Динамические системы, том 2(30), №1-2(2012), 23–32

УДК 531.38

О двух линейных инвариантных соотношениях уравнений движения гиростата в случае переменного гиростатического момента

Г. В. Горр, А. В. Мазнев*

Институт прикладной математики и механики,
Донецк 83114. *E-mail: gvgorr@gmail.com*
*Донецкий национальный университет,
Донецк, 83001. *E-mail: maznev_av@rambler.ru*

Аннотация. Рассмотрены условия существования двух линейных инвариантных соотношений уравнений Кирхгофа–Пуассона в предположении, что гиростатический момент зависит от времени. Получены новые классы решений, характеризующиеся прямолинейным подвижным годографом вектора угловой скорости.

Ключевые слова: гиростат, гиростатический момент, инвариантное соотношение.

Введение

Важность исследований движения системы связанных твердых тел (в частности, гиростата [9]) обусловлена тем, что с помощью вращающихся в теле-носителе роторов можно добиться либо стабилизации движений механических объектов [8], либо решить задачу управления их движением [5]. Наиболее общая модель такой системы рассмотрена П. В. Харламовым [9], который вывел уравнения движения системы связанных недеформируемых тел под действием заданного класса сил и моментов. В общем случае характер движения носимых тел позволяет изучать движения системы связанных твердых тел в рамках задачи о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом.

К настоящему времени в задаче о движении тяжелого гиростата для случая, когда тело-носитель имеет неподвижную точку, рассмотрены равномерные вращения относительно вертикали [4], относительно наклонной оси [1], маятниковые вращения [2] и другие движения.

Интерес представляют и результаты, которые получены в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил [10] в предположении переменности гиростатического момента [6, 7]. Методы в решении различных задач о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом тесно связаны не только с отмеченными выше подходами в решении задач стабилизации и управления движением, но и с подходами, применяемыми в теории обратных задач механики [3]. К известным обратным задачам относятся задачи Ньютона, Бертрана, Суслова, Чаплыгина–Горячева. Методы их решения изложены в книге [3] и подразделяются на методы восстановления уравнений движения и методы замыкания уравнений движения.

В статье изучены условия существования двух линейных инвариантных соотношений в задаче о движении гиростата, когда на намагниченный и заряженный гиростат действуют ньютоновские, кулоновские, магнитные силы и силы Лоренца. Получены новые решения уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом.

1. Постановка задачи

Запишем уравнения движения гиростата с переменным гиростатическим моментом [9, 10]

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} \times a\boldsymbol{x} - L(t)\boldsymbol{\alpha} + a\boldsymbol{x} \times (B\boldsymbol{\nu} - \lambda(t)\boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{\nu} \times (C\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{s}), \tag{1.1}$$

$$\dot{\lambda} = L(t), \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times a\boldsymbol{x}, \tag{1.2}$$

где $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ — момент количества движения гиростата, введенный в [9]; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — единичный вектор, указывающий направление магнитного поля; $L(t)$ — функция, характеризующая взаимодействие тела-носителя и носимых тел; $a = (a_{ij})$ — гирационный тензор; $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ — вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс гиростата; $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ — единичный вектор, характеризующий направление гиростатического момента $\lambda(t)\boldsymbol{\alpha}$; $B = (B_{ij})$ и $C = (C_{ij})$ — постоянные симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными обозначает дифференцирование по независимой переменной t.

Уравнения (1.1),(1.2) имеют первые интегралы

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (\boldsymbol{x} + \lambda(t)\boldsymbol{\alpha}) \cdot \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = k, \tag{1.3}$$

где k — произвольная постоянная.

Целью работы является определение условий на постоянные параметры a_{ij}, B_{kl}, C_{nm}, s_i, α_j правых частей (1.1); нахождение зависимости $L = L(t)$, для которой уравнения (1.1),(1.2) допускают два линейных инвариантных соотношения

$$x_1 = b, \quad x_2 = c, \tag{1.4}$$

где b и c — постоянные. Вид соотношений (1.4) связан с выбором подвижной системы координат, третья ось которой направлена так, что $x_3 \neq const$. Поскольку третья ось зафиксирована, то поворотом вокруг этой оси подвижной системы координат можно добиться условия $\alpha_2 = 0$, то есть вектор $\boldsymbol{\alpha}$ имеет вид $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, 0, \alpha_3)$.

