

УДК 539.3

Колебания геометрически нелинейных пологих оболочек переменной толщины, защемленных по части контура

И.Д. Бреславский*, К.В. Аврамов**

* Национальный технический университет "Харьковский политехнический институт" Харьков, 61002. *E-mail: id.breslavsky@gmail.com*

** Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Харьков, 61046. *E-mail: kvavr@kharkov.ua*

Аннотация. Предложена методика расчета свободных нелинейных колебаний пологих оболочек сложной формы, защемленных по части контура. Методика основана на совместном использовании нелинейных нормальных форм Шоу-Пьера и метода гармонического баланса. Проведен расчет для лопасти гидротурбины, полученные данные сравниваются с экспериментальными. Представлены амплитудно-частотные характеристики свободных колебаний пологой оболочки.

Ключевые слова: пологие оболочки, нелинейные колебания, нормальные формы, лопасти гидротурбин.

1. Введение

Колебания пологих оболочек переменной толщины, защемленных по части контура, давно интересовали ученых и инженеров. Дело в том, что такие оболочки являются моделями лопастей высоконапорных поворотнолопастных гидротурбин. Конструкции таких лопастей обсуждаются в [2]. В монографии [11] приведена методика расчета линейных собственных форм и частот колебаний высоконапорных осевых поворотнолопастных гидротурбин. Приведены рассчитанные и экспериментальные собственные формы и частоты для лопасти ПЛ 495. В статьях [4, 9] исследовались частоты и формы колебаний лопасти. Анализу подвергались также распределения напряжений. В работе [5] рассматривается пологая оболочка как модель лопасти гидротурбины. Экспериментальные данные по собственным формам и частотам колебаний лопасти гидротурбины в воде представлены в [12]. В современных работах исследуется динамическое взаимодействие лопастей гидротурбин с покоящейся и движущейся жидкостью [6]–[8].

Отметим, что лопасти гидротурбин находятся под действием больших динамических нагрузок, которые возникают из-за действия движущегося потока воды. Более того, эти лопасти являются достаточно тонкими и могут геометрически нелинейно деформироваться. Эта статья посвящена исследованию свободных колебаний пологих оболочек переменной толщины при их геометрически нелинейном деформировании. Приводится пример расчета лопасти гидротурбины, так как это один из наиболее важных объектов приложения этой теории.

2. Математическая постановка задачи и алгоритм ее решения

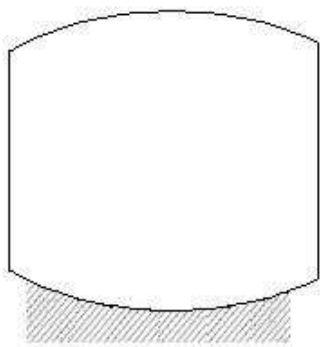


Рис. 1.

Рассматриваются колебания пологой оболочки со сложной формой плана, имеющей переменную толщину. Рассмотрим тонкие оболочки, в смысле критериев, приведенных в [10]. Исследуются оболочки, защемленные на участке контура и свободные на остальной части контура. Эскиз такой оболочки представлен на рис.1. На поверхности оболочки выберем два взаимно ортогональных направления — линии главных кривизн, вдоль которых отсчитываются криволинейные координаты α и β . Третью ось z направим таким образом, чтобы система координат была правой.

Краевые условия на защемленном участке контура имеют вид:

$$w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \quad u = 0, \quad v = 0; \quad (\alpha, \beta) \in \partial\Lambda, \quad (1)$$

где $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$ — перемещения точек оболочки в направлении α, β соответственно, $w(\alpha, \beta)$ — перемещение точек оболочки в направлении z , $\partial\Lambda$ — защемленный участок границы, n — внешняя нормаль к $\partial\Lambda$. Для нахождения собственных форм и частот линейных колебаний воспользуемся методом Релея-Ритца. При применении этого метода приходится удовлетворять только кинематическим граничным условиям, поэтому на свободной поверхности оболочки нет необходимости удовлетворять граничным условиям.

Потенциальную энергию оболочки представим так [14]:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{-h(\alpha, \beta)/2}^{h(\alpha, \beta)/2} \int_{\Lambda} (\sigma_{11}\varepsilon_{11}^z + \sigma_{22}\varepsilon_{22}^z + \sigma_{12}\varepsilon_{12}^z) AB d\alpha d\beta dz,$$

где $h(\alpha, \beta)$ — переменная толщина оболочки. Воспользуемся законом Гука в форме:

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_{11}^z + \mu\varepsilon_{22}^z), \quad \sigma_{22} = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_{22}^z + \mu\varepsilon_{11}^z), \quad \sigma_{12} = \frac{E}{2(1 - \mu)} \varepsilon_{12}^z,$$

$$\varepsilon_{11}^z = \varepsilon_{11} - z\chi_1, \quad \varepsilon_{22}^z = \varepsilon_{22} - z\chi_2, \quad \varepsilon_{12}^z = \varepsilon_{12} - 2z\tau,$$

