Динамические системы, том 3(31), No. 3-4, 201–214

УДК 517.98+517.52

Симметрические компактные субдифференциалы второго порядка и их применение к рядам Фурье

И. В. Баран

Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 95007. *E-mail: matemain@mail.ru*

Аннотация. В статье рассмотрено обобщение на симметрический случай понятия компактного субдифференциала (K-субдифференциала) второго порядка. Излагается основной аппарат теории симметрических K-субдифференциалов второго порядка, включая симметрический аналог теорем Шварца. Это позволяет обобщить классический метод Римана суммирования рядов Фурье и получить некоторые приложения.

Ключевые слова: K-предел, K-субдифференциал, симметрическая производная, симметрический K-субдифференциал, K-условие Шварца, ослабленное K-условие Шварца, K-метод Римана.

Введение

Одним из основных понятий выпуклого и негладкого анализа является субдифференциал (см., например, [8], [7], [18], [13], [15]). Субдифференциал функции — одно из обобщений понятия производной, первоначально возникшее для вещественных выпуклых функций. Кроме того, субдифференциал по своим свойствам во многом подобен обычной производной ([5], [16], [20]) и находит многочисленные обобщения и приложения, большей частью в теории оптимизации и дифференциальных уравнениях ([4], [3], [14]).

Недавно И. В. Орловым было введено понятие компактного субдифференциала или K-субдифференциала для отображений в локально выпуклые пространства (ЛВП), определяемое следующим образом

$$\partial_K f(x) = K\text{-}\lim_{\delta\to 0}\left(\overline{co}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\ \Big|\ 0<|h|<\delta\right\}\right),$$

где $\overline{co}$ — замкнутая выпуклая оболочка множества. K-предел означает равномерное топологическое стягивание убывающих систем замкнутых выпуклых множеств под знаком предела к их компактному пересечению.

Понятие K-субдифференциала было исследовано и нашло успешное применение в совместных работах И. В. Орлова и Ф. С. Стонякина к решению проблемы Радона-Никодима для интеграла Бохнера ([12], [24], [23], [22]). В дальнейшем понятие K-субдифференциала было перенесено на случай векторного аргумента в работах И. В. Орлова и З. И. Халиловой, которое нашло значимые применения в решении вариационных задач с негладким интегрантом (см. [10]).

Недавно в работе [1] был рассмотрен вопрос об обобщении понятия K-субдифференциала на симметрический случай. А именно, в исходной конструкции мы заменяем обычное разностное отношение $f(x+h)-f(x)/h$ на симметрическое отношение первого порядка $f(x+h)-f(x-h)/2h$. Стало быть, обобщается понятие симметрической, а не обычной, производной. В месте с тем, как и в случае обычного K-субдифференциала, симметрический K-субдифференциал первого порядка определяется как K-предел частных симметрических субдифференциалов:

$$\widehat{\partial}_K f(x) = K\text{-}\lim_{\delta\to 0} \overline{co}\Big\{ \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \;\Big|\; 0<h<\delta \Big\}.$$

В работе было показано, что симметрический K-субдифференциал является обобщением не только обычной производной, но и обычного K-субдифференциала. При этом симметрическоя оценка, вообще говоря, более точная: $\widehat{\partial}_K f(x) \subset \partial_K f(x)$.

Данная статья посвящена исследованию симметрических компактных субдифференциалов второго порядка. В исходной конструкции мы заменяем обычное разностное отношение на симметрическое отношение второго порядка. Таким образом, обобщается уже вторая симметрическая производная, путем перехода от обычной второй производной ко второму симметрическому субдифференциалу. Целью исследования является обобщение классического метода Римана-Шварца обобщенного суммирования рядов Фурье.

1. Симметрические K-субдифференциалы второго порядка

Всюду далее будем рассматривать отображение $f : \mathbb{R} \to E$, определенное в некоторой окрестности $U(x)$ точки $x \in \mathbb{R}$, где E — произвольное отделимое вещественное ЛВП. Для перехода к понятию симметрического субдифференциала второго порядка напомним определение второй симметрической производной.

Определение 1. *Второй симметрической производной* отображения f в точке x называется предел

$$\widehat{\partial}^2 f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta^2 f(x,2h)}{4h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+2h)-2f(x)+f(x-2h)}{4h^2}.$$

Перейдем к основному определению.

Определение 2. *Частным выпуклым симметрическим субдифференциалом второго порядка* отображения f в точке x назовем

$$\widehat{\partial}^2_{co} f(x,\delta) = \overline{co}\Big\{ \frac{f(x+2h)-2f(x)+f(x-2h)}{4h^2} \;\Big|\; 0<h<\delta \Big\}.$$

Если существует K-предел $\widehat{\partial}^2_K f(x) = K\text{-}\lim\limits_{\delta\to 0} \widehat{\partial}^2_{co} f(x,\delta)$, назовем его *симметрическим K-субдифференциалом второго порядка* отображения f в точке x.