В дальнейшем случай, когда соотношения (1.4) приводят к линейному инвариантному соотношению относительно ν_i, x_3 исключаем из рассмотрения.

Запишем в силу (1.4) компоненты угловой скорости тела-носителя

$$\begin{aligned}\omega_1 &= a_{11}b + a_{12}c + a_{13}x_3,\\ \omega_2 &= a_{12}b + a_{22}c + a_{23}x_3,\\ \omega_3 &= a_{13}b + a_{23}c + a_{33}x_3.\end{aligned} \tag{1.5}$$

Очевидно, что при условиях $x_1 = b$, $x_2 = c$, $x_3 \neq const$ подвижный годограф вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ принадлежит прямой.

Подставим выражения (1.4),(1.5) в скалярные уравнения, вытекающие из уравнения (1.1), и заменим функцию $L(t)$ на $\dot{\lambda}(t)$

$$\alpha_1\dot{\lambda}(t) + \alpha_3\lambda(t)\left(\beta_0 + a_{23}x_3\right) + a_{23}x_3^2 = x_3\left(B_0 + B_1\nu_1 + B_2\nu_2 + B_3\nu_3\right) + f_2(\nu_1,\nu_2,\nu_3), \tag{1.6}$$

$$\lambda(t)\left(\gamma_0 + \gamma_1 x_3\right) - a_{13}x_3^2 = x_3\left(C_0 + C_1\nu_1 + C_2\nu_2 + C_3\nu_3\right) + g_2(\nu_1,\nu_2,\nu_3), \tag{1.7}$$

$$\left(x_3 + \alpha_3\lambda(t)\right)^{\cdot} - \alpha_1\lambda(t)\left(\beta_0 + a_{23}x_3\right) = x_3\left(G_0 + G_1\nu_1 + G_2\nu_2 + G_3\nu_3\right) + h_2(\nu_1,\nu_2,\nu_3), \tag{1.8}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}&\beta_0 = a_{12}b + a_{22}c, \quad \gamma_0 = \alpha_1\left(a_{13}b + a_{23}c\right) - \alpha_3\left(a_{11}b + a_{12}c\right),\\ &\gamma_1 = \alpha_1 a_{33} - \alpha_3 a_{13}, \quad B_0 = \left(a_{33} - a_{22}\right)c - a_{12}b, \quad B_1 = a_{23}B_{13} - a_{33}B_{12},\\ &B_2 = a_{23}B_{23} - a_{33}B_{22}, \quad B_3 = a_{23}B_{33} - a_{33}B_{23},\end{aligned} \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned}f_2(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = E_0 + E_1\nu_1 + E_2\nu_2 + E_3\nu_3 + C_{13}\nu_1\nu_2 - C_{12}\nu_1\nu_3 +\\ + C_{23}\left(\nu_2^2 - \nu_3^2\right) + \left(C_{33} - C_{22}\right)\nu_2\nu_3,\end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\begin{aligned}&E_0 = c\left(a_{13}b + a_{23}c\right), \quad E_1 = b\left(a_{12}B_{13} - a_{13}B_{12}\right) + c\left(a_{22}B_{13} - a_{23}B_{12}\right),\\ &E_2 = -s_3 + b\left(a_{12}B_{23} - a_{13}B_{22}\right) + c\left(a_{22}B_{23} - a_{23}B_{22}\right),\\ &E_3 = s_2 + b\left(a_{12}B_{33} - a_{13}B_{23}\right) + c\left(a_{22}B_{33} - a_{23}B_{23}\right),\end{aligned} \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned}&C_0 = \left(a_{11} - a_{33}\right)b + a_{12}c, \quad C_1 = a_{33}B_{11} - a_{13}B_{13},\\ &C_2 = a_{33}B_{12} - a_{13}B_{23}, \quad C_3 = a_{33}B_{13} - a_{13}B_{33},\end{aligned} \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned}g_2(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = D_0 + D_1\nu_1 + D_2\nu_2 + D_3\nu_3 + C_{12}\nu_2\nu_3 - C_{23}\nu_1\nu_2 +\\ + C_{13}\left(\nu_3^2 - \nu_1^2\right) + \left(C_{11} - C_{33}\right)\nu_1\nu_3,\end{aligned} \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned}&D_0 = -b\left(a_{13}b + a_{23}c\right),\\ &D_1 = s_3 + b\left(a_{13}B_{11} - a_{11}B_{13}\right) + c\left(a_{23}B_{11} - a_{12}B_{13}\right),\\ &D_2 = b\left(a_{13}B_{12} - a_{11}B_{23}\right) + c\left(a_{23}B_{12} - a_{12}B_{23}\right),\\ &D_3 = -s_1 + b\left(a_{13}B_{13} - a_{11}B_{33}\right) + c\left(a_{23}B_{13} - a_{12}B_{33}\right),\end{aligned} \tag{1.14}$$

