено, что указанная комбинация обеспечивает оптимальный порядок точности.

Ключевые слова: экспоненциально некорректная задача, параметр регуляризации, условие истокопредставимости, принцип невязки.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу нахождения приближенного решения для некорректной задачи, представимой в виде операторного уравнения

$$Ax = y, \tag{1.1}$$

где вместо y доступно приближение $y_\delta \in Y$, $\|y - y_\delta\| \le \delta, \delta > 0$, а $A : X \to Y$ — линейный компактный инъективный оператор, действующий из гильбертова пространства X в Y, причем $\mathrm{Range}(A) = \{v \in Y : v = Ax, x \in X\}$ не замкнут в Y. Для сокращения выкладок, обозначим скалярные произведения в этих пространствах через $(\cdot,\cdot)$ и соответствующие им нормы через $\|\cdot\|$. Более того, тем же символом $\|\cdot\|$ будем обозначать стандартную операторную норму. Из контекста будет ясно, какое именно пространство или норма имеется ввиду. Обычно уравнение (1.1) называют жестко некорректной задачей, если его решение $x_0 = A^{-1}y$ имеет конечную гладкость в некотором смысле, а A является оператором бесконечной гладкости. Примером такого рода задач являются экспоненциально некорректные задачи. Характерной чертой последних задач является то, что решение x_0 принадлежит некоторому подпространству V, непрерывно вложенному в X, причем сингулярные значения оператора канонического вложения J_v из V в X стремятся к нулю с полиномиальной скоростью, в то время как собственные значения $\{\sigma_l\}_{l=1}^{\infty}$ оператора A стремятся к нулю достаточно быстро таким образом, что выполняются двусторонние оценки $\underline{c}\exp(-\exp\ldots\exp l^r) \le \sigma_l \le \bar{c}\exp(-\exp\ldots\exp l^r)$

при некоторых константах $\bar{c} \geq \underline{c} > 0$ (тут функция exp фигурирует $K \geq 1$ раз). Следуя [8], [15], в данном случае естественно предположить, что x_0 принадлежит множеству

$$M_{p,\rho}^K(A) := \{x : x = (\underbrace{\ln \ldots \ln}_{K \text{ раз}}(A^*A)^{-1})^{-p}v, \quad \|v\| \leq \rho\} \tag{1.2}$$

при некотором неизвестном значении $p > p_0$ и известных $\rho > 0$ и $K = 1, 2, \ldots$, где операторная функция $(\ln \ldots \ln(A^*A)^{-1})^{-p}$ определяется спектральным разложением оператора

$$A^*A = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2(\Psi_k, \cdot)\Psi_k$$

оператора A^*A, то есть

$$(\ln \ldots \ln(A^*A)^{-1})^{-p}v = \sum_{l=1}^{\infty}(\ln \ldots \ln \sigma_l^{-2})^{-p}(\Psi_l, v)\Psi_l.$$

В дальнейшем без потери общности будем считать, что $\|A\| \leq \theta \leq M_K$, $M_K = m_K^{1/2}$, $\quad m_K = e^{-1/m_{K-1}}$, $K \geq 2$, $m_1 = e^{-1}$, то есть $\sigma_l \leq M_K$, $\quad l = 1, 2, \ldots$.

Следует отметить, что исследования экспоненциально некорректных задач начались с работы [8], где были найдены оценки точности тихоновского метода регуляризации уравнений (1.1) с операторами как конечной, так и бесконечной гладкости. Методы регуляризации экспоненциально некорректных задач рассматривались в [6], где был предложен алгоритм решения (1.1) в случае неточно заданных оператора и правой части, который использует модификацию метода апостериорного выбора параметра регуляризации из [9]. Позже, в работе [12] был предложен метод решения экспоненциально некорректных задач (1.1) с решениями (1.2) при $K = 1$, суть которого состоит в комбинации метода обычной тихоновской регуляризации с принципом невязки Морозова. Здесь же было установлено, что указанная комбинация позволяет достичь оптимальной по порядку в логарифмической шкале точности $O(\ln^{-p}\frac{1}{\delta})$ восстановления решений из указанного множества для любого $p > p_0$. Исследования [12] были продолжены в работах [13], [14], где использование регуляризации Тихонова с совокупности с модификацией принципа невязки обеспечило оптимальный порядок точности $O((\ln \ldots \ln \frac{1}{\delta})^{-p})$ на классе экспоненциально некорректных задач с решениями (1.2) при любом $K = 1, 2, \ldots$. Кроме того, в этих работах был установлено, что при $K = 1$ указанная комбинация позволяет достичь оптимального порядка точности и в случае возмущенного оператора. Целью настоящей статьи является обобщение результатов, полученных в [13], [14], на весь класс экспоненциально некорректных задач с решениями (1.2) при любом $K = 1, 2, \ldots$ на случай возмущенного оператора. А именно, будет установлена оптимальность комбинации конечномерного метода Тихонова и принципа невязки на указанном классе задач.