Нетрудно убедиться, что справедлива

Теорема 1 (Регулярность)**.** *Обычная симметрическая производная $\widehat{\partial}^2 f(x)$ существует тогда и только тогда, когда существует одноточечный второй симметрический K-субдифференциал $\widehat{\partial}^2_K f(x)$ и при этом выполняется равенство*

$$\widehat{\partial}^2_K f(x) = \Big\{ \widehat{\partial}^2 f(x) \Big\}. \tag{1.1}$$

Доказательство. Пусть существует обычная симметрическая производная второго порядка $\widehat{\partial}^2 f(x)$. По определению $\widehat{\partial}^2 f(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+2h) - 2f(x) + f(x-2h)}{4h^2}$. Для любой замкнутой выпуклой окрестности нуля $U \subset E$ $\exists\,\delta = \delta_U > 0$ $(0 < h < \delta_U)$: $\dfrac{\Delta^2 f(x,2h)}{4h^2} \in \widehat{\partial}^2 f(x) + U$. Отсюда следует вложение $\left\{\dfrac{\Delta^2 f(x,2h)}{4h^2} \;\middle|\; 0 < h < \delta\right\} \subset \widehat{\partial}^2 f(x) + U$ и поэтому $\overline{co}\left\{\dfrac{\Delta^2 f(x,2h)}{4h^2} \;\middle|\; 0 < h < \delta\right\} \subset \widehat{\partial}^2 f(x) + U$, в силу замкнутости и выпуклости U, т. е. $\widehat{\partial}^2_{co} f(x,\delta) \subset \widehat{\partial}^2 f(x) + U$. Переходя к K-пределу, получаем $\widehat{\partial}^2_K f(x) \subset \left\{\widehat{\partial}^2 f(x)\right\}$. Так как $\left\{\widehat{\partial}^2 f(x)\right\}$ — одноточечное множество, значит, $\widehat{\partial}^2_K f(x) = \left\{\widehat{\partial}^2 f(x)\right\}$.

С другой стороны, пусть $\widehat{\partial}^2_K f(x) = \{y\}$ — одноточечное множество. Поскольку $\widehat{\partial}^2_K f(x) = K\text{-}\lim_{\delta\to 0} \widehat{\partial}^2_{co} f(x,\delta)$, то из определения K-предела следует, что $\forall\,\varepsilon > 0$ $\exists\,\delta = \delta(\varepsilon)$: $\widehat{\partial}^2_{co} f(x,\delta) = \overline{co}\left\{\dfrac{\Delta^2 f(x,2h)}{4h^2} \;\middle|\; 0 < h < \delta\right\} \subset (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$. Тогда тем более $\dfrac{\Delta^2 f(x,2h)}{4h^2} \in (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$ при $h < \delta(\varepsilon)$. В результате существует $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\Delta^2 f(x,2h)}{4h^2} = y$, т. е. $y = \left\{\widehat{\partial}^2 f(x)\right\}$ и выполняется равенство (1.1). □

Таким образом, второй симметрический субдифференциал можно рассматривать как обобщение обычной второй симметрической производной. В вещественнозначном случае $\widehat{\partial}^2_K f(x)$ есть компактный отрезок, концами которого являются нижняя и верхняя вторые симметрические производные.

Теорема 2. *Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет симметричный K-субдифференциал второго порядка в точке $x \in [a,b]$, т. е. существует $\widehat{\partial}^2_K f(x)$, тогда и только тогда, когда в этой точке конечны верхняя и нижняя симметрические производные:*
$-\infty < \widehat{\underline{\partial}^2} f(x) \leqslant \widehat{\overline{\partial}^2} f(x) < +\infty$; *при этом*

$$\widehat{\partial}^2_K f(x) = [\widehat{\underline{\partial}^2} f(x); \widehat{\overline{\partial}^2} f(x)]. \tag{1.2}$$

Доказательство. По определению верхней и нижней симметрических производных,

$$\widehat{\underline{\partial}^2} f(x) = \varliminf_{h\to +0} \frac{f(x+2h) - 2f(x) + f(x-2h)}{4h^2},$$

$$\widehat{\overline{\partial}^2} f(x) = \varlimsup_{h\to +0} \frac{f(x+2h) - 2f(x) + f(x-2h)}{4h^2}.$$

1) Пусть выполнено $-\infty < \widehat{\underline{\partial}^2} f(x) \leqslant \widehat{\overline{\partial}^2} f(x) < +\infty$ и $\widetilde{B} = [\widehat{\underline{\partial}^2} f(x), \widehat{\overline{\partial}^2} f(x)]$; $U_\varepsilon = [-\varepsilon, \varepsilon]$. По свойствам $\varliminf$ и $\varlimsup$, $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0$ $(0 < h \leqslant \delta)$:

$$\widehat{\underline{\partial}^2} f(x) - \varepsilon \leqslant \frac{f(x+2h) - 2f(x) + f(x-2h)}{4h^2} \leqslant \widehat{\overline{\partial}^2} f(x) + \varepsilon.$$

На этом основании $\widehat{\partial}^2_{co} f(x,\hat{\delta}) = \overline{co}\left\{\dfrac{\Delta^2 f(x,2h)}{4h^2} \;\middle|\; 0 < h < \delta\right\} \subset [\widehat{\underline{\partial}^2} f(x) - \varepsilon; \widehat{\overline{\partial}^2} f(x) + \varepsilon]$ при $\hat{\delta} \leqslant \delta$, т. е. $\widehat{\partial}^2_{co} f(x,\delta) \subset \widetilde{B} + U_\varepsilon$. Переход к K-пределу с использованием признака Вейерштрасса для K-пределов ([10], [1]) дает существование $\widehat{\partial}^2_K f(x) \subset [\widehat{\underline{\partial}^2} f(x) - \varepsilon; \widehat{\overline{\partial}^2} f(x) + \varepsilon]$.