$$\begin{aligned}&G_0 = a_{23}b - a_{13}c, \quad G_1 = a_{13}B_{12} - a_{23}B_{11},\\ &G_2 = a_{13}B_{22} - a_{23}B_{12}, \quad G_3 = a_{13}B_{23} - a_{23}B_{13},\end{aligned} \tag{1.15}$$

$$h_2(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = F_0 + F_1\nu_1 + F_2\nu_2 + F_3\nu_3 + C_{23}\nu_1\nu_3 - C_{13}\nu_2\nu_3 + \\ + C_{12}\left(\nu_1^2 - \nu_2^2\right) + \left(C_{22} - C_{11}\right)\nu_1\nu_2, \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} &F_0 = a_{12}b^2 + (a_{22} - a_{11})\,bc - a_{12}c^2, \\ &F_1 = -s_2 + b\,(a_{11}B_{12} - a_{12}B_{11}) + c\,(a_{12}B_{12} - a_{22}B_{11})\,, \\ &F_2 = s_1 + b\,(a_{11}B_{22} - a_{12}B_{12}) + c\,(a_{12}B_{22} - a_{22}B_{12})\,, \\ &F_3 = b\,(a_{11}B_{23} - a_{12}B_{13}) + c\,(a_{12}B_{23} - a_{22}B_{13})\,. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Интеграл моментов из (1.3) на соотношениях (1.4) запишем так

$$x_3 = \frac{1}{\nu_3}\Big[k - b\nu_1 - c\nu_2 - \lambda(t)(\alpha_1\nu_1 + \alpha_3\nu_3) + \frac{1}{2}(B_{11}\nu_1^2 + \\ + B_{22}\nu_2^2 + B_{33}\nu_3^2 + 2B_{12}\nu_1\nu_2 + 2B_{13}\nu_1\nu_3 + 2B_{23}\nu_2\nu_3)\Big]. \quad (1.18)$$

В силу (1.4) скалярный вид уравнений Пуассона из (1.2) представим так

$$\begin{aligned} &\dot\nu_1 = \nu_2\,(a_{13}b + a_{23}c) - \nu_3\,(a_{12}b + a_{22}c) + x_3\,(a_{33}\nu_2 - a_{23}\nu_3)\,, \\ &\dot\nu_2 = \nu_3\,(a_{11}b + a_{12}c) - \nu_1\,(a_{13}b + a_{23}c) + x_3\,(a_{13}\nu_3 - a_{33}\nu_1)\,, \\ &\dot\nu_3 = \nu_1\,(a_{12}b + a_{22}c) - \nu_2\,(a_{11}b + a_{12}c) + x_3\,(a_{23}\nu_1 - a_{13}\nu_2)\,. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Таким образом, нахождение условий существования инвариантных соотношений (1.4) сводится к анализу решений уравнений (1.6)-(1.8) с обозначениями (1.9)-(1.17) и уравнений (1.19).