Итак, пусть вместо A доступно приближение A_h, $\|A - A_h\| \leq h$, где $A_h : X \to Y$ также линейный компактный инъективный оператор.

2. Выбор параметра регуляризации

Поскольку Range(A) предполагается незамкнутым, то непрерывной зависимости решения x_0 от входных данных нет. Следовательно, численное решение задачи (1.1)-(1.2) требует применения специальных методов регуляризации.

В рамках метода Тихонова регуляризованное решение $x_\alpha^{\delta,h}$ определяется как решение вариационной задачи $I_\alpha(X) := \|A_h x - y_\delta\|^2 + \alpha\|x\|^2 \to \min$. Для численной реализации тихоновского метода необходимо выполнять все вычисления с конечномерным приближением $A_{h,n}$ вместо A_h. В этом случае вариационная задача $I_\alpha(X) \to \min$ заменяется на конечномерный аналог

$$I_{\alpha,n}(x) := \|A_{h,n}x - y_\delta\|^2 + \alpha\|x\|^2 \to \min,$$

где $A_{h,n}$ – некоторое конечномерное приближение с $\mathrm{rank}(A_{h,n}) = n$. Вычисление приближения $x_{\alpha,n}^{\delta,h}$ для $x_0 = A^{-1}y$ требует в этом случае решения линейного операторного уравнения

$$\alpha x + A_{h,n}^* A_{h,n} x = A_{h,n}^* y_\delta. \tag{2.1}$$

Конечномерное приближение имеет смысл выбрать следующим образом

$$\|A_h - A_{h,n}\| \le \varepsilon,$$

где $\varepsilon = \max\{h, \delta\rho^{-1}\}$. Тогда

$$\|A - A_{h,n}\| \le \|A - A_h\| + \|A_h - A_{h,n}\| \le \varepsilon + h. \tag{2.2}$$

Выберем параметр регуляризации α из конечного упорядоченного множества, имеющего вид геометрической сетки

$$\Delta_q(\delta) = \{\alpha : \alpha = \alpha_m := \alpha_0 q^m, \quad m = 0, 1, \dots, \quad \alpha \in (\delta^2, \alpha_0), \quad q \in (0, 1)\}.$$

Приближенное решение $x_{\alpha_m,n}^{\delta,h} = (\alpha_m I + A_{h,n}^* A_{h,n})^{-1} A_{h,n}^* y_\delta$ вычисляем путем решения

$$\alpha_m x + A_{h,n}^* A_{h,n} x = A_{h,n}^* y_\delta, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

до тех пор, пока не выполнится условие

$$\|A_{h,n} x_{\alpha_m,n}^{\delta,h} - y_\delta\| \le d_0(\delta + h), \tag{2.3}$$

где $d_0 \ge \max\{M_K^{-1}\rho + \frac{9}{4}, \frac{5}{2}\rho\}$.

Для вычисления оценки точности предложенного метода потребуется ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1 ([13]). *Пусть $\|A\| \le M_K$ и $x_0 = A^{-1}y \in M_{p,\rho}^K(A)$. Если $x_\alpha = (\alpha I + A^*A)^{-1}A^*y$, то для достаточно малых α справедливо*

$$\|Ax_\alpha - y\| \le M_K^{-1}\rho\sqrt{\alpha}(\underbrace{\ln \dots \ln}_{K\,раз}\frac{1}{\alpha})^{-p}.$$

Лемма 2. *Предположим, что условия леммы* (1) *выполнены. Тогда существует* $\alpha = \alpha_k \in \Delta_q(\delta)$, *удовлетворяющее условию* (2.3). *Более того, найдутся* $d', d'' > 0$ *такие, что*

$$d'(\delta + h) \leq \|Ax_{\alpha_k} - y\| \leq d''(\delta + h).$$

Доказательство. Прежде всего заметим,что

$$\|x_0\| = \|(\ln \ldots \ln(A^*A)^{-1})^{-p}v\| \leq \rho \sup_{0<\lambda\leq m_K} |(\ln \ldots \ln \frac{1}{\lambda^2})^{-p}| \leq \rho.$$