При $\varepsilon \to 0$ имеем:

$$\widehat{\partial}^2_K f(x) \subset [\widehat{\underline{\partial}^2} f(x); \widehat{\overline{\partial^2}} f(x)]. \tag{1.3}$$

2) Обратно, пусть $\exists\, \widehat{\partial}^2_K f(x)$ и $\widehat{\partial}^2_K f(x) = [y_1; y_2]$. Тогда $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$:
$\widehat{\partial}^2_{co} f(x,\delta) = \overline{co}\Big\{ \dfrac{\Delta^2 f(x,2h)}{4h^2} \ \Big|\ 0 < h < \delta \Big\} \subset (y_1 - \varepsilon; y_2 + \varepsilon)$. Тем более
$y_1 - \varepsilon < \dfrac{\Delta^2 f(x,2h)}{4h^2} < y_2 + \varepsilon, \quad 0 < h < \delta$. Поэтому, переходя к $\underline{\lim}$ и $\overline{\lim}$ получаем существование конечных верхней и нижней вторых симметрических производных:
$y_1 - \varepsilon \leqslant \widehat{\underline{\partial}^2} f(x) \leqslant \widehat{\overline{\partial^2}} f(x) \leqslant y_2 + \varepsilon \quad \forall\, \varepsilon > 0$. Из этого вытекает $[\widehat{\underline{\partial}^2} f(x); \widehat{\overline{\partial^2}} f(x)] \subset [y_1; y_2]$, т. е.

$$[\widehat{\underline{\partial}^2} f(x); \widehat{\overline{\partial^2}} f(x)] \subset \widehat{\partial}^2_K f(x). \tag{1.4}$$

Из включений (1.3) и (1.4) следует равенство (1.2). □

Рассмотрим случай, когда функция f дифференцируема в точке x.

Теорема 3. *Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дифференцируема в окрестности точки x, а f' симметрически K-субдифференцируема в точке x. Тогда существует $\widehat{\partial}^2_K f(x)$ и верна оценка:*

$$\widehat{\partial}^2_K f(x) \subset \widehat{\partial}_K (f')(x) = [\widehat{\underline{\partial}}(f')(x); \widehat{\overline{\partial}}(f')(x)].$$

Доказательство. Применяя теорему Коши по переменной h, имеем:

$$\frac{f(x+2h) - 2f(x) + f(x-2h)}{4h^2} = \frac{2f'(x+2\theta h) - 2f'(x-2\theta h)}{8\theta h} = \frac{f'(x+2\theta h) - f'(x-2\theta h)}{4\theta h}$$

$(0 < \theta < 1)$. Отсюда

$$\overline{co}\Big\{ \frac{\Delta^2 f(x,2h)}{4h^2} \ \Big|\ 0 < h < \delta \Big\} = \overline{co}\Big\{ \frac{\Delta^1 f'(x,2\theta h)}{2(2\theta h)} \ \Big|\ 0 < \theta h < \delta \Big\} \subset$$
$$\subset \overline{co}\Big\{ \frac{\Delta^1 f'(x,k)}{2k} \ \Big|\ 0 < k < \delta \Big\}.$$

Переходим к K-пределу с использованием признака Вейерштрасса и получаем: $\widehat{\partial}^2_K f(x) \subset \widehat{\partial}_K (f')(x)$. В вещественном случае в работе [1] была получена формула: $\widehat{\partial}_K (f')(x) = [\widehat{\underline{\partial}}(f')(x); \widehat{\overline{\partial}}(f')(x)]$. Стало быть, $\widehat{\partial}^2_K f(x) \subset \widehat{\partial}_K (f')(x) = [\widehat{\underline{\partial}}(f')(x); \widehat{\overline{\partial}}(f')(x)]$. □

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Положим $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$, где функция $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ при $x > 0$; $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ при $x < 0$; $f(0) = 0$. Тогда $\varphi(x)$ всюду дифференцируема и $\varphi'(x) = f(x)$. Значит, как было показано ([1], пример 1)

$$\widehat{\underline{\partial}} \varphi'(0) = \widehat{\underline{\partial}} f(0) = -\frac{1}{2}, \quad \widehat{\overline{\partial}} \varphi'(0) = \widehat{\overline{\partial}} f(0) = \frac{1}{2}.$$

Отсюда по теореме 3 получаем $\widehat{\partial}_K \varphi(0) = [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$.

Приведем пример вычисления второго симметрического субдифференциала, в случае, когда второй симметрической производной не существует.

Пример 2. Положим $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ при $x > 0$; $f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x}$ при $x < 0$; $f(0) = 0$. Тогда имеем:

$$\Delta^2 f(0,2h) = f(2h) - 2f(0) + f(-2h) = (2h)^2 \sin \frac{1}{2h} + (-2h)^3 \sin(-\frac{1}{2h}) =$$
$$= (4h^2 + 8h^3) \sin \frac{1}{2h},\ h > 0.$$

$$\frac{\Delta^2 f(0,2h)}{4h^2} = \frac{(4h^2+8h^3)\sin\frac{1}{2h}}{4h^2} = (1+2h)\sin\frac{1}{2h}.$$

$$\widehat{\underline{\partial}^2} f(0) = \varliminf_{h\to+0} \frac{\Delta^2 f(0,2h)}{4h^2} = -1, \quad \widehat{\overline{\partial}^2} f(0) = \varlimsup_{h\to+0} \frac{\Delta^2 f(0,2h)}{4h^2} = 1.$$

В силу теоремы 2, существует $\widehat{\partial}^2_K f(0) = [-1,1]$.

Одним из наиболее важных свойств как обычного K-субдифференциала (см. [11], [17]), так и симметрических субдифференциалов первого и второго порядков, является субаддитивность.