2. Случай $B_{ij} = 0,\ C_{ij} = 0\ \left(i,j = \overline{1,3}\right)$

Рассмотрим случай, когда уравнения (1.1),(1.2) описывают задачу о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием только силы тяжести.

Вариант 1. Пусть уравнение (1.6) выполняется для любых значений переменных $\lambda,\ \nu_i,\ x_3$. Предполагая, что барицентрическая ось является главной, получим следующие условия на параметры задачи

$$\alpha_1 = 0, \quad a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0, \quad c = 0, \quad s_2 = s_3 = 0. \quad (2.1)$$

Обозначая $a_{ii} = a_i\ \left(i = \overline{1,3}\right)$ из уравнений (1.7),(1.18) в силу обозначений (1.9)-(1.14) и равенств (2.1) найдем

$$\begin{aligned} &\lambda = \frac{1}{a_3 b\nu_3}\left[bk\,(a_3 - a_1) + b^2\,(a_1 - a_3)\,\nu_1 + s_1\nu_3^2\right], \\ &x_3 = \frac{1}{a_3 b\nu_3}\left(bka_1 - b^2 a_1\nu_1 - s_1\nu_3^2\right). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Учтем в уравнениях (1.19) условия (2.1) и выражение для x_3 из системы (2.2)

$$\begin{aligned}
\dot{\nu}_1 &= \frac{\nu_2}{b\nu_3}\left(bka_1 - b^2 a_1\nu_1 - s_1\nu_3^2\right), \\
\dot{\nu}_2 &= \frac{1}{b\nu_3}\left[-bka_1\nu_1 + b^2 a_1\left(\nu_1^2 + \nu_3^2\right) + s_1\nu_1\nu_3^2\right], \\
\dot{\nu}_3 &= -ba_1\nu_2.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Уравнения (2.3) имеют интегралы

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \quad \frac{a_1 b\left(b\nu_1 - k\right) - s_1\nu_3^2}{\nu_3} = c_*,$$

где c_* — произвольная постоянная. Из этих интегралов получим

$$\nu_1(\nu_3) = \frac{ka_1 b + c_*\nu_3 + s_1\nu_3^2}{a_1 b^2}, \quad \nu_2(\nu_3) = \sqrt{1 - \nu_3^2 - \nu_1^2(\nu_3)}. \tag{2.4}$$

Подставив $\nu_2(\nu_3)$ из (2.4) в третье уравнение системы (2.3) приходим к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными, из которого вытекает

$$\int\limits_{\nu_3^{(0)}}^{\nu_3} \frac{d\nu_3}{\sqrt{1 - \nu_3^2 - \nu_1^2(\nu_3)}} = -a_1 b(t - t_0). \tag{2.5}$$

В силу (2.4),(2.5) функция $\nu_3 = \nu_3(t)$ находится путем обращения эллиптического интеграла, поэтому $\nu_3 = \nu_3(t)$ — эллиптическая функция времени. Действительности этой функции можно добиться надлежащим выбором произвольной постоянной k (например, положив $k < b$).

Поскольку постоянные $k,\ c_*$ — произвольные, то функция $\nu_3(t)$ зависит от трех произвольных постоянных. Подставив ее в формулы (2.2),(2.4) и учтя соотношения (1.4) при условиях (2.1)

$$x_1 = b, \quad x_2 = 0, \tag{2.6}$$

получим зависимость основных переменных задачи (1.1),(1.2) от времени. Функцию $L(t)$ найдем из уравнения $L(t) = \dot{\lambda}(t)$. Можно показать, что построенное решение удовлетворяет уравнению (1.8).