Как известно, для любого ограниченного оператора B выполняется

$$B(\alpha I + B^*B)^{-1} = (\alpha I + BB^*)^{-1}B,$$

$$\|(\alpha I + B^*B)^{-1}\| \leq \alpha^{-1}, \|(\alpha I + B^*B)^{-1}B^*\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}, \tag{2.4}$$

$$\|B(\alpha I + B^*B)^{-1}B^*\| \leq 1.$$

Следуя [7], представим разность $Ax_\alpha - y$ в виде

$$Ax_\alpha - y = A_{h,n}x^{\delta,h}_{\alpha,n} - y_\delta + S_1 + S_2, \tag{2.5}$$

где

$$S_1 = (A_{h,n}(\alpha I + A^*_{h,n}A_{h,n})^{-1}A^*_{h,n} - I)(y - y_\delta) =$$
$$= (\alpha I + A_{h,n}A^*_{h,n})^{-1}(A_{h,n}A^*_{h,n} - (\alpha I + A_{h,n}A^*_{h,n}))(y - y_\delta) =$$
$$= -\alpha(\alpha I + A_{h,n}A^*_{h,n})^{-1}(y - y_\delta),$$

$$S_2 = (A(\alpha I + A^*A)^{-1}A^* - A_{h,n}(\alpha I + A^*_{h,n}A_{h,n})^{-1}A^*_{h,n})y =$$
$$= (AA^*(\alpha I + AA^*)^{-1} - (\alpha I + A_{h,n}A^*_{h,n})^{-1}A_{h,n}A^*_{h,n})y =$$
$$= \alpha(\alpha I + A_{h,n}A^*_{h,n})^{-1}(AA^* - A_{h,n}A^*_{h,n})(\alpha I + AA^*)^{-1})y.$$

Несложно видеть, что

$$\|S_1\| \leq \alpha\|(\alpha I + A_hA^*_h)^{-1}\|\|y - y_\delta\| \leq \delta.$$

Далее оценим норму S_2, используя представление

$$S_2 = S'_2 + S''_2,$$

где

$$S'_2 = \alpha(\alpha I + A_{h,n}A^*_{h,n})^{-1}(A - A_{h,n})A^*(\alpha I + AA^*)^{-1}Ax_0,$$

$$\|S'_2\| \leq \alpha\|(\alpha I + A_{h,n}A^*_{h,n})^{-1}\|\|A - A_{h,n}\|\|A^*(\alpha I + AA^*)^{-1}A\|\|x_0\| \leq$$
$$\leq \alpha\frac{1}{\alpha}\|A - A_{h,n}\|\|x_0\| \leq (\varepsilon + h)\rho,$$

$$S_2'' = \alpha(\alpha I + A_{h,n}A_{h,n}^*)^{-1}A_{h,n}(A^* - A_{h,n}^*)(\alpha I + AA^*)^{-1}Ax_0,$$

$$\|S_2''\| \le \frac{\|A^* - A_{h,n}^*\|\|x_0\|}{4} \le \frac{(\varepsilon+h)\rho}{4}.$$

Тогда

$$\|S_2\| \le (\varepsilon+h)\rho + \frac{(\varepsilon+h)\rho}{4} = \frac{5}{4}(\varepsilon+h)\rho.$$

Из Леммы (1) и (2.5) следует, что

$$\|A_{h,n}x_{\alpha,n}^{\delta,h} - y_\delta\| \le \|Ax_\alpha - y\| + \frac{5}{4}(h+\varepsilon)\rho + \delta,$$

и, в частности, для $\alpha = \delta^2(\underbrace{\ln\ldots\ln}_{K\text{раз}}\frac{1}{\delta})^{2p}$ имеем

$$\|A_{h,n}x_{\alpha,n}^{\delta,h} - y_\delta\| \le M_K^{-1}\rho\delta + \frac{5}{4}(h+\varepsilon)\rho + \delta \le (M_K^{-1}\rho+1)\delta + \frac{5}{4}(2h+\delta\rho^{-1})\rho =$$
$$= (M_K^{-1}\rho + \frac{9}{4})\delta + \frac{5}{2}\rho h \le d_0(\delta+h), \quad (2.6)$$

где $d_0 \ge \max\{M_K^{-1}\rho + \frac{9}{4}; \frac{5}{2}\rho\}$.