где E , μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала. В результате интегрирования по z , получим:

$$\Pi = \frac{E}{2(1+\mu)} \int_{\Lambda} \left\{ \frac{1}{1-\mu} ((\varepsilon_{11}^2 + 2\mu\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}^2)h(\alpha, \beta) + \frac{h^3(\alpha, \beta)}{12}(\chi_1^2 + 2\mu\chi_1\chi_2 + \chi_2^2)) + \frac{1}{2} \left(\varepsilon_{12}^2 h(\alpha, \beta) + \frac{1}{3} \tau^2 h^3(\alpha, \beta) \right) \right\} AB d\alpha d\beta, \quad (2)$$

где A и B — коэффициенты Ляме. Интеграл в (2) берется по площади проекции оболочки на плоскость Λ . Величины, входящие в (2), определяются так [3]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \left(-\frac{w_\alpha}{A} \right)^2; \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 + \frac{1}{2} \left(-\frac{w_\beta}{B} \right)^2; \quad \varepsilon_{12} = \gamma + \frac{w_\alpha w_\beta}{AB}; \\ \varepsilon_1 &= \frac{u_\alpha}{A} + \frac{A_\beta}{AB} v - k_1 w; \quad \varepsilon_2 = \frac{v_\beta}{B} + \frac{B_\alpha}{AB} u - k_2 w; \quad \gamma = \frac{B}{A} \left(\frac{v}{B} \right)_\alpha + \frac{A}{B} \left(\frac{u}{A} \right)_\beta; \\ \chi_1 &= \frac{1}{A} \left(\frac{w_\alpha}{A} \right)_\alpha + \frac{A_\beta}{AB} \frac{w_\beta}{B}, \quad \chi_2 = \frac{1}{B} \left(\frac{w_\beta}{B} \right)_\beta + \frac{B_\alpha}{AB} \frac{w_\alpha}{A}, \\ \tau &= \frac{1}{B} \left(\frac{w_\alpha}{A} \right)_\alpha - \frac{B_\alpha}{AB} \frac{w_\beta}{B} = \frac{1}{A} \left(\frac{w_\beta}{B} \right)_\alpha - \frac{A_\beta}{AB} \frac{w_\alpha}{A}. \end{aligned} \quad (3)$$

При записи потенциальной энергии деформации использовались уравнения технической теории, то есть предполагалось, что квадраты углов поворотов нормали к срединной поверхности малы в сравнении с единицей. Поскольку в этом разделе рассматриваются линейные колебания оболочек, то в выражениях (3) не учитываются нелинейные слагаемые.

Кинетическая энергия оболочки имеет следующий вид [14]

$$T = \frac{\rho}{2} \int_{\Lambda} \left(\dot{w}^2 + \dot{u}^2 + \dot{v}^2 \right) h(\alpha, \beta) AB d\alpha d\beta, \quad (4)$$

где ρ — плотность материала оболочки. Предположим, что линейные колебания оболочки происходят так:

$$u(\alpha, \beta, t) = \bar{u}(\alpha, \beta) \cos(\omega t); \quad v(\alpha, \beta, t) = \bar{v}(\alpha, \beta) \cos(\omega t); \quad w(\alpha, \beta, t) = \bar{w}(\alpha, \beta) \cos(\omega t).$$

Для определения линейных колебаний оболочки найдем минимальное значение функционала Лагранжа $L = T - \Pi$. Динамические перемещения оболочки представим так:

$$\bar{w}(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{N_1} a_i w_i(\alpha, \beta); \quad \bar{u}(\alpha, \beta) = \sum_{i=N_1+1}^{N_2} a_i u_i(\alpha, \beta); \quad \bar{v}(\alpha, \beta) = \sum_{i=N_2+1}^{N_3} a_i v_i(\alpha, \beta), \quad (5)$$

где $w_i(\alpha, \beta)$, $u_i(\alpha, \beta)$, $v_i(\alpha, \beta)$ — базисные функции, а N_1 , $N_2 - N_1$, $N_3 - N_2$ — число членов в разложениях (5). В данной работе бралось $N_1 = N_2 - N_1 = N_3 - N_2 = \wp$. Теперь введем (5) в функционал Лагранжа $L = T - \Pi$ и произведем необходимое интегрирование. В результате получим L как квадратичную функцию параметров

a_1, a_2, \dots, a_{N_1} , а также неизвестной частоты ω . В общем случае L можно представить так:

$$L = L(a_1, a_2, \dots, a_{N_1}, \omega).$$

Задача нахождения минимума функционала Лагранжа сводится к следующим уравнениям: $\partial L / \partial a_j = 0$; $j = 1, \dots, N_3$. Эти уравнения сводятся к проблеме собственных значений следующего вида:

$$(K - \omega^2 M) \tilde{A} = 0, \quad (6)$$

где $\tilde{A} = (a_1, a_2, \dots, a_{N_1})$.