Вариант 2. Положим в уравнениях (1.6),(1.7)

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_3 = 1, \quad a_{13} = 0, \quad a_{23} = 0, \quad s_3 = 0 \tag{2.7}$$

и потребуем, чтобы при условиях (2.7) линейная комбинация уравнений (1.6),(1.7) приводила к уравнению, которое выполнялось бы для любых значений переменных $\lambda,\ \nu_i,\ x_3$. Тогда получим следующие равенства

$$s_2 = \frac{c}{b}s_1, \quad \frac{b}{c} = \frac{a_{11} - a_{22} \pm \sqrt{\Delta}}{2a_{12}}, \quad \Delta = \left(a_{22} - a_{11}\right)^2 + 4a_{12}^2, \tag{2.8}$$

где очевидно предполагаем $\Delta > 0$, то есть случай (2.8) не может приводить к равенствам (2.6).

Из соотношений (1.7),(1.18) вытекает

$$
\begin{aligned}
x_3 &= \frac{1}{a_{33}c\nu_3}\left[\beta_0\left(k - b\nu_1 - c\nu_2\right) - s_2\nu_3^2\right], \\
\lambda &= \frac{1}{a_{33}c\nu_3}\left[\left(a_{33}c - \beta_0\right)\left(k - b\nu_1 - c\nu_2\right) + s_2\nu_3^2\right].
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

Для записи уравнений Пуассона (1.19) воспользуемся условиями $a_{13} = a_{23} = 0$ из системы (2.7), выражением x_3 из системы (2.9) и перейдем в преобразованных уравнениях к дифференцированию по новой независимой переменной $\tau = \frac{\beta_0}{c}t$

$$
\begin{aligned}
\nu_1' &= \frac{1}{\nu_3}\left[k\nu_2 - b\nu_1\nu_2 - c\left(\nu_2^2 + \nu_3^2\right) - s\nu_2\nu_3^2\right], \\
\nu_2' &= \frac{1}{\nu_3}\left[-k\nu_1 + c\nu_1\nu_2 + b\left(\nu_1^2 + \nu_3^2\right) + s\nu_1\nu_3^2\right], \\
\nu_3' &= c\nu_1 - b\nu_2,
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

где $s = \frac{s_2}{\beta_0}$, а штрихом обозначена производная по τ.

Система (2.10) имеет два первых интеграла

$$
\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \quad \frac{b\nu_1 + c\nu_2 - s\nu_3^2 - k}{\nu_3} = c_* \quad (c_* = const), \tag{2.11}
$$

и поэтому ее интегрирование сводится к квадратурам.

Введем вместо переменных $\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3$ переменные θ и φ по формулам

$$
\nu_1 = \sin\theta\cos\varphi, \quad \nu_2 = \sin\theta\sin\varphi, \quad \nu_3 = \cos\theta. \tag{2.12}
$$

Тогда с помощью соотношений (2.12) третье уравнение из системы (2.10) и второй интеграл из (2.11) приведем к виду

$$
\theta' = \mu_*\sin(\varphi - \varphi_0), \quad \cos(\varphi - \varphi_0) = \frac{1}{\mu_*\sin\theta}\left(k + c_*\cos\theta + s\cos^2\theta\right), \tag{2.13}
$$

где $\mu_* = \sqrt{b^2 + c^2}$, $\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{c}{b}$. Используя старую независимую переменную $t = \frac{c}{\beta_0}\tau$, из уравнений (2.13) получим

$$
\int\limits_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sin\theta\cdot d\theta}{\sqrt{\mu_*^2\sin^2\theta - \left(k + c_*\cos\theta + s\cos^2\theta\right)^2}} = \frac{\beta_0}{c}(t - t_0), \tag{2.14}
$$

$$
\varphi = \varphi_0 + \arccos\frac{1}{\mu_*\sin\theta}\left(k + c_*\cos\theta + s\cos^2\theta\right). \tag{2.15}
$$

Из формулы (2.14) обращением интеграла находим зависимость $\theta = \theta(t)$. Подставляя эту функцию в формулу (2.15), определим $\varphi = \varphi(t)$. Используя данные функции, из соотношений (2.9) получим $x_3 = x_3(t),\ \lambda = \lambda(t)$. Если к этому результату присоединить соотношения (1.4), то можно утверждать о получении решения уравнений (1.1),(1.2) при условиях (2.1). При этом уравнение (1.8) становится тождеством.