Учитывая, что $\|A_{h,n}x_{\alpha,n}^{\delta,h} - y_\delta\|$ монотонно зависит от α и, кроме того, при достаточно малых δ и $q > (\ln\ldots\ln\frac{1}{\delta})^{-2p_0}$ интервал $(\delta^2, \delta^2(\ln\ldots\ln\frac{1}{\delta})^{2p})$ содержит не меньше одного элемента $\Delta_q(\delta)$, мы делаем вывод, что существует $\alpha = \alpha_k \in \Delta_q(\delta)$, удовлетворяющее (2.3). Из (2.5) при таком α_k имеем

$$\|Ax_{\alpha_k} - y\| \le \|A_{h,n}x_{\alpha_k,n}^{\delta,h} - y_\delta\| + \delta + \frac{5}{4}(\varepsilon+h)\rho \le$$
$$\le d_0(\delta+h) + \frac{5}{4}(\delta\rho^{-1}+2h)\rho + \delta = (d_0+\frac{9}{4})\delta + (d_0+\frac{5}{2}\rho)h \le d''(\delta+h),$$

где $d'' \ge d_0 + \max\{\frac{9}{4}; \frac{5}{2}\rho\}$.

С другой стороны, используя спектральное разложение оператора A^*A, легко получить

$$\|Ax_\alpha - y\| = \Big\{\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\frac{\alpha\sigma_k}{\alpha+\sigma_k^2}(\underbrace{\ln\ldots\ln}_{K\text{раз}}\frac{1}{\alpha}\sigma_k^{-2})^{-p}\Big]^2|(\Psi_k,v)|^2\Big\}^{1/2}, \quad \sigma_k \in (0, M_K]. \quad (2.7)$$

Тогда из (2.3)-(2.7) следует, что

$$\|Ax_{\alpha_k} - y\| = \|Ax_{q\alpha_{k-1}} - y\| \ge q\|Ax_{\alpha_{k-1}} - y\| \ge$$
$$\ge q\Big[\Big\|A_{h,n}x_{\alpha_{k-1},n}^{\delta,h} - y_\delta\Big\| - \delta - \frac{5}{4}(\varepsilon+h)\rho\Big] \ge$$
$$\ge q\Big[d_0(\delta+h) - \delta - \frac{5}{4}(\delta\rho^{-1}+2h)\rho\Big] \ge q\Big[(d_0-\frac{9}{4})\delta + (d_0-\frac{5}{2}\rho)h\Big] \ge d'(\delta+h),$$

где $d' \ge q(d_0 - \max\{\frac{9}{4}; \frac{5}{2}\rho\})$. Лемма доказана. □

Для доказательства основного результата нам потребуется промежуточная оценка.

Лемма 3. *Пусть* $\|A\| \le M_K$ *и* $x_0 = A^{-1}y \in M^K_{p,\rho}(A)$. *Если* α *выбрано таким образом, что при некотором* $c'' > 0$ *выполняется*

$$\|Ax_\alpha - y\| \le c''(h+\delta),$$

то

$$\|x_0 - x_\alpha\| \le c_1(\ln\ldots\ln\frac{1}{h+\delta})^{-p},$$

где константа c_1 *зависит только от* c'', p *и* ρ.

Доказательство этого результата проводится по той же схеме, что и доказательство Леммы 3 из работы [13] и по этой причине здесь не приводится.

3. Основной результат

Теорема 1. *Пусть* $\|A\| \le M_K$ *и* $x_0 = A^{-1}y \in M^K_{p,\rho}(A)$. *Если* n *и* $\alpha = \alpha_m \in \Delta_q(\delta)$ *выбрано в соответствии с* (2.2) *и* (2.3), *то*

$$\|x_0 - x^{\delta,h}_{\alpha_m,n}\| \le c_0(\ln\ldots\ln\frac{1}{h+\delta})^{-p},$$

где константа $c_0 > 0$ *зависит только от* p, ρ, M_K, q, d_0.