3. Нелинейная дискретная модель

Изгибные колебания оболочки $w(\alpha, \beta, t)$ представим так:

$$w(\alpha, \beta, t) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(t) W_i(\alpha, \beta), \quad (7)$$

где $W_i(\alpha, \beta)$, $i = \overline{1, N}$ — собственные формы свободных линейных колебаний, отвечающие собственным частотам, входящим в рассматриваемый диапазон. Перемещения u и v представим так:

$$u(\alpha, \beta, t) = \sum_{i=1}^N \varphi_{i+N}(t) U_i(\alpha, \beta), \quad v(\alpha, \beta, t) = \sum_{i=1}^N \varphi_{i+2N}(t) V_i(\alpha, \beta), \quad (8)$$

где $U_i(\alpha, \beta)$ и $V_i(\alpha, \beta)$, $i = \overline{1, N}$, — собственные формы колебаний u , v . Отметим, что функции (7) и (8) удовлетворяют краевым условиям (1). Теперь соотношения (7) и (8) введем в кинетическую и потенциальную энергии (2), (4). Произведем необходимое интегрирование. Тогда получим кинетическую и потенциальную энергии как функцию обобщенных скоростей и координат $T = T(\dot{\varphi}_1, \dots, \dot{\varphi}_{3N})$; $\Pi = \Pi(\varphi_1, \dots, \varphi_{3N})$. Используя кинетическую и потенциальную энергии, составим уравнение Лагранжа второго рода. Так как собственные частоты продольных колебаний значительно выше изгибных [14], пренебрежем инерционными членами по u , v . Тогда вместо $3N$ обыкновенных дифференциальных уравнений Лагранжа получим $2N$ линейных алгебраических уравнений относительно $(\varphi_{N+1}, \dots, \varphi_{3N})$ и N обыкновенных дифференциальных уравнений. Решения линейных алгебраических уравнений введем в дифференциальные уравнения. В результате получим систему N обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$. Введем безразмерные переменные и параметры:

$$\tau = \omega_1 t, \quad q_i(\tau) = \frac{\varphi_i(t)}{\bar{h}}, \quad i = \overline{1, N},$$

где ω_i — первая (наименьшая) собственная частота линейных колебаний; \bar{h} — характерный параметр толщины. Тогда динамическая система, описывающая колебания оболочки, принимает следующий вид:

$$\ddot{\varphi} + \sum_{i=1}^N z_{ki} \varphi_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N z_{kij} \varphi_i \varphi_j + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{g=1}^N z_{kijg} \varphi_i \varphi_j \varphi_g = 0, k = \overline{1, N} \quad (9)$$

где z_{ki} , z_{kij} , z_{kijg} — известные параметры системы. Представим матрицу коэффициентов при первых степенях φ_i в (9) так: $(Z) = (z_{ki})_{i,k=\overline{1, N}}$. Тогда выполняется следующее соотношение:

$$(Z) = (G)(\Omega)(G)^{-1},$$

где $(\Omega) = \text{diag}(\bar{\omega}_1^2; \bar{\omega}_2^2; \dots; \bar{\omega}_N^2)$ — матрица, где на главной диагонали расположены квадраты собственных частот, остальные же элементы нулевые. С помощью преобразования координат: $(q_1, \dots, q_N)^T = (G)(\xi_1, \dots, \xi_N)^T$, система (9) представляется в модальном пространстве. Она принимает следующий вид:

$$\ddot{\xi}_k = f_k(\xi_1, \dots, \xi_N) = -\bar{\omega}_k^2 \xi_k - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N l_{kij} \xi_i \xi_j - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{g=1}^N l_{kijg} \xi_i \xi_j \xi_g, k = \overline{1, N}. \quad (10)$$

4. Анализ нелинейных колебаний

Для анализа нелинейных колебаний системы (10) воспользуемся нелинейными нормальными формами Шоу-Пьера [15, 1]. Выделим обобщенную координату ξ_1 , которая определяет движение на нормальной форме. Нормальную форму (инвариантное многообразие) представим так:

$$\xi_k = X_k(\xi_1, \dot{\xi}_1); \quad \dot{\xi}_k = Y_k(\xi_1, \dot{\xi}_1), \quad k = 2, \dots, N. \quad (11)$$