3. Случай $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1\nu_1 + \lambda_2\nu_2 + \lambda_3\nu_3$

Зададим функцию $\lambda(t)$ в виде

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1\nu_1 + \lambda_2\nu_2 + \lambda_3\nu_3. \tag{3.1}$$

Из интеграла моментов в силу (3.1) имеем

$$x_3 = \frac{1}{\nu_3}(\varepsilon_0 + \varepsilon_1\nu_1 + \varepsilon_2\nu_2 + \varepsilon_3\nu_3 + \varepsilon_{11}\nu_1^2 + \varepsilon_{22}\nu_2^2 + \varepsilon_{33}\nu_3^2 + \\ + 2\varepsilon_{12}\nu_1\nu_2 + 2\varepsilon_{13}\nu_1\nu_3 + 2\varepsilon_{23}\nu_2\nu_3), \tag{3.2}$$

где

$$\begin{gathered} \varepsilon_0 = k, \quad \varepsilon_1 = -b - \lambda_0\alpha_1, \quad \varepsilon_2 = -c_1, \quad \varepsilon_3 = -\lambda_0\alpha_3, \\ \varepsilon_{11} = \frac{1}{2}B_{11} - \lambda_1\alpha_1, \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{2}B_{22}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{1}{2}B_{33} - \lambda_3\alpha_3, \\ 2\varepsilon_{12} = B_{12} - \lambda_2\alpha_1, \quad 2\varepsilon_{13} = B_{13} - \lambda_1\alpha_3 - \lambda_3\alpha_1, \quad 2\varepsilon_{23} = B_{23} - \lambda_2\alpha_3. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Подставим выражение (3.2) в уравнение (1.7) и потребуем, чтобы полученное равенство выполнялось для всех значений $\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3$. Если предположить, что $a_{13} \neq 0$, то приходим к равенствам $\varepsilon_0 = 0,\ \varepsilon_1 = 0,\ \varepsilon_2 = 0,\ \varepsilon_{11} = 0,\ \varepsilon_{12} = 0,\ \varepsilon_{22} = 0$. Из (3.2) следует, что x_3 линейно зависит от компонент вектора $\boldsymbol{\nu}$. Этот случай в силу (1.4) означает, что имеем три инвариантных соотношения уравнений (1.1),(1.2). Он, в силу постановки задачи, исключен из рассмотрения. Поэтому необходимо положить $a_{13} = 0$. В силу проведенных выше рассуждений подстановка выражения (3.1) в уравнение (1.6) и учет уравнений (1.19) позволяет сделать вывод, что и $a_{23} = 0$. Итак, в дальнейшем полагаем

$$a_{13} = 0, \quad a_{23} = 0. \tag{3.4}$$

В силу (3.4) уравнения (1.19) упрощаются

$$\begin{aligned} \dot\nu_1 &= \frac{1}{\nu_3}\left(a_{33}\nu_2\Pi(\nu_1,\nu_2,\nu_3) - \beta_0\nu_3^2\right), \\ \dot\nu_2 &= \frac{1}{\nu_3}\left(-a_{33}\nu_1\Pi(\nu_1,\nu_2,\nu_3) + \beta_1\nu_3^2\right), \\ \dot\nu_3 &= \beta_0\nu_1 - \beta_1\nu_2, \end{aligned} \tag{3.5}$$

где

$$\Pi(\nu_1,\nu_2,\nu_3)=\varepsilon_0+\varepsilon_1\nu_1+\varepsilon_2\nu_2+\varepsilon_3\nu_3+\varepsilon_{11}\nu_1^2+\varepsilon_{22}\nu_2^2+\varepsilon_{33}\nu_3^2+ \\ +2\varepsilon_{12}\nu_1\nu_2+2\varepsilon_{13}\nu_1\nu_3+2\varepsilon_{23}\nu_2\nu_3,\quad \beta_1=a_{11}b+a_{12}c. \quad (3.6)$$

То есть, на основании (3.6) из (3.2) имеем

$$x_3=\frac{\Pi(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\nu_3}. \quad (3.7)$$