Теорема 4 (Субаддитивность)**.** *Пусть* $f, g : \mathbb{R} \to E$, *где* E *— произвольное вещественное отделимое ЛВП. Если отображения* f *и* g *симметрически* K*-субдифференцируемы в точке* x, *то отображение* $f + g$ *также симметрически* K*-субдифференцируемо в точке* x, *причем*
$$\widehat{\partial}^2_K(f+g)(x) \subset \widehat{\partial}^2_K f(x) + \widehat{\partial}^2_K g(x). \tag{1.5}$$

Доказательство. Преобразуем симметрическое разностное отношение для $f + g$:

$$\frac{\Delta^2(f+g)(x,2h)}{4h^2} = \frac{\Delta^2 f(x,2h)}{4h^2} + \frac{\Delta^2 g(x,2h)}{4h^2}.$$

Из этого следует включение:

$$\widehat{\partial}^2_{co}(f+g)(x,\delta) = \overline{co}\Big\{\frac{\Delta^2 f(x,2h)}{4h^2} + \frac{\Delta^2 g(x,2h)}{4h^2} \ \Big|\ 0 < h < \delta\Big\} \subset$$

$$\subset \overline{co}\Big\{\frac{\Delta^2 f(x,2h)}{4h^2} \ \Big|\ 0 < h < \delta\Big\} + \overline{co}\Big\{\frac{\Delta^2 g(x,2h)}{4h^2} \ \Big|\ 0 < h < \delta\Big\} \subset \tag{1.6}$$

$$\subset \overline{co\Big\{\frac{\Delta^2 f(x,2h)}{4h^2} \ \Big|\ 0 < h < \delta\Big\} + co\Big\{\frac{\Delta^2 g(x,2h)}{4h^2} \ \Big|\ 0 < h < \delta\Big\}}.$$

Далее, для произвольной окрестности нуля $U \subset E$ выберем замкнутую выпуклую окрестность нуля U' так, чтобы $U' + U' \subset U$, и $\delta_{U'} > 0$ такое, чтобы при $0 < \delta < \delta_{U'}$ выполнялись включения: $\widehat{\partial}^2_{co} f(x,\delta) \subset \widehat{\partial}^2_K f(x) + U'$, $\quad \widehat{\partial}^2_{co} g(x,\delta) \subset \widehat{\partial}^2_K g(x) + U'$. Тогда имеем:

$$co\Big\{\frac{\Delta^2 f(x,2h)}{4h^2} \ \Big|\ 0 < h < \delta\Big\} + co\Big\{\frac{\Delta^2 g(x,2h)}{4h^2} \ \Big|\ 0 < h < \delta\Big\} \subset \widehat{\partial}^2_{co} f(x,\delta) + \widehat{\partial}^2_{co} g(x,\delta) \subset$$
$$\subset (\widehat{\partial}^2_K f(x) + U') + (\widehat{\partial}^2_K g(x) + U') \subset (\widehat{\partial}^2_K f(x) + \widehat{\partial}^2_K g(x)) + (U' + U') \subset (\widehat{\partial}^2_K f(x) + \widehat{\partial}^2_K g(x)) + U.$$

Так как множество $\widehat{\partial}^2_K f(x)+\widehat{\partial}^2_K g(x)$ компактно, а множество U замкнуто, то множество $(\widehat{\partial}^2_K f(x)+\widehat{\partial}^2_K g(x))+U)$ замкнуто [20], откуда выходит:

$$\overline{co\Big\{\frac{\Delta^2 f(x,2h)}{4h^2}\ \Big|\ 0<h<\delta\Big\}+co\Big\{\frac{\Delta^2 g(x,2h)}{4h^2}\ \Big|\ 0<h<\delta\Big\}}\subset(\widehat{\partial}^2_K f(x)+\widehat{\partial}^2_K g(x))+U. \quad (1.7)$$

Из (1.6) и (1.7) следует включение: $\widehat{\partial}^2_{co}(f+g)(x,\delta)\subset(\widehat{\partial}^2_K f(x)+\widehat{\partial}^2_K g(x))+U$ при $\delta<\delta_{U'}$. Отсюда и из определения K-предела получается:

$$\widehat{\partial}^2_K(f+g)(x)=K\text{-}\lim_{\delta\to 0}\widehat{\partial}^2_{co}(f+g)(x,\delta)\subset$$
$$\subset\bigcap_{U=U(0)}\Big[(\widehat{\partial}^2_K f(x)+\widehat{\partial}^2_K g(x))+U\Big]=\widehat{\partial}^2_K f(x)+\widehat{\partial}^2_K g(x).$$

□

Однако можно доказать, что если одна из функций в теореме 4 симметрически дифференцируема в обычном смысле, то включение (1.5) превращается в точное равенство.

Теорема 5. *Если отображение f симметрически K-субдифференцируемо в точке x, а отображение g симметрически дифференцируемо в точке x, т. е. существует $\widehat{\partial}^2 g(x)$, то*

$$\widehat{\partial}^2_K(f+g)(x)=\widehat{\partial}^2_K f(x)+\widehat{\partial}^2 g(x). \quad (1.8)$$

2. K-теорема Шварца и обобщенная K-теорема Шварца для симметрических K-субдифференциалов второго порядка

Для удобства дальнейших рассуждений примем для основной функции обозначение F.

Важную роль в приложениях симметрических производных к рядам Фурье играет следующая теорема Шварца (см. [19], [2]):

Теорема 6. *(Теорема Шварца) Если $F(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и $\widehat{\partial}^2 F(x)=0$ на $a<x<b$, то $F(x)$ линейна на этом отрезке.*

Если условие $\widehat{\partial}^2 F(x)=0$ выполняется всюду, кроме отдельных «точек неизвестности», тогда справедлива [19]:

Теорема 7. *(Обобщенная теорема Шварца) Пусть для непрерывной на $[a;b]$ функции $F(x)$ существует $\widehat{\partial}^2 F(x)=0$ на $a<x<b$, кроме конечного числа «точек неизвестности» $a<x_1<x_2<...<x_m<b$. Если в каждой из этих точек выполняется более слабое условие $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\Delta^2 F(x_i,h)}{2h}=0$, то $F(x)$ линейна на этом промежутке.*

Второй симметрический K-субдифференциал в некоторых случаях может играть ту же роль, что и обычная вторая симметрическая производная, с заменой равенства $\widehat{\partial}^2 F(x)\equiv 0$ на оценку $0\in\widehat{\partial}^2_K F(x)$.