Нелинейная нормальная форма (11) удовлетворяет следующим уравнениям в частных производных:

$$\begin{cases} \frac{\partial X_k}{\partial \xi_1} \dot{\xi}_1 + \frac{\partial X_k}{\partial \dot{\xi}_1} f_1(\xi_1, X_2, \dots, X_N) = Y_k; \\ \frac{\partial Y_k}{\partial \xi_1} \dot{\xi}_1 + \frac{\partial Y_k}{\partial \dot{\xi}_1} f_1(\xi_1, X_2, \dots, X_N) = f_k(\xi_1, X_2, \dots, X_N); \end{cases} \quad k = \overline{2, N}. \quad (12)$$

Функции X_k , Y_k , $k = \overline{2, N}$ представим в виде полиномов:

$$X_k(\xi_1, \dot{\xi}_1) = \sum_{D \in M} a_{kD} U^D, \quad Y_k(\xi_1, \dot{\xi}_1) = \sum_{D \in M} b_{kD} U^D, \quad k = \overline{2, N}, \quad (13)$$

где $U^D = \xi_1^{d_1} \dot{\xi}_1^{d_2}$; $D = (d_1, d_2)$; M — множество векторов, таких, что $2 \leq d_1 + d_2 \leq S$; d_1, d_2 — натуральные числа.

Введем полиномы (13) в (12) и приравняем коэффициенты при слагаемых $\xi_1^{d_1} \dot{\xi}_1^{d_2}$. В результате получим множество систем линейных алгебраических уравнений. Первая система линейна относительно коэффициентов при вторых степенях, вторая — относительно коэффициентов при третьих степенях и т.д. Последовательно решая полученные системы линейных уравнений, находим нелинейную нормальную форму (13). После того, как нормальная форма (13) получена, представление для ξ_k , $k = 2, \overline{N}$ вводится в первое уравнение системы (10). Таким образом, получаем единственное дифференциальное уравнение, описывающее движение на нормальной форме:

$$\ddot{\xi}_1 = f_1(\xi_1, X_2(\xi_1, \dot{\xi}_1), \dots, X_N(\xi_1, \dot{\xi}_1)) = F_1(\xi_1, \dot{\xi}_1). \quad (14)$$

Для оценки устойчивости периодических движений, система (10) представляется в нормальной форме Коши:

$$\dot{z} = \Phi(z, r).$$

К периодическому движению $z(\tau)$ добавим малое возмущение $u(\tau)$. Эволюция с течением времени малых возмущений описывается уравнениями в вариациях:

$$\dot{u}(\tau) = \frac{\partial \Phi(z, \tau)}{\partial z} u(\tau). \quad (15)$$

Для оценки устойчивости по Ляпунову рассчитывается фундаментальная матрица $X(t)$, которая является решением системы (15) с начальными условиями в виде единичной матрицы $X(0) = E$. Фундаментальная матрица в момент времени T (где T — период колебаний) является матрицей монодромии. По собственным значениям матрицы монодромии (мультипликаторам) делается вывод об устойчивости периодических колебаний [13].

5. Линейные и нелинейные колебания лопасти гидротурбины

Рассмотрим колебания лопасти высоконапорной осевой поворотнолопастной гидротурбины. План лопасти имеет вид кольцевого сектора, один из углов которого закруглен (рис.2).

Для моделирования колебаний лопасти гидротурбины удобно использовать цилиндрическую систему координат с началом в точке O (рис.2).

Так как лопасть жестко закреплена по дуге (рис.2) и свободна по остальному краю, краевые условия имеют следующий вид:

$$w = \frac{\partial w}{\partial r} = 0, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad r = a, \quad -\theta_3 \leq \theta \leq \theta_3.$$

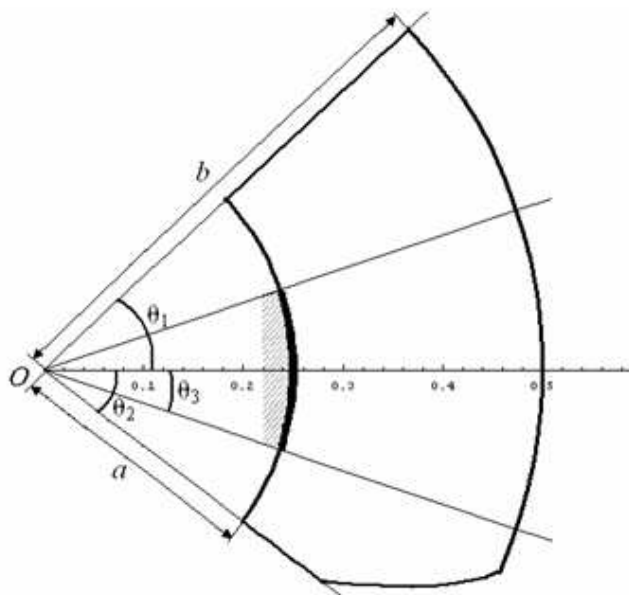


Рис. 2.