Запишем уравнения (1.6),(1.7) в силу (3.1),(3.2)

$$\Pi(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\left[(C_0-\gamma_1\lambda_0)+(C_1-\gamma_1\lambda_1)\nu_1+(C_2-\gamma_1\lambda_2)\nu_2+\right. \\ \left.+(C_3-\gamma_1\lambda_3)\nu_3\right]+\nu_3\left[g_2(\nu_1,\nu_2,\nu_3)-\gamma_0\left(\lambda_0+\lambda_1\nu_1+\lambda_2\nu_2+\lambda_3\nu_3\right)\right]=0, \quad (3.8)$$

$$\Pi(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\left[B_0+(B_1+\alpha_1\lambda_2a_{33})\nu_1+(B_2-\alpha_1\lambda_1a_{33})\nu_2+B_3\nu_3\right]+ \\ +\nu_3\left[f_2(\nu_1,\nu_2,\nu_3)-\alpha_3\beta_0\,\lambda_0-\beta_0\left(\alpha_1\lambda_3+\alpha_3\lambda_1\right)\nu_1+\right. \\ \left.+(\alpha_1\lambda_3\beta_1-\alpha_3\lambda_2\beta_0)\nu_2+(\alpha_1\lambda_1\beta_0-\alpha_1\lambda_2\beta_1-\alpha_3\lambda_3\beta_0)\nu_3\right]=0. \quad (3.9)$$

Потребуем, чтобы равенства (3.8),(3.9), в которых учтено выражение (3.6), выполнялись для всех значений $\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3$. Вначале положим $\nu_3=0$ и потребуем, чтобы они выполнялись для всех $\nu_1,\ \nu_2$. Тогда получим условия

$$\begin{gathered} c\,(a_{33}-a_{22})-ba_{12}=0,\quad \lambda_0=\frac{1}{\alpha_1a_{33}}\left[b\,(a_{11}-a_{33})+ca_{12}\right], \\ \lambda_1=\frac{B_{11}}{\alpha_1},\quad \lambda_2=\frac{B_{12}}{\alpha_1},\quad B_{22}+B_{11}=0. \end{gathered} \quad (3.10)$$

При наличии равенств (3.10) уравнения (3.8),(3.9) упрощаются. Если подставить выражение (3.6) в (3.8),(3.9) и потребовать, чтобы полученные равенства были тождествами по $\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3$, то приходим к системе алгебраических равенств на параметры задачи, характеризующей условия существования инвариантных соотношений (1.4). Эта система имеет решение, например, в случае, когда выполняются условия

$$\begin{gathered} \alpha_3=0,\quad \alpha_1=1,\quad B_{23}=0,\quad C_{ij}=0\ (i,j=\overline{1,3}),\quad \lambda_3=B_{13}, \\ s_1=-nB_{33},\quad s_2=nB_{12}-(B_{11}+B_{33})\,\beta_0, \\ s_3=nB_{13},\quad n=a_{11}b+a_{12}c. \end{gathered} \quad (3.11)$$

Принимая во внимание равенства (3.3),(3.10),(3.11), из (3.7) получим

$$x_3=\frac{1}{\nu_3}\left(\varepsilon_0^*-\beta_1\nu_1-\beta_0\nu_2+\varepsilon_{33}^*\nu_3^2\right), \quad (3.12)$$

где $\varepsilon_0^*=a_{33}\left(k-\frac{1}{2}B_{11}\right),\ \varepsilon_{33}^*=\frac{1}{2}a_{33}\left(B_{11}+B_{33}\right).$

Запишем уравнения Пуассона из (3.5)

$$\begin{aligned}
\dot{\nu}_1 &= \frac{1}{\nu_3}\left[\varepsilon_0^*\nu_2 - \beta_1\nu_1\nu_2 - \beta_0\left(\nu_2^2+\nu_3^2\right) + \varepsilon_{33}^*\nu_2\nu_3^2\right], \\
\dot{\nu}_2 &= \frac{1}{\nu_3}\left[-\varepsilon_0^*\nu_1 + \beta_0\nu_1\nu_2 + \beta_1\left(\nu_1^2+\nu_3^2\right) - \varepsilon_{33}^*\nu_1\nu_3^2\right], \\
\dot{\nu}_3 &= \beta_0\nu_1 - \beta_1\nu_2.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Уравнения (3.13) по своей структуре совпадают с уравнениями (2.10) и поэтому имеют интегралы

$$\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2 = 1, \quad \frac{\beta_1\nu_1+\beta_0\nu_2+\varepsilon_{33}^*\nu_3^2-\varepsilon_0^*}{\nu_3} = c_*,$$