Теорема 8 (K-теорема Шварца)**.** . *Если функция $F(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и $\widehat{\partial}^2_K$-субдифференцируема на $(a;b)$, и при этом выполняется «K-условие Шварца» $0 \in \widehat{\partial}^2_K F(x)$, то $F(x)$ будет линейной функцией:*

$$F(x) = Ax + B. \tag{2.1}$$

Доказательство. Для доказательства возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и построим вспомогательную функцию $\varphi_{\pm}(x) = \pm\Big[F(x) - F(a) - \dfrac{F(b)-F(a)}{b-a}(x-a)\Big] + \varepsilon(x-a)(x-b)$. Тогда внутри промежутка при $x \in (a;b)$ имеем:

$$\widehat{\partial}^2_K \varphi_{\pm}(x) = \pm\widehat{\partial}^2_K F(x) + 2\varepsilon, \tag{2.2}$$

при этом $\varphi_{\pm}(a) = \varphi_{\pm}(b) = 0$, Докажем, что $\varphi_{\pm}(x) \equiv 0$ при $a \leqslant x \leqslant b$.
Если допустим, что $\varphi_+(x) \not\equiv 0$ и принимает в некоторых точках $(a;b)$ строго положительные значения, то непрерывная функция $\varphi(x)$ достигает своего наибольшего значения в некоторой внутренней точке $x_0 \in (a;b)$. В таком случае для достаточно малого $h > 0$: $\varphi_+(x_0 \pm 2h) \leqslant \varphi_+(x_0)$. Таким образом,

$$\Delta^2_h \varphi_+(x_0) = (\varphi_+(x_0+2h) - \varphi_+(x_0)) + (\varphi_+(x_0-2h) - \varphi_+(x_0)) \leqslant 0.$$

Вместе с тем при достаточно малых h: $\dfrac{\Delta^2\varphi_+(x_0,h)}{4h^2} \leqslant 0$ при $0 < h < \delta$. Значит, $\widehat{\partial}^2_{co}\varphi_+(x_0,\delta) = \overline{co}\Big\{\dfrac{\Delta^2\varphi_+(x_0,h)}{4h^2} \;\Big|\; 0 < h < \delta\Big\} \subset (-\infty;0]$, и, наконец,

$$\widehat{\partial}^2_K \varphi_+(x_0) = K\text{-}\lim_{\delta\to 0} \widehat{\partial}^2_{co}\varphi_+(x_0,\delta) \subset (-\infty;0],$$

вопреки равенству (2.2). Следовательно, $\varphi_+(x) \leqslant 0 \;\forall\, x \in [a;b]$, откуда

$$\left|F(x) - F(a) - \frac{F(b)-F(a)}{b-a}(x-a)\right| < \varepsilon(b-a)^2. \tag{2.3}$$

Переходя в оценке (2.3) к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем тождество
$F(x) \equiv F(a) - \dfrac{F(b)-F(a)}{b-a}(x-a)$, что равносильно равенству (2.1). □

Аналогично, если условия K-теоремы Шварца выполнены, за исключением конечного числа «точек неизвестности», то справедлива *обобщенная K-теорема Шварца*

Теорема 9. *Пусть функция $F(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и $\widehat{\partial}^2_K$-субдифференцируема на $(a;b)$, причем*

$$0 \in \widehat{\partial}^2_K F(x), \tag{2.4}$$

кроме конечного числа «точек неизвестности» $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_m < b$. Если в каждой из этих точек выполняется «ослабленное K-условие Шварца»:

$$0 \in K\text{-}\lim_{\delta\to 0} \overline{co}\Big\{\frac{\Delta^2 F(x_i,h)}{2h} \;\Big|\; 0 < h < \delta\Big\}, \tag{2.5}$$

то $F(x)$ — линейная функция на $[a;b]$.

Доказательство. Зафиксируем $i = \overline{1,n}$. По предыдущей теореме $F(x)$ — линейная функция в промежутке $[x_{i-1}; x_i]$: $F(x) = cx + d$, а в смежном промежутке $[x_i; x_{i+1}]$: $F(x) = c'x + d'$. При этом в точке $x = x_i$ имеем:

$$F(x_i) = cx_i + d = c'x_i + d'. \tag{2.6}$$

Условие (2.5) для $x = x_i$ дает:

$$0 \in K\text{-}\lim_{\delta\to 0} \overline{co}\Big\{\frac{F(x_i+2h)-F(x_i)}{2h} - \frac{F(x_i-2h)-F(x_i)}{-2h} \;\Big|\; 0 < h < \delta\Big\}. \tag{2.7}$$

Выражение в фигурных скобках в (2.7) есть разность угловых коэффициентов прямых $y = cx+d$ и $y = c'x+d'$, и не зависит от h при достаточно малом $0 < h < \delta$, т. е. является константой. Таким образом, оценка (2.7) принимает вид:

$$0 \in \Big\{\frac{F(x_i+2h)-F(x_i)}{2h} - \frac{F(x_i-2h)-F(x_i)}{-2h}\Big\} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{F(x_i+2h)-F(x_i)}{2h} = \frac{F(x_i-2h)-F(x_i)}{-2h},$$