Для нахождения собственных форм и частот линейных колебаний воспользуемся методом Релея-Ритца. Потенциальная и кинетическая энергии имеют вид (2), (4), где положено $\alpha = r, \beta = \theta, A = 1, B = r$. Тогда соотношения (3) представляются так:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} = u_r - k_1 w + \frac{1}{2} w_r^2; \varepsilon_{22} = \frac{v_\theta}{r} + \frac{u}{r} - k_2 w + \frac{1}{2} \left(\frac{w_\theta}{r} \right)^2; \varepsilon_{12} = \frac{v_r r - v + u_\theta}{r} + \frac{w_r w_\theta}{r}; \\ \chi_1 = w_{rr}, \chi_2 = \frac{w_{\theta\theta}}{r^2} + \frac{w_r}{r}, \tau = \frac{w_{r\theta} r - w_\theta}{r^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Так как сейчас исследуются линейные колебания, то в выражениях (16) отбрасываются нелинейные слагаемые. Для нахождения собственных форм и частот минимизируем функционал Лагранжа $L = T - \Pi$. Перемещения точек лопасти представим в виде (5).

Прогиб лопасти гидротурбины определяется соотношением (7). При этом координатные функции выбираются так [11, 9]:

$$w_i(r, \theta) = W_l(r, \theta) + W_c(r, \theta) + W_r(r, \theta), \quad (17)$$

где функция W_c состоит из полиномов вида $P_k(y_2)T_m(x)$ при $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, W_l состоит из полиномов вида $P_k(x)T_m(y_1)$ при $\theta_1 \leq \theta \leq -\theta_3$ и равна нулю при $-\theta_3 \leq \theta \leq \theta_2$, W_r состоит из полиномов вида $P_k(x)T_m(y_3)$ при $\theta_3 \leq \theta \leq \theta_2$ и равна нулю при $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_3$; $T_i(y)$ — ортонормированные полиномы Чебышева. Ортонормированные на интервале $[0; 1]$ полиномы $P_k(x)$ при $x = 0$ равны нулю вместе со своей первой производной и имеют вид:

$$P_1(x) = \sqrt{5}x^2, P_2(x) = 6\sqrt{7} \left(-\frac{5}{6}x^2 + x^3 \right), p_3(x) = 84 \left(\frac{15}{28}x^2 - \frac{3}{2}x^3 + x^4 \right), \dots$$

В разложении (17) используются четыре вспомогательные переменные

$$x = \frac{r-a}{b-a}, \quad y_1 = \frac{\theta + \theta_3}{\theta_1 + \theta_3}, \quad y_2 = \frac{\theta - \theta_1}{\theta_2 - \theta_1}, \quad y_3 = \frac{\theta - \theta_3}{\theta_2 - \theta_3},$$

которые принимают значения $0 \leq x \leq 1$ при $a \leq r \leq b$; $1 \geq y_1 \geq 0$ при $\theta_1 \leq \theta \leq -\theta_3$; $0 \leq y_2 \leq 1$ при $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$; $0 \leq y_3 \leq 1$ при $\theta_3 \leq \theta \leq \theta_2$.

Координатные функции для u_i, v_i строятся аналогично функциям $w_i(r, \theta)$:

$$u_i(r, \theta) = U_l(r, \theta) + U_c(r, \theta) + U_r(r, \theta); \quad v_i(r, \theta) = V_l(r, \theta) + V_c(r, \theta) + V_r(r, \theta).$$

Отличие этих разложений от (17) состоит в том, что в месте защемления не требуется равенство нулю производной, поэтому вместо полиномов $P_i(x)$ в $U_c(r, \theta)$ и $V_c(r, \theta)$ используются следующие ортонормированные полиномы:

$$M_1(x) = \sqrt{3}x, \quad M_2(x) = 4\sqrt{5} \left(-\frac{3}{4}x + x^2 \right), \quad M_3(x) = 15\sqrt{7} \left(\frac{2}{5}x - \frac{4}{3}x^2 + x^3 \right), \dots$$

Теперь может быть решена проблема собственных значений (6).

Таблица 1. Результаты расчета собственных частот

	Собственные частоты				
	1	2	3	4	5
$\vartheta = 10$	331.84	487.81	611.95	807.71	852.27
$\vartheta = 15$	320.81	475.4	589.36	781.58	810.1
$\vartheta = 13$ [2]	261	433	526	667	714
Эксперимент [2]	338	453	616	790	873