где c_* — произвольная постоянная. Интегрирование системы (3.13) осуществляется так же, как и в случае (2.10). После нахождения функций $\nu_i(t)$ зависимость $x_3 = x_3(t)$ определяется из формулы (3.12), которая по структуре совпадает с первой формулой из (2.9), зависимость $\lambda(t)$ из формулы

$$\lambda(t) = \lambda_0 + B_{11}\nu_1(t) + B_{12}\nu_2(t) + B_{13}\nu_3(t). \tag{3.14}$$

а $L(t)$ из уравнения $L(t) = B_{11}\dot{\nu}_1(t) + B_{12}\dot{\nu}_2(t) + B_{13}\dot{\nu}_3(t)$.

В силу соотношений (3.10) условиями существования построенного решения являются равенства

$$\frac{c}{b} = \frac{a_{12}}{a_{33}-a_{22}}, \quad B_{22} = -B_{11} \tag{3.15}$$

и условия (3.11).

Непосредственной подстановкой выражений (1.4),(3.12),(3.14) в уравнение (1.8) убеждаемся в том, что при наличии равенств (3.11),(3.15) оно становится тождеством.

Необходимо отметить, что в работе [11] рассмотрен случай двух линейных инвариантных соотношений более общего вида. Однако, полученные здесь и в [11] результаты принципиально различны, так как пример разрешимости, указанный в [11] не допускает предельного перехода к классической задаче о движении гиростата под действием силы тяжести, который реализован в данной работе.

4. Вывод

Таким образом, исследование условий существования у уравнений (1.1),(1.2) инвариантных соотношений (1.4) позволило получить новые решения задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в случае переменного гиростатического момента. Примечательным с математической точки зрения обстоятельством является получение трех нелинейных дифференциальных уравнений класса (2.10), которые имеют рациональный первый интеграл вида (2.11).

Список цитируемых источников

1. *Волкова О.С.* Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела, несущего маховик // Механика твердого тела. — 2008. — Вып. 38. — С. 80–86.
2. *Волкова О.С., Гашененко И.Н.* Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом // Механика твердого тела. — 2009. — Вып. 39. — С. 42–49.
3. *Галиуллин А.С.* Аналитическая динамика // Учеб. пособие для ун-тов и втузов. — М.: Высш. шк., 1980. — 264 с.
4. *Дружинин Э.И.* О перманентных вращениях уравновешенного неавтономного гиростата // Прикл. математика и механика. — 1999. — Т. 63., Вып. 5. — С. 825–826.
5. *Ковалев А.М.* Нелинейные задачи и наблюдения в теории динамических систем // Киев: Наук. думка, 1980. — 175с.
6. *Мазнев А.В.* Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Механика твердого тела. — 2010. — Вып. 40. — С. 91–104.
7. *Мазнев А.В.* Регулярные прецессии гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Докл. НАН Украины. — 2011. — № 8. — С. 66–72.
8. *Румянцев В.В.* Об управлении ориентацией и о стабилизации спутника роторами // Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика. — 1970. — №2. — С. 83–96.
9. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. — 1972. — Вып. 4. — С. 52–73.
10. *Yehia H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces, I: The equations of motion and their transformations // J. Mecan. Theor. Appl. — 1986. — V. 5, №5. — P. 747–754.
11. *Мазнев А.В.* О двух линейных инвариантных соотношениях уравнений движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил // Механика твердого тела. — 2011. — Вып. 41. — С. 51–60.

Получена 10.02.2012 Переработана 23.05.2012