Динамические системы, вып. 20 (2006), 20–26

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 628.543.32

Оптимальное перемещение объекта конечной жесткости по назначенной траектории

А.И. Бохонский, Н.И. Варминская

Севастопольский национальный технический университет,
Севастополь

Аннотация. Исследованы колебания, сопровождающие оптимальное (за минимальное время) перемещение упругого объекта по назначенным траекториям — отрезку прямой и окружности. Показано, что существует класс кососимметричных управлений, которые за минимальное время перемещают упругий объект в конечное состояние абсолютного покоя.

1. Введение

Ряд работ [1–4] посвящен исследованию оптимального перемещения (переносного движения) упругих систем с конечным и бесконечным числом степеней свободы в случае траектории переносного движения в виде отрезка прямой. Данные задачи оптимального переносного движения актуальны для многих областей техники — от земных условий (например, в робототехнике) до космического пространства (монтаж крупногабаритных нежестких объектов в состоянии невесомости).

Несомненна важность таких задач для робототехники. С уменьшением массы манипулятора уменьшается его жесткость, но при использовании специального оптимального управления при этом снижаются энергетические затраты на траспортировку объектов и устраняются колебания в конце движения [1].

Связь между массой и жесткостью манипулятора можно проиллюстрировать на простом примере изгиба руки, схема которой изображена на рис. 1.

Общая масса руки (без транспортируемого объекта) равна: $m = \pi d^2 \gamma l/4$, где d — диаметр поперечного сечения; γ — удельный вес материала руки; l — длина. Из выражения прогиба в точке B следует зависимость для обобщенного коэффициента жесткости:$c = 3EJ_z/l^3$, где EJ_z — жесткость на изгиб (E — модуль упругости первого рода, J_z – осевой момент инерции поперечного сечения). Если, например, $J_z = \pi d^4/64$ (для сплошного поперечного сечения), то $c = k_* m^2$, где $k_* = 3E/4\pi\gamma^2 l^5$; $l = const$. С уменьшением массы руки падает ее жесткость, что влечет за собой необходимость использования специальных мер для снижения отрицательных последствий податливости руки [1,3].

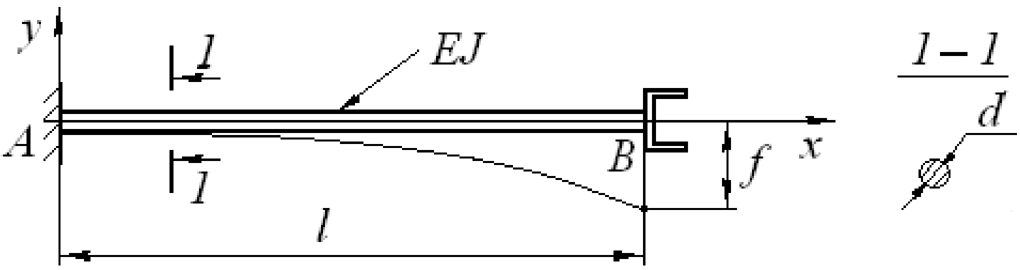


Рис. 1. Схема телескопического манипулятора.

При оптимальном переносном движении упругого объекта [1] единичной массы энергия, затраченная на управляемое движение, вычисляется так:

$$A_1 = 2\int_0^{T_*/2} u_e(t)\nu_e(t)dt = \frac{L^2p^2}{\pi^2},$$

где $\nu_e(t) = Lp(1-\cos pt)/2\pi$ — скорость переносного движения; $u_e(t) = Lp^2\sin pt/2\pi$ — управление (ускорение в переносном движении);$T_* = 2\pi/p$, T_* — общее время оптимального движения; L — общее перемещение в переносном движении; $p = k/n$, где k — частота колебаний упругого объекта ($k^2 = c/m$, где m — масса объекта); $n = 2, 3, 4, \ldots$ Общая работа управления (при $n = 2$) равна:

$$A = 4mL^2/T_*^2 = \sqrt{c/k_*}\cdot 4L^2/T_*^2 = 4\sqrt{c/k_*}\cdot V_{cp}^2. \tag{1.1}$$

Из (1.1) следует, что с ростом массы или жесткости увеличиваются энерегетические затраты на управление; энергия пропорциональна квадрату средней скорости $V_{cp} = L/T_*$.