Численные расчеты проводились для лопасти ПЛ-495, с параметрами $a = 0,25$ м, $b = 0,5$ м, $\theta_1 = -0,65$, $\theta_2 = 0,75$, $\theta_3 = 0,35$, за характерную толщину принято $\bar{h} = 0,05$ м. Параметры θ_i измеряются в радианах. Они могут быть отрицательными, так как традиционно в энергетическом машиностроении угол θ отсчитывается от середины заделки. Форма закругления угла лопасти, а также толщина и кривизны вычислялись на основе технической документации [2]. Результаты расчета собственных частот приведены в Таблице 1. В первой строке таблицы представлены результаты расчета собственных частот колебаний полой оболочкой с числом членов разложения $\vartheta = 10$, а во второй строке представлены результаты расчета с $\vartheta = 15$. Нами проводился анализ сходимости полученных результатов. Для этого результаты с $\vartheta = 15$ сравнивались с данными, полученными для $\vartheta = 21$. Результаты этих расчетов разнятся на 3%. В третьей строке представлены результаты расчета А.П. Филиппова [11], которые производились при $\vartheta = 13$ по пластинчатой модели. В последней строке представлены результаты экспериментов из [11]. Результаты расчетов, представленные в статье, хорошо согласуются с

экспериментальными данными. Более того, результаты этой статьи ближе к экспериментальным данным, чем результаты полученные А.П. Филипповым, так как в данной работе расчеты проводились по уравнениям теории оболочек, а результаты А.П. Филиппова получены на основании уравнений теории пластин.

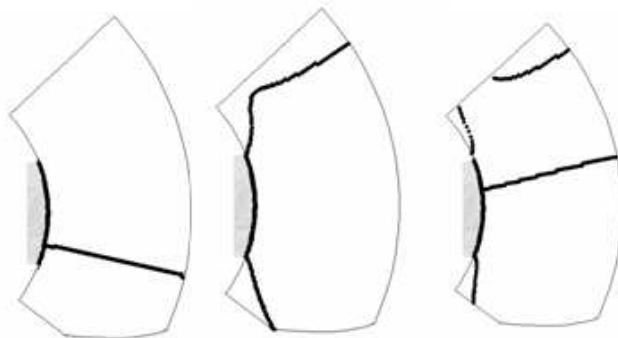


Рис. 3.

На рис.3 приводятся узловые линии первых трех собственных формы линейных колебаний лопасти. Результаты близки с экспериментальными данными, представленным в [11].

В этой статье исследуются свободные колебания лопасти около первой и второй собственных частотах линейных колебаний. Поэтому в разложении (7), (8) сохраняем три члена в разложениях $N = 3$. Тогда нелинейная динамика лопасти описывается системой уравнений вида (10).

Для анализа нелинейной динамики дискретной системы применяется метод нелинейных нормальных форм колебаний, который описан в предыдущем разделе. В результате его применения движение на инвариантном многообразии около первой скелетной кривой описывается дифференциальным уравнением (14), которое можно представить так:

$$\ddot{\xi}_1 = F_1(\xi_1) = -\bar{\omega}_1^2 \xi_1 + c_{11} \xi_1^2 + c_{12} \xi_1^3 + c_{13} \xi_1^5. \quad (18)$$

Для анализа системы (18) применяется метод гармонического баланса. Тогда движение приближенно представим так:

$$\xi_1(\tau) = A_0 + A_1 \cos(\omega\tau). \quad (19)$$

Решение (19) вводится в систему (18) и приравниваются амплитуды при постоянных составляющих и $\cos(\omega\tau)$. В результате приходим к системе двух нелинейных алгебраических уравнений, которые решаются методом Ньютона. Результаты расчета представлены в виде скелетных кривых на рис.4.