Доказательство. Прежде всего, воспользуемся неравенством треугольника

$$\|x_0 - x^{\delta,h}_{\alpha_m,n}\| \le \|x_0 - x_{\alpha_m}\| + \|x_{\alpha_m} - x^h_{\alpha_m,n}\| + \|x^h_{\alpha_m,n} - x^{\delta,h}_{\alpha_m,n}\|, \tag{3.1}$$

где

$$x^h_{\alpha_m,n} = (\alpha_m I + A^*_{h,n}A_{h,n})^{-1}A^*_{h,n}y.$$

Далее, из Леммы 2 следует, что

$$\|Ax_{\alpha_m} - y\| \le d''(h+\delta).$$

Следовательно, условия Леммы 3 выполняются при $c'' = d''$. Получаем оценку первого слагаемого из правой части (3.1)

$$\|x_0 - x_{\alpha_m}\| \le (\ln\ldots\ln\frac{1}{h+\delta})^{-p}.$$

Оценим второе слагаемое

$$\begin{aligned}
\|x_{\alpha_m} - x^h_{\alpha_m,n}\| &= \|(\alpha_m I + A^*A)^{-1}A^*y - (\alpha_m I + A^*_{h,n}A_{h,n})^{-1}A^*_{h,n}y\| = \\
&= \|(\alpha_m I + A^*_{h,n}A_{h,n})^{-1}[(\alpha_m I + A^*_{h,n}A_{h,n})A^* - A^*_{h,n}(\alpha_m I + AA^*)](\alpha_m I + AA^*)^{-1}Ax_0\| = \\
&= \|(\alpha_m I + A^*_{h,n}A_{h,n})^{-1}[\alpha_m(A^* - A^*_{h,n}) + A^*_{h,n}(A_{h,n} - A)A^*](\alpha_m I + AA^*)^{-1}Ax_0\| \le \\
&\le R_1 + R_2,
\end{aligned}$$

где

$$R_1 = \alpha_m \|(\alpha_m I + A^*_{h,n}A_{h,n})^{-1}(A^* - A^*_{h,n})(\alpha_m I + AA^*)^{-1}Ax_0\| \leq$$
$$\leq \frac{\|A - A_{h,n}\|}{2\sqrt{\alpha_m}}\rho = \frac{(\varepsilon + h)\rho}{2\sqrt{\alpha_m}},$$

$$R_2 = \|(\alpha_m I + A^*_{h,n}A_{h,n})^{-1}A^*_{h,n}(A_{h,n} - A)A^*(\alpha_m I + AA^*)Ax_0\| = \frac{(h+\epsilon)\rho}{2\sqrt{\alpha_m}}.$$

Тогда

$$\|x_{\alpha_m} - x^h_{\alpha_m,n}\| \leq \frac{(\varepsilon + h)\rho}{\sqrt{\alpha_m}}.$$

Наконец,

$$\|x^h_{\alpha_m,n} - x^{\delta,h}_{\alpha_m,n}\| = \|(\alpha_m I + A^*_{h,n}A_{h,n})^{-1}A^*_{h,n}(y - y_\delta)\| \leq$$
$$\leq \|(\alpha_m I + A^*_h A_h)^{-1}A^*_h\|\|y - y_\delta\| \leq \frac{\delta}{2\sqrt{\alpha_m}}$$

Суммируя полученные выше оценки, находим

$$\|x_0 - x^{\delta,h}_{\alpha_m,n}\| \leq c_1(\ln\ldots\ln\frac{1}{h+\delta})^{-p} + \frac{(\varepsilon+h)\rho}{\sqrt{\alpha_m}} + \frac{1}{2}\frac{\delta}{\sqrt{\alpha_m}} \leq$$
$$\leq c_1(\ln\ldots\ln\frac{1}{h+\delta})^{-p} + \frac{1}{2}\frac{\delta}{\sqrt{\alpha_m}} + \frac{\rho}{\sqrt{\alpha_m}}(2h + \delta\rho^{-1}) \leq c_1(\ln\ldots\ln\frac{1}{h+\delta})^{-p} +$$
$$+ \frac{3\delta}{2\sqrt{\alpha_m}} + \frac{2h\rho}{\sqrt{\alpha_m}} \leq c_1(\ln\ldots\ln\frac{1}{h+\delta})^{-p} + \frac{h+\delta}{\sqrt{\alpha_m}}(2\rho + \frac{3}{2}). \quad (3.2)$$

Пусть способ (2.3) выбора параметра дает α_m такое, что $\alpha_m > h + \delta$. В этом случае получаем

$$\|x_0 - x^{\delta,h}_{\alpha_m,n}\| \leq c_1(\ln\ldots\ln\frac{1}{h+\delta})^{-p} + \sqrt{h+\delta}(2\rho + \frac{3}{2}) \leq c_2(\ln\ldots\ln\frac{1}{h+\delta})^{-p}.$$