откуда получаем $c = c'$. Тогда из (2.6) следует, что $d = d'$, т. е. функция $y = c'x + d'$ является линейным продолжением на отрезок $[x_i; x_{i+1}]$ функции $y = cx + d$, заданной на $[x_{i-1}; x_i]$. Применяя это утверждение по индукции последовательно ко всем парам отрезков $\Big\{[x_{i-1}; x_i]; [x_i; x_{i+1}]\Big\}_{i=1}^{n}$, мы приходим к утверждению теоремы. □

Замечание 1. Используя свойство K-предела (см. [10], [11]):

$$K\text{-}\lim_{\delta\to 0} \overline{co}\Big\{F(x,h) \;\Big|\; 0 < |h| < \delta\Big\} = \Big[\varliminf_{h\to+0} F(x,h), \varlimsup_{h\to+0} F(x,h)\Big],$$

«ослабленное K-условие Шварца» (2.5) можно переписать в виде:

$$\varliminf_{h\to+0} \frac{\Delta^2 F(x,h)}{2h} \leqslant 0 \leqslant \varlimsup_{h\to+0} \frac{\Delta^2 F(x,h)}{2h}.$$

3. Обобщенный метод суммирования Римана

Здесь мы обобщим классический метод Римана (см. [19], [2]), заменяя в его конструкции вторую симметрическую производную на второй симметрический K-субдифференциал.

Рассмотрим тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{3.1}$$

с ограниченными коэффициентами.

Тогда интегрируя его почленно два раза, получим абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$\frac{a_0}{4}x^2 + Cx + D - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}.$$

Обозначим через $F(x)$ его сумму. Это непрерывная функция, которая называется *функцией Римана* для тригонометрического ряда (3.1):

$$F(x) = \frac{a_0}{4}x^2 + Cx + D - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}.$$

Допустим, что в некоторой точке x_0 функция $F(x)$ имеет вторую симметрическую производную $\widehat{\partial}^2 F(x_0)$. Будем говорить, что ряд (3.1) *суммируется* в точке x_0 *методом Римана* и его римановская сумма равна $\widehat{\partial}^2 F(x_0)$.

Заменяя в описанной выше конструкции классического метода Римана вторую симметрическую производную на второй симметрический K-субдифференциал, то мы приходим к обобщенному K-методу Римана суммирования тригонометрических рядов.

Определение 3. Если в некоторой точке x_0 функция $F(x)$ имеет второй симметрический K-субдифференциал $\widehat{\partial}^2_K F(x_0)$, то будем говорить, что тригонометрический ряд суммируется в точке x_0 *K-методом Римана* и его K-сумма есть *множество* $\widehat{\partial}^2_K F(x_0)$.

Замечание 2. Так как симметрический K-субдифференциал $\widehat{\partial}^2_K F(x)$ есть обобщение обычной симметрической производной $\widehat{\partial}^2 F(x)$, то K-метод Римана является, вообще говоря, более общим, чем классический метод Римана.

Теорема 10. *Если тригонометрический ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю, суммируется методом Римана в точке x_0 к числу S, то он суммируется в этой точке к S и K-методом Римана, причем имеет место равенство:*

$$\widehat{\partial}^2_K F(x_0) = \{\widehat{\partial}^2 F(x_0)\} = \{S\}\,. \tag{3.2}$$

Как следствие, учитывая регулярность классического метода Римана, приходим к регулярности K-метода Римана относительно обычной сходимости.

Следствие 1. *Если, в условиях теоремы 10, ряд суммируется обычным образом в точке x_0 к числу S, то он суммируется в этой точке к S и K-методом Римана.*

Продемонстрируем на примере, что область применимости K-метода Римана строго шире области применимости классического метода Римана.

Пример 3. Положим $\Phi(x) = x \sin \frac{1}{x}$ при $x > 0$; $\Phi(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ при $x < 0$; $\Phi(0) = 0$.

Введем теперь функцию $F(x) = \displaystyle\int_0^x \Phi(t)\, dt$.

Тогда $F'(x) = \Phi(x)$, следовательно:

$$\widehat{\partial}^2_K F(0) = \Big[\underline{\widehat{\partial}}(F')(0); \overline{\widehat{\partial}}(F')(0)\Big] = \Big[\underline{\widehat{\partial}}\Phi(0); \overline{\widehat{\partial}}\Phi(0)\Big] = \Big[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\Big].$$

При этом

$$f(x) = F''(x) = \Phi'(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x} \text{ при } x > 0, \\[2ex] 2x \sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x} \text{ при } x < 0. \end{cases}$$

В силу того, что функция $\Phi(x)$ непрерывна в точке $x = 0$, то $f \in L_1$ и $F(x)$ — функция Римана для $f(x)$. Таким образом, функция f суммируема в точке $x = 0$ K-методом Римана к множеству $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ и поэтому не суммируется классическим методом Римана в этой точке.