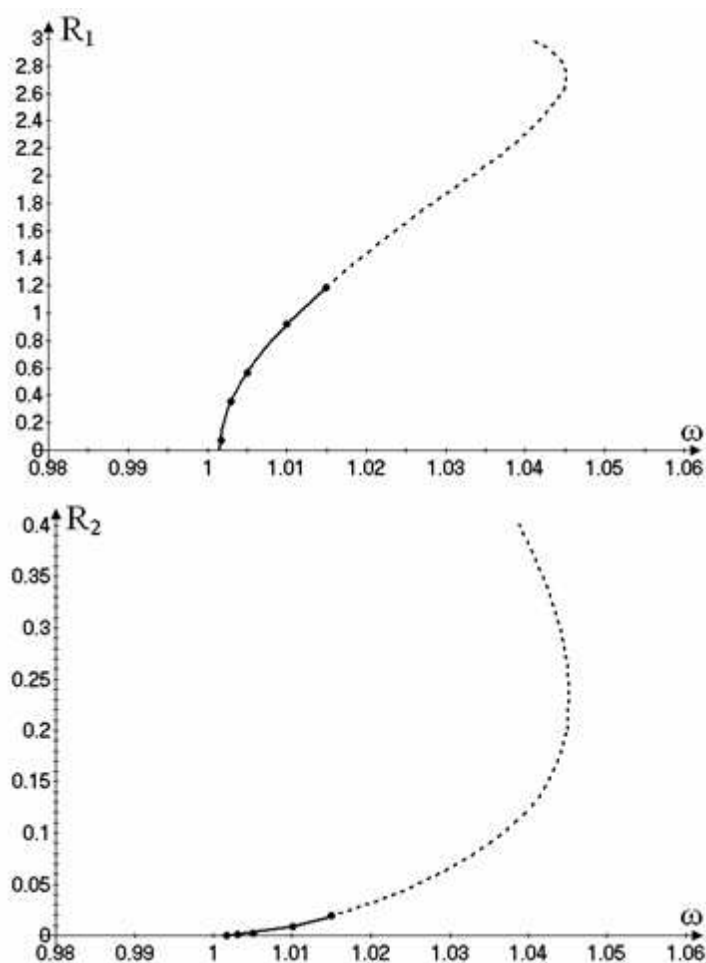


Рис. 4.

На этом рисунке по оси ординат показывается размах колебаний

$$R_i = 0.5(\max \xi_i(\tau) - \min \xi_i(\tau)).$$

Устойчивые колебания на скелетной кривой показаны сплошной линией, а неустойчивые — пунктирной.

Аналогично исследуется вторая нелинейная нормальная форма. Движение на этой форме описывается следующим уравнением:

$$\ddot{\xi}_2 = F_2(\xi_2) = -\bar{\omega}_2^2 \xi_2 + c_{21} \xi_2^2 + c_{22} \xi_1^3 + c_{23} \xi_2^5. \quad (20)$$

Для решения уравнения (20) применялась процедура аналогичная описанной выше. Результаты расчета представлены на скелетной кривой, которая показана на рис.5.

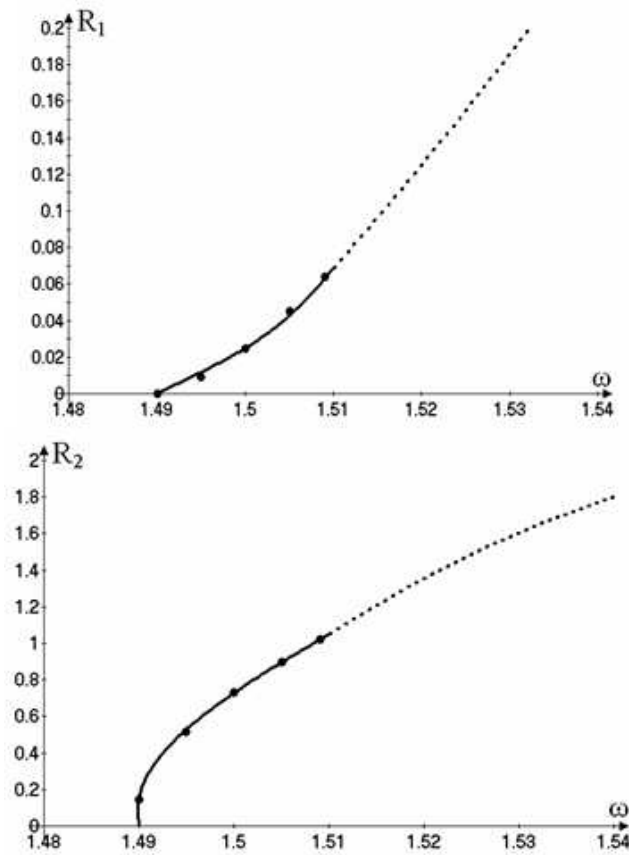


Рис. 5.

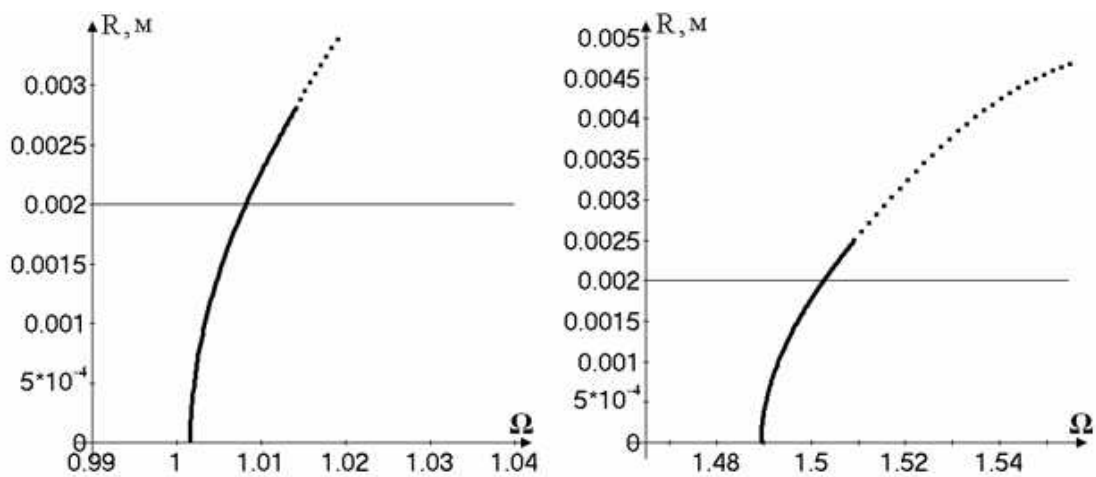


Рис. 6.