В данной статье анализ оптимального перемещения деформируемых объектов дан на примерах.

2. Оптимальное движение упругого объекта по отрезку прямой

Обобщая результаты предшествующих исследований [1–4], можно сформулировать следующее утверждение.

Всякому кососимметричному оптимальному управлению переносным движением упругого объекта с одной степенью свободы соответствует ***минимальное*** *время движения, за которое осуществимо перемещение объекта из начального в конечное состояния абсолютного покоя.*

Пусть известна частота собственных колебаний k упругой системы с одной степенью свободы (период $T = 2\pi/k$) и задано оптимальное кососимметричное управление переносным движением (ускорение основания упругого объекта как функция времени), а требуется найти такое минимально возможное время управляемого движения T_*, при котором после отключения управления колебания объекта в конце движения отсутствуют (при $t \geq T_*$). Как известно, для времени движения $t \geq T_*$ в случае свободных незатухающих колебаний перемещение (в относительном движении) описывается выражением:

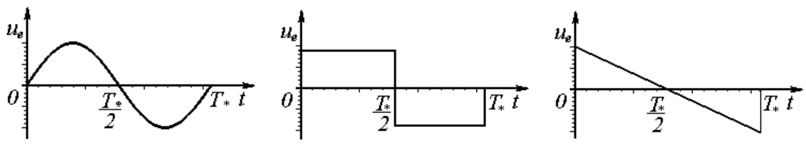
$$x_r(t) = \frac{\nu_*}{k} \sin kt + x_* \cos kt = B \sin(kt + \alpha),$$

где $B = \sqrt{(\nu_*/k)^2 + x_*^2}$, $\alpha = \mathrm{arctg}(x_* k/\nu_*)$. Свободные колебания при $t > T_*$ отсутствуют тогда и только тогда, когда $B = 0$, т.е. в момент времени $t = T_*$ скорость $\nu_* = 0$ и перемещение $x_* = 0$. Равенство нулю скорости и перемещения упругого объекта в момент $t = T$ с одновременным отключением управления — необходимые и достаточные условия полного исключения колебаний (при $t > T$). Записывая выражение для перемещения и скорости относительного движения на участке управляемого движения $T_* \geq t \geq 0$ и приравнивая их нулю при $t = T_*$, находим моментные соотношения, из которых определяется T_* или $n = T_*/T$, где T — период свободных колебаний системы. Итак, если $\nu_* = 0$ и $x_* = 0$, то к моменту времени $t = T_*$ достигается относительный покой, а покой переносного движения заранее обеспечен принимаемым оптимальным управлением переносным движением.

Моментальные соотношения, которые одновременно равняются нулю в конце движения при нулевых начальных условиях ($t = 0$, $x_r(0) = 0$ и $\dot{x}_r(0) = 0$), имеют следующий вид:

$$\int_0^{T_*} U_e(t) \cos ktdt = 0, \quad \int_0^{T_*} U_e(t) \sin ktdt = 0 \tag{2.1}$$

Справедливость данных рассуждений проверена на примерах трех типов кососимметричных управлений, графики которых изображены на рис. 2.



(а) (б) (в)

Рис. 2. Графики кососимметричных управлений переносным движением: (a) $u_e(t) = 2\pi L \sin pt/T_*^2 \cdot (H(t) - H(t - T))$; (b) $u_e(t) = A(H(t) - 2H(t - T_*/2) + H(t - T_*)$; (c) $u_e(t) = 6L(1 - 2t/T_*)/T_*^2 \cdot (H(t) - H(t - T))$, где $H(t)$ — функция Хевисайда.

Случай 1. Если используется управление ***a***, то с учетом $p = k/n$ и $T_* = 2\pi/p$ моментные соотношения (2.1) преобразуются к таким трансцендентным уравнениям:

$$cos 2n\pi - 1 = 0, \qquad \sin 2n\pi = 0, \tag{2.2}$$

которые выполняются одновременно при $n = 2, 3, \ldots$, т.е. упругие колебания объекта при $t \geq T_*$ отсутствуют.

Случай 2. При управлении ***б*** оба моментных соотношения приводятся к одному уравнению $\cos n\pi - 1 = 0$ и колебания осциллятора в конце движения отсутствуют, когда $n = 2, 4, 6 \ldots$, т. е. $T_* = 4\pi/k, 8\pi/k, 16\pi/k, \ldots$, где k – частота собственных колебаний оптимально перемещаемого упругого объекта с одной степенью свободы (осциллятора).