K-метод Римана, как и классический метод Римана, в приложении к рядам Фурье дает следующий результат:

Теорема 11. *Ряд Фурье от любой суммируемой функции $f(x)$ на $[-\pi; \pi]$ суммируется K-методом Римана почти всюду к этой функции.*

Доказательство. Действительно, пусть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \tag{3.3}$$

Если ряд (3.3) суммируется в точre x к $f(x)$ обычным методом Римана, то по теореме 10 он суммируется и K-методом Римана к $f(x)$, откуда следует, что ряд (3.3) почти всюду на $[-\pi; \pi]$ суммируется и K-методом Римана к $f(x)$. □

4. «Ослабленное K-условие Шварца» для тригонометрических рядов и обобщенная теорема Кантора

Важным результатом классической теории рядов Фурье является теорема Кантора:

Теорема 12. *(Теорема Кантора) Если тригонометрический ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю, суммируется к нулю методом Римана всюду, кроме, быть может, конечного числа точек, то все его коэффициенты равны нулю.*

Заметим, что в условиях теоремы Кантора 12 во всех «точках неизвестности» $x_1, ..., x_n$ автоматически выполнено (см. [19], п. 747, 2-ая теорема Римана) ослабленное условие Шварца:

$$\lim_{h \to +0} \frac{\Delta^2 F(x_i, h)}{2h} = 0. \tag{4.1}$$

Сформулируем теперь аналог теоремы Кантора для K-метода Римана, в котором ослабленное условие Шварца (4.1) заменяется еще более слабым условием:

$$\underline{\lim}_{h \to +0} \frac{\Delta^2 F(x_i, h)}{2h} \leqslant 0 \leqslant \overline{\lim}_{h \to +0} \frac{\Delta^2 F(x_i, h)}{2h}, \tag{4.2}$$

при исключении условия стремления к нулю коэффициентов тригонометрического ряда.

Теорема 13. *(K-теорема Кантора) Если тригонометрический ряд с ограниченными коэффициентами (где необязательно $a_n, b_n \nrightarrow 0$) суммируется к нулю K-методом Римана всюду, кроме конечного числа точек $x_1, \ldots, x_n$, в которых выполняется «ослабленное K-условие Шварца» (4.2), то $a_n = b_n = 0$.*

Доказательство. По условию теоремы «ослабленное K-условие Шварца» выполнено. Это позволяет применить в нашем случае теорему 9 к функции $F(x)$.
По обобщенной теореме Шварца функция Римана $F(x)$ должна быть линейной на каждом интервале $(a;b)$, где ряд (3.3) сходится к нулю, в силу равенства $\widehat{\partial}^2 F(x) \equiv 0$.
Тогда имеем

$$F(x) = Ax + B \qquad (a \leqslant x \leqslant b). \tag{4.3}$$

Но, так как $F(x)$ есть функция Римана для ряда (3.3), то

$$F(x) = \frac{a_0}{4}x^2 + Cx + D - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}. \tag{4.4}$$

Из (4.3) и (4.4), обозначая $A_1 = C - A,\ B_1 = D - B$, получаем:

$$\frac{a_0}{4}x^2 + A_1 x + B_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2},$$

Но правая часть имеет период 2π, значит и левая тоже, а это возможно только при

$$a_0 = 0 \text{ и } A_1 = 0. \tag{4.5}$$

Значит,

$$B_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}. \tag{4.6}$$

Ряд (4.6) сходится равномерно по мажорантному признаку Вейерштрасса, поэтому его коэффициенты являются коэффициентами Фурье от его суммы, но она есть постоянное число B_1, а потому

$$\frac{a_n}{n^2} = \frac{b_n}{n^2} = 0 \qquad (n = 1, 2, ...),$$

откуда

$$a_n = b_n = 0 \qquad (n = 1, 2, ...). \tag{4.7}$$

Из (4.5) и (4.7) следует, что ряд (4.6) имеет все коэффициенты равные нулю и таким образом теорема доказана. □

5. Пример эффективности «K-условия Шварца» для рядов Фурье

Рассмотрим пример, для которого классическое условие Шварца не выполняется, а «ослабленное K-условие Шварца» выполнено. Построим функцию $F(h)$, которая при $h > 0$ будет иметь вид:

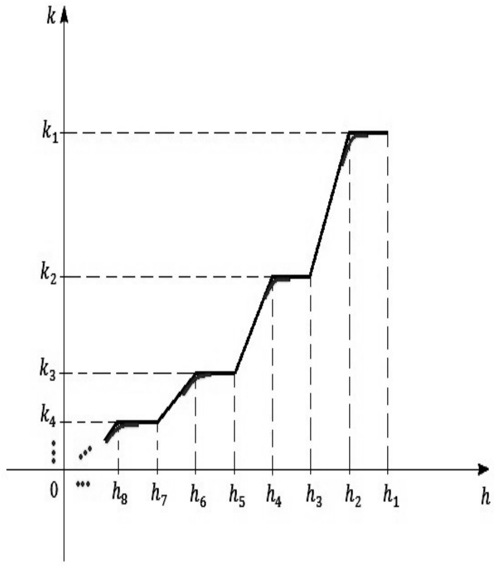

Рис. 1.

А именно $F(0) = 0$ и четным образом продолжается для $h < 0$ ($h_n \searrow 0, k_n \searrow 0$), причем $F(h)$ C^2-сглажена в малых окрестностях угловых точек.
Рассмотрим поведение функции $F(h)$ на n-м шаге.