Вернемся теперь к размерным перемещениям $w(r, \theta)$. Проведенные исследования показали, что во всех рассмотренных режимах колебаний наибольшую

амплитуду имеет угол оболочки с координатами $r = b$, $\theta = \theta_2$. Амплитудно-частотные характеристика первой нормальной формы приведена на рис.6 (а), а второй нормальной формы на рис.6 (б). На рис.6 по оси ординат показана величина $R = 0,5(\max(w(b, \theta_2, \tau)) - \min(w(b, \theta_2, \tau)))$. Толщина оболочки в этой точке отмечена на рисунке горизонтальной чертой. Как можно видеть из этих графиков, амплитуды устойчивых колебаний соизмеримы с толщиной оболочки в данной точке.

6. Заключение

В статье предложен общий подход для исследования колебаний геометрически нелинейных пологих оболочек, заделанных по части контура. Для получения нелинейных дискретных моделей колебаний пологих оболочек применяется метод уравнений Лагранжа. Для исследования свободных колебаний в статье применяются нормальные формы Шуу-Пьера. Предложенный подход применяется для исследования нелинейных колебаний лопасти высоконапорной осевой поворотнолопастной гидротурбины. Первая и вторая скелетные кривые колебаний лопасти являются жесткими. Свободные колебания с малыми амплитудами являются периодическими. При возрастании амплитуд такие периодические колебания теряют устойчивость по Ляпунову.

Список цитируемых источников

1. Аврамов К.В. Нелинейные нормальные формы колебаний систем с гироскопическими силами / К.В. Аврамов, К. Пьерр, Н.Н. Ширяева. // Доповіді Національної Академії Наук України. — 2006. — Вып.11. — С. 7–10.
2. Грановский С.А. Конструирование и расчет гидротурбин / С.А. Грановский, В.М. Малышев, В.М. Орго. — Л.: Машиностроение, 1974. — 407 с.
3. Григолюк Э.И. Устойчивость оболочек / Э.И. Григолюк, В.В. Кабанов. — М.: Наука 1978. — 344 с.
4. Кантор Б.Я. Расчет лопастей высоконапорных поворотнолопастных гидротурбин на машине "Стрела" / Б.Я. Кантор. // Энергомашиностроение. — 1963. — Вып. 2. — С. 10–13.
5. Кантор Б.Я. Свойства срединной поверхности лопасти осевой гидротурбины / Б.Я. Кантор. // Энергомашиностроение. — 1965. — Вып. 3. — С. 41–43.
6. Кантор Б.Я. Определение частот и форм свободных колебаний консольных пластин в жидкости методом интегральных уравнений / Б.Я. Кантор, В.В. Науменко, Е.А. Стрельникова. // Труды Ин-та прикл. математики и механики. — 2001. — Вып. 6. — С. 44–49.
7. Кантор Б.Я. Гидроупругие колебания лопастей гидротурбин / Б.Я. Кантор, В.В. Науменко, Е.А. Стрельникова, Э.С. Шишкина. // Проблемы машиностроения. — 1990. — Вып. 34. — С. 34–37.
8. Кантор Б.Я. Свободные гидроупругие колебания рабочих колес радиально-осевых гидротурбин / Б.Я. Кантор, Е.А. Стрельникова. // Проблемы машиностроения. — 2002. — Вып. 1. — С. 49–55.

9. Кантор Б.Я. Собственные колебания лопастей осевых поворотлопастных гидротурбин / Б.Я. Кантор, Г.П. Усатенко. // Энергомашиностроение. — 1967. — Вып. 9. — С. 29–30.
10. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко. — М.: ГИТТЛ, 1948. — 460 с.
11. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем / А.П. Филиппов. — М.: Машиностроение, 1970. — 343 с.
12. Явиц С.Н. Исследование частотных характеристик лопастей рабочих колес ПЛ гидротурбин / С.Н. Явиц. // Энергомашиностроение. — 1970. — Вып. 8. — С. 25–28.
13. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения / В.А. Якубович, В.М. Старжинский. — М.: Наука, 1972. — 718 с.
14. Amabili M. Nonlinear vibrations and stability of shells and plates / M. Amabili. — Cambridge: Cambridge University Press, 2008. — 374 p.
15. Shaw S. W., Pierre C. Normal modes for nonlinear vibratory systems / S.W. Shaw, C. Pierre. // Journal of Sound and Vibrations. — 1993. — 164. — P. 58–124.

Получена 12.11.2009