Случай 3. Для управления ***в*** моментные соотношения преобразуются к системе трансцендентных уравнений

$$-2\sin kT_* + kT_*(1+\cos kT_*) = 0, \quad 2\cos kT_* + kT_*\sin kT_* - 2 = 0,$$

которые, в результате дальнейших преобразований, сводятся к одному уравнению вида:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{kT_*}{2}\right) - \frac{kT_*}{2} = 0 \tag{2.3}$$

Уравнение (2.3) при $T_* = nT = n \cdot 2\pi/k$ записывается так:

$$\operatorname{tg}(n\pi) - n\pi = 0 \tag{2.4}$$

Второй корень уравнения (2.4) $n_2\pi = 4.4934$, т. е. $n_2 = 1.4303$. Таким образом, наименьшее время оптимального движения для уравнения ***в*** определяются $T_* = \frac{2\pi}{k}n_2$, а дальше справедлива следующая периодичность $T_{*_s} = T_* + \frac{2\pi s}{k}$, где $s = 1, 2, \ldots$

Численный пример (случай ***б***). Исходные данные: $L = 1$м; $T = 4\pi$ с; $k = 1$ с$^{-1}$; $A = 4\pi/T^2$. Графики перемещения и скорости в переносном движении изображены на рис. 3, а графики перемещения, скорости и ускорения в относительном движении — на рис. 4. Из графиков следует, что с отключением управления одновременно наступает покой переносного и относительного движений, т.е. абсолютный покой, который имеет место для любого из кососимметричных управлений (рис. 2).

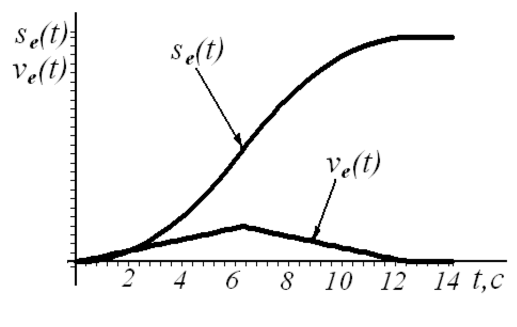


Рис. 3. Графики перемещения $s_e(t)$ и скорости $\nu_e(t)$ в переносном оптимальном движении (случай б).

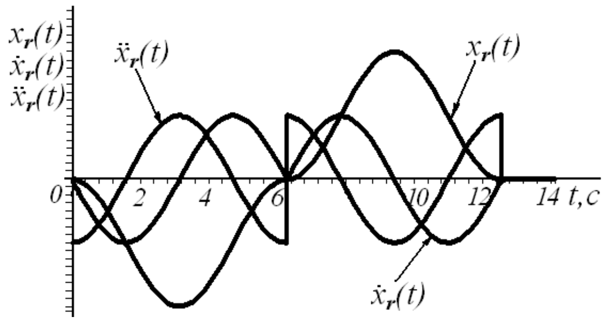


Рис. 4. Графики перемещения $x_r(t)$, скорости $\dot{x}_r(t)$ и ускорения $\ddot{x}_r(t)$ в относительном движении.

Решение уравнения относительного движения

$$\frac{d^2x_r}{dt^2} + k^2x_r = -A(H(t) - 2H(t-T/2) + H(t-T))$$

найдено с использованием Maple; оно весьма громоздко и поэтому здесь не приводится. Перемещение в переносном оптимальном движении равно:

$$s_e(t) = B\lfloor H(t)t2/2 - H(t-T/2)t^2 - H(t-T/2)T^2/4 + H(t-T/2)tT\rfloor - \\ - B\lfloor H(t-T)t^2/2 + H(t-T)T^2/2 - H(t-T)tT - H(-T)T^2/4\rfloor,$$

где $B = const$.

3. Оптимальное движение упругого объекта по окружности

Решена задача оптимального перемещения упругого объекта (рис. 5) по отрезку окружности.