С другой стороны, если $\alpha_m \leq h + \delta$, то в силу Лемм 1 и 2

$$d'(h+\delta) \leq \|Ax_{\alpha_m} - y\| \leq M_K^{-1}\rho\sqrt{\alpha_m}(\ln\ldots\ln\frac{1}{\alpha_m})^{-p} \leq M_K^{-1}\rho\sqrt{\alpha_m}(\ln\ldots\ln\frac{1}{h+\delta})^{-p}.$$

Это значит, что

$$\frac{h+\delta}{\sqrt{\alpha_m}} \leq \frac{\rho}{M_K d'}(\ln\ldots\ln\frac{1}{h+\delta})^{-p}.$$

Тогда из (3.2) следует

$$\|x_0 - x^{\delta,h}_{\alpha_m,n}\| \leq \frac{\rho(2\rho + \frac{3}{2})}{M_K d'}(\ln\ldots\ln\frac{1}{h+\delta})^{-p} + c_1(\ln\ldots\ln\frac{1}{h+\delta})^{-p} = c_3(\ln\ldots\ln\frac{1}{h+\delta})^{-p}.$$

Теорема доказана при $\tilde{c} = \max\{c_2, c_3\}$. $\square$

Список цитируемых источников

1. *Бакушинский А. Б., Кокурин М. Ю.* Итеративные методы для решения некорректных операторных уравнений с гладкими операторами. — Москва: Едиториал УРСС, 2002. — 192 с.
2. *Кокурин М. Ю.* О необходимых и достаточных условиях медленной сходимости методов решения линейных некорректных задач // Изв. вузов. Матем. — 2002. — №2. – С. 81–84.
3. *Солодкий С. Г.* Оптимизация проективных методов решения линейных некорректных задач // Журн. Вычисл. Мат. и Мат. Физ. — 1999. — Т. 39, №2. — С. 195–203.
4. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближения. — Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1976. — 303 с.
5. *Cao H., Pereverzev S.* Natural linearization for the identification of a diffusion coefficient in a quasi-linear parabolic system from short-time observations // Inverse Problems. — 2006. — №22. — P. 2311–2330.
6. *Hohage T.* Regularization of exponentially ill-posed problems // Numer. Funct. Anal. Optim. — 2000. — №21. — P. 439–464.
7. *Maas P., Rieder A.* Wavelet-accelerated Tikhonov-Phillips regularization with applications // Inverse Problems in medical imaging and nondestructive testing / Ed. H. W. Engl. — Wien: Springer. — 1997. — P. 134–158.
8. *Mair B.A.* Tikhonov regularization for finitely and infinitely smoothing operators // SIAM J. Math. Anal. — 1994. — V. 1, №25. — P. 135–147.
9. *Plato R., Vainikko G.* On the regularization of projection methods for solving ill-posed problems // Numer. Math. — 1990. — №57. — P. 63–79.
10. *Pereverzev S. V.* Optimization of projection methods for solving ill-posed problems // Computing. — 1995. — V. 55, №2. — P. 113–124.
11. *Pereversev S., Pressdorf S.* On the characterization of self-regularization properties of a fully discrete projection method for Symm's integral equation // J. Integral Equations Appl. — 2000. — V. 2, №2. — P. 113–130.
12. *Schock E., Pereverzev S. V.* Morozov's discrepancy principle for Tikhonov regularization of severely ill-posed problems in finite-dimensional subspaces // Numer. Funct. Anal. Optim. — 2000. — №21. — P. 901–916.
13. *Solodky S. G., Mosentsova A. V.* Morozov's discrepancy principle for the Tikhonov regularization of exponentially ill-posed problems // Comp. Meth. Appl. Math. — 2008. — V. 8, №1. — P. 86–98.
14. *Solodky S.G., Mosentsova A.V.* Unsaturable methods for solving severely ill-posed problems // Int. J. Comput. Sci. Math. — 2009. — V. 2, №3. — P. 229–242.
15. *Tautenhanh U.* Optimality for ill-posed problems under general source conditions // Numer. Funct. Anal. and Optimiz. — 1998. — V. 1, №19. — P. 377–398.

Получена 08.05.2011 Переработана 26.11.2011