1) $h_{2n} \leqslant h \leqslant h_{2n-1}:$ $F(h) = k_n$,

$$\frac{k_n}{h_{2n-1}} \leqslant \frac{F(h)}{h} \leqslant \frac{k_n}{h_{2n}}.$$

2) $h_{2n+1} \leqslant h \leqslant h_{2n}:$ $F(h)$ линейная,

$$\frac{F(h)}{h} \equiv \frac{k_n - k_{n+1}}{h_{2n} - h_{2n+1}}.$$

Потребуем, чтобы выполнялись два условия:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{h_{n+1}}{h_n} = 0,$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{k_{n+1}}{k_n} = 0;$

(ii) $0 < \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{k_n}{h_{2n}} = L < \infty.$

В этом случае

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{h_{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{h_{2n}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{h_{2n}}{h_{2n-1}} = L \cdot 0 = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_n - k_{n+1}}{h_{2n} - h_{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{k_n + o(k_n)}{h_{2n} + o(h_{2n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{h_{2n}} = L.$$

Отсюда

$$\overline{\lim_{h\to 0}} \frac{F(h)}{h} = L, \quad \underline{\lim_{h\to 0}} \frac{F(h)}{h} = 0.$$

Получаем

$$K\text{-}\lim_{\delta\to 0} \overline{co}\left\{ \frac{\Delta^2 F(0,h)}{2h} \;\Big|\; 0 < h < \delta \right\} = [0; L] \ni 0. \tag{5.1}$$

В частности, из (5.1) следует, что $\overline{\lim_{h\to+0}}\dfrac{\Delta^2 F(0,h)}{4h^2} = \overline{\widehat{\partial}^2} F(0) = +\infty$, откуда F не является $\widehat{\partial}^2_K$-субдифференцируемой в нуле.

Отметим, что $F(h)$ — функция Римана для функции $f(h) = F''(h)\,(h \neq 0)$. Приведем конкретный пример.

Пример 4. Рассмотрим

$$\begin{cases} h_n = \dfrac{1}{n!}, \\ \\ k_n = \dfrac{1}{(2n)!}. \end{cases}$$

Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{h_{n+1}}{h_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k_{n+1}}{k_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = 0\,; \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{k_n}{h_{2n}} = 1.$$

Таким образом, удалось построить пример, который наглядно иллюстрирует эффективность «ослабленного K-условия Шварца», когда классическое условие не выполняется.

Заключение

В работе построена теория симметрических K-субдифференциалов второго порядка, путем перехода в основной конструкции K-субдифференциала к симметрическому разностному отношению второго порядка. Получен ряд дополнительных свойств, включая усиленную форму теоремы Шварца и обобщенной теоремы Шварца. Изложено непосредственное применение аппарата симметрических K-субдифференциалов к рядам Фурье. Доказана обобщенная теорема Кантора и приведен пример эффективности «ослабленного K-условия Шварца» для рядов Фурье.

Автор выражает благодарность профессору Орлову И. В. за постановку задачи и полезные обсуждения.

Список цитируемых источников

1. *Баран И. В.* Симметрические компактные субдифференциалы первого порядка // Ученые записки Тавр. нац. ун-та им. В. И. Вернадского. —2013. — Т. 26(65), №1. — С. 16–30.
2. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. — М.: ФМ, 1961. — 936 с.
3. *Басаева Е. К.* О субдифференциалах не всюду определенных выпуклых операторов // Владикавказский математический журнал. — 2006. — 8, № 4. — С. 6–12.
4. *Демьянов В. Ф., Рощина В. А.* Обобщенные субдифференциалы и экзостеры // Владикавказский математический журнал. – 2006. — № 4. — С. 19–31.
5. *Дьедонне Ж.* Основы современного анализа. — М.: Мир, 1964. — 360 с.
6. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды в 2 т.. — Т. 1: Пер. с англ. О. С. Ивашева-Мусаотова. — М.: Мир, 1965. — 615 с.
7. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Локальный выпуклый анализ // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. — 1982. — 19. — С. 155–206.
8. *Курсаев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциальное исчисление: теория и приложения. — М.: Наука, 2007. — 560 с.

9. *Лузин Н. Н.* Интеграл и тригонометрический ряд. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. — 550 с.
10. *Орлов И. В., Халилова З. И.* Компактные субдифференциалы в банаховых пространствах и их применение к вариационным функционалам // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2013. — 49. — С. 99–131.
11. *Орлов И. В., Стонякин Ф. С.* Компактные субдифференциалы: формула конечных приращений и смежные результаты // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2009. — 34. — С. 121–138.
12. *Орлов И. В., Стонякин Ф. С.* Предельная форма свойства Радона - Никодима справедлива в любом пространстве Фреше // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2010. — 37. – С. 55–69.
13. *Половинкин Е. С., Балашов М. В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 416 с.
14. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1980. — 320 с.
15. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ: Пер. с англ. А. Д. Иоффе и В. М. Тихомирова. —М.: Мир, 1973. —472 с.
16. *Сакс С.* Теория интеграла: Пер. с англ. И. С. Березина, Б. М. Будака и Л. А. Гусарова. –= М.: Изд-во иностранной литературы, 1949. –= 496 с.
17. *Стонякин Ф. С.* Сравнительный анализ понятия компактного субдифференциала // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія "Математика, прикладна математика і механіка". –= 2009. -=- № 850. -=- С. 11–21.
18. *Тихомиров В. М.* Выпуклый анализ // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. — 1987. — 14. — С. 5–101.
19. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001 — . — Т. 3. — 2001. – 662 с.
20. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства: Пер. с англ. И. А. Березанского. — М.: Мир, 1971. — 359 с.
21. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье в современном изложении: в 2 т.: Пер. с англ. В. А. Скворцова. — М.: Мир, 1985 — Т. 1. – 1985. – 264 с.
22. *Davis W. J.* The Radon - Nikodym property // Seminare d'analyse fonctionelle (Polytechnique) (1973-1974). — exp no. O.-P. 1–12.
23. *Diestel J., Uhl J. J.* Vector Measures. — Providence, Amer. Math. Soc., 1977.
24. *Orlov I. V., Stonyakin F. S.* Compact variation, compact subdifferentiability and indefinite Bochner integral // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2009. — Vol. 15, №1. — P. 74 – 90.

Получена 25.07.2013