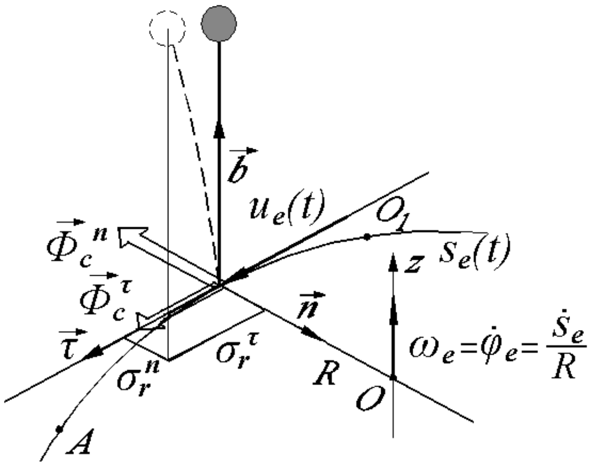


Рис. 5. Схема оптимального движения упругого осциллятора по окружности радиуса R.

Без учета сопротивления движению дифференциальное уравнение динамики относительного движения упругого объекта с одной степенью свободы (по отношению к осям естественного трехгранника, движущимся вместе с основанием упругого объекта) в векторном виде записывается так:

$$m\vec{a}_r = \vec{\Phi}_e^\tau + \vec{\Phi}_e^n + \vec{\Phi}_e + \vec{F}_{ynp}, \tag{3.1}$$

где $\vec{a}_r$ — относительное ускорение; $\vec{\Phi}_e^\tau = -m\vec{a}_e{}^\tau, \vec{\Phi}_e^n = -m\vec{a}_e{}^n$ – составляющие силы инерции переносного движения; $\vec{\Phi}_c = -m2\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r$ — сила инерции Кориолиса; $\vec{F}_{ynp}$ — сила упругости. В проекциях на касательную и нормаль уравнение (3.1) превращается в систему нелинейных дифференциальных уравнений:

$$m\frac{d^2\sigma_r^\tau}{dt^2} = -c\sigma_r^\tau + 2m\dot{\varphi}_e\dot{\sigma}_r^n - mu_e, \quad m\frac{d^2\sigma_r^n}{dt^2} = -c\sigma_r^n - 2m\dot{\varphi}_e\dot{\sigma}_r^\tau - \frac{m\left(\dot{s}_e + \dot{\sigma}_r^\tau\right)^2}{R + \sigma_r^n}, \tag{3.2}$$

где $\sigma_r^\tau, \sigma_r^n$ — перемещения сосредоточенной массы осциллятора по касательной и внутренней нормали, обусловленные упругими деформациями объекта; $\omega_e =$

$\dot{\varphi}_e = \dot{s}_e/R$, где $\dot{s}_e = \nu_e = ds_e/dt, s_e(t)$ — дуговая координата, отсчитываемая от точки O_1; $\dot{\sigma}_r^\tau$, $\dot{\sigma}_r^n$ — скорости сосредоточенной массы осциллятора в относительном движении; принято [1] управление вида $u_e(t) = Lp^2 \sin pt/2\pi$, где L — длина окружности O_1A (рис. 5).

В случае малых колебаний объекта по сравнению с радиусом окружности R (в знаменателе второго уравнения можно положить $\sigma_r^n = 0$, а в числителе пренебречь $\dot{\sigma}_r^\tau$) система (3.2) становится линейной. Если пренебречь силами инерции Кориолиса, то (3.2) распадается на независимые линейные уравнения, имеющие точные аналитические решения:

$$\ddot{\sigma}_r^\tau + k^2\sigma_r^\tau = -u_e, \quad \ddot{\sigma}_r^n + k^2\sigma_r^n = -\dot{s}_e^2/R, \tag{3.3}$$

где $k = \sqrt{c/m}$, c — коэффициент жесткости упругого осциллятора.

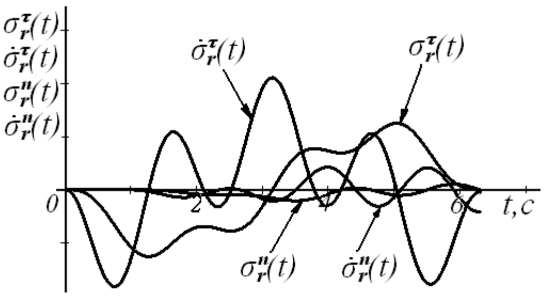


Рис. 6. Графики относительного движения (перемещений и скоростей) с учетом силы инерции Кориолиса.

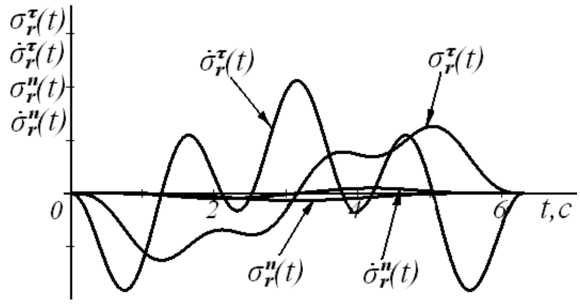


Рис. 7. Графики $\sigma_r^\tau(t)$, $\dot{\sigma}_r^\tau(t)$, $\sigma_r^n(t)$, $\dot{\sigma}_r^n(t)$ без учета силы инерции Кориолиса.

Для общего случая движения система уравнений (3.2) интегрировалась методом Рунге-Кута в MathCad. Графики относительного движения (перемещений и скоростей) изображены на рис. 6 при следующих исходных данных: $L = 2$м; $R = 10$м; $p = 1c^{-1}; k = 4c^{-1}$. Из графика функции $\dot{\sigma}_r^n(t)$ видно, что в конечный момент времени скорость в радиальном направлении не равна нулю. Без учета силы инерции Кориолиса графики $\sigma_r^\tau(t)$, $\dot{\sigma}_r^\tau(t)$, $\sigma_r^n(t)$, $\dot{\sigma}_r^n(t)$ изображены на рис. 7. На основании графиков следует вывод, что в конце движения наступает покой (колебания отсутствуют). Общие выводы следуют из ряда численных экспериментов.

4. Выводы

1. При достаточно большом радиусе R его изменение в связи с колебаниями объекта в радиальном направлении ($R + \sigma_r^n(t) \cong R$) практически не влияет на динамику оптимального переносного движения.

2. При $R \longrightarrow \infty$ характер движения асимптотически приближается к оптимальному движению упругого объекта по отрезку прямой. Для малых радиусов траектории движения ($R \longrightarrow 0$) усиливается отклонение от идеального управляемого движения, усиливаются колебания в радиальном направлении.

3. Если не учитывать силы инерции Кориолиса ($\vec{\Phi}_e \cong 0$) и пренебречь $\dot{\sigma}_r^\tau$ при расчете тангенциальной скорости, т. е. $\nu_e = \dot{s}_e + \dot{\sigma}_r^\tau \cong \dot{s}_e$, то относительное движение распадается на два независимых колебательных процесса, из которых следует, что в конце движения наступает абсолютный покой, характерный для исследованного оптимального движения по отрезку прямой.

4. В общем случае оптимального движения упругой системы по окружности для обеспечения абсолютного покоя в конце движения необходимо, используя закон перемещения линейной системы как эталонный на основании решения обратной задачи динамики найти два управления (в относительном движении): управление, направленное по касательной к траектории; нормальное управление, подавляющее колебания упругого объекта в радиальном направлении.

Рассмотренный подход позволяет решить задачи поиска комбинаций оптимальных управлений для обеспечения абсолютного или относительного покоя в конце движения упругого объекта по произвольной пространственной кривой.

Список цитируемых источников

1. *Бохонский А.И.* Оптимальное переносное движение упругих систем // Вестн. СевГТУ. Сер. Механика, энергетика, экология. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2002. – Вып. 38. – С. 33–38.
2. *Бохонский А.И., Варминская Н.И.* Оптимальное движение объектов малой жестости в состоянии невесомости // Оптимизация производственных процессов: Сб. научн. тр. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2003. – Вып. 6. – С. 42–47.
3. *Бохонский А.И., Варминская Н.И.* Некоторые актуальные задачи механики манипуляторов минимальной массы // Прогрессивные технологии и системы машиностроения: Междунар. сб. научн. тр. – Донецк: Изд-во ДонНТУ, 2003. – Вып.25. – С. 34–38.
4. *Бохонский А.И., Варминская Н.И.* Оптимальное переносное движение упругих объектов // Динамический системы: Межвед. научн. сб. – Симферополь: ТНУ, 2005. – Вып.19. – С. 3–10.

Получено 21.03.2006