

УДК 539.3

Дископодібна щілина на межі шару та півпростору

Н. М. Антоненко, І. Г. Величко

Запорізький національний університет,

Запоріжжя, 69063. E-mail: *velichkoig@gmail.com*, *antonenkonina@mail.ru*

Анотація. Досліджується пружна деформація конструкції, яка складається з шару та півпростору, які зчеплені між собою по всій межі за виключенням кругової області. За допомогою інтегральних перетворень Ханкеля отримано інтегральні рівняння відносно переміщень верхнього берега щілини. Розглядаються випадки, коли береги щілини вільні від навантажень та, коли розкриття щілини пропорційне нормальним напруженням на її берегах. Спосіб розв'язання рівнянь спирається на спектральні співвідношення. Розглянуто чисельні приклади. Досліджено вплив геометричних та пружних характеристик шару на розподіл нормальних напружень та вертикальних переміщень точок верхнього берега щілини

Ключові слова: щілина, напружено-деформований стан, осесиметрична деформація, інтегральне рівняння.

1. Постановка проблеми та огляд публікацій

Механічні напруження, які виникають в тілі при дії зовнішніх навантажень, можуть призвести до порушення структури матеріалу, утворення нових і росту наявних тріщин, а в результаті — до локального або повного руйнування конструкції та її елементів. Тому вивчення розподілу напружень в точках тіла поблизу тріщини має важливе значення в розрахунках на міцність і довговічність елементів конструкцій з тріщинами.

Основи теорії тріщин закладені в роботах Н.М. Westergaard, I.N. Sneddon, Г.І. Баренблатта і G.R. Irwin. Основні результати цієї теорії викладені в багатьох працях, серед яких зазначимо роботи М.І. Мусхелішвілі [3] та Г. П. Черепанова [5]. Сучасний огляд теорії тріщин можна знайти в монографії О.М. Гузя та В.В. Зозулі [2]. Основним методом розв'язання задач теорії тріщин являється метод комплексних потенціалів. У зв'язку з розвитком комп'ютерної техніки набули популярності метод скінчених елементів (роботи J.H. Chang, D.J. Wu, B. Winiarski і I. Guz, T. Sadowski, L. Marsavina, N. Peride, E.-M. Craciun [6, 11, 12]) та метод граничних елементів (роботи C.Y. Dong, Xiangqiao Yan [7, 13]).

Задачі про круглу тріщину, подібні до розглянутих в статті, розв'язано в роботах R. V. Goldstein, V. M. Vainshelbaum [8] та M. Rekik, M. Neifar, S. El-Borgi [10]. Для їх розв'язку використані інтегральні перетворення Ханкеля. На відміну від вказаних робіт, в даній статті проводиться врахування наповнювача щілини та

використано інший спосіб регуляризації отриманих інтегральних рівнянь. В запропонованій моделі щілини вважатимемо, що вертикальні переміщення точок верхнього берега щілини пропорційні нормальним напруженням в точках цього берега зі змінним коефіцієнтом пропорційності (врахування наповнювача). Запропонований підхід дозволяє розповсюдити отриманий розв'язок на випадок багатопарових основ. Розглянуто дві задачі: про визначення НДС шару поблизу щілини на межі пружного шару та абсолютно жорсткого півпростору та про визначення НДС пружного півпростору з щілиною.

2. Визначення НДС системи шар-абсолютно жорсткий півпростір з щілиною на їх межі

Розглянемо пружний невагомий шар постійної товщини, який лежить на абсолютно жорсткому півпросторі. Деформація шару осесиметрична. Матеріал шару вважатимемо невагомим, однорідним та ізотропним.

На нижній межі шару для $\rho > a$ шар зчеплений з півпростором, а при $\rho \leq a$ маємо або щілину вільну від навантаження, або щілину заповнену пружною речовиною. Під дією зосередженого навантаження величиною Q , направлено перпендикулярно межі шару, щілина розкривається. Введемо циліндричну систему координат, так як вказано на рисунку 1.

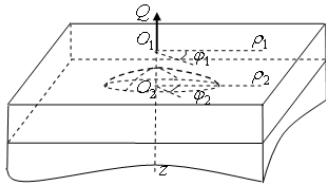


Рис. 1. Тріщина між пружним шаром та півпростором

Межові умови на верхній межі шару мають вигляд:

$$\sigma_z(\rho; 0) = Q\delta_\varepsilon(\rho), \tau_{\rho z}(\rho; 0) = 0, \quad (1)$$

$$\text{де } \delta_\varepsilon(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\varepsilon^2}, \rho \leq \varepsilon, \\ 0, \rho > \varepsilon, \end{cases} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Вважатимемо, що горизонтальні переміщення точок верхнього берега тріщини настільки малі, що ними можна знехтувати і, з врахуванням цього, межові умови на

нижній межі шару мають вигляд:

$$u(\rho; h) = 0, \quad (2)$$

$$w(\rho; h) = \begin{cases} A(\rho), \rho \leq a, \\ 0, \rho > a, \end{cases} \quad (3)$$

де $A(\rho) = (a^2 - \rho^2)^\eta f(\rho)$, $u = u_\rho$, $w = u_z$ — компоненти вектора переміщення, $f(\rho)$ — обмежена неперервна функція на інтервалі $[0, a]$, $\eta > 0$ — параметр, який визначає особливість поведінки функції $w(\rho; h)$ поблизу вершини щілини. В цій статті обмежимося випадком $\eta = \frac{1}{2}$, оскільки при такому значенні відомі спектральні співвідношення, які використовуватимуться при розв'язанні задачі. В рамках запропонованої моделі вважатимемо, що

$$\sigma_z(\rho; h) = y_\eta(\rho)f(\rho), \rho \leq a. \quad (4)$$

Функція $(a^2 - \rho^2)^\eta / y_\eta(\rho)$ — змінний коефіцієнт пропорційності між переміщеннями та напруженнями.

Задачу будемо розв'язувати за допомогою інтегрального перетворення Ханкеля:

$$\bar{f}^m(p) = \int_0^{+\infty} \rho f(\rho) J_m(p\rho) d\rho, f(\rho) = \int_0^{+\infty} p \bar{f}^m(p) J_m(p\rho) dp, \quad (5)$$

де $p \in [0; +\infty)$ — параметр інтегрального перетворення, $J_m(p\rho)$ — функція Бесселя m -го порядку. Як показано в [1], трансформанти напружень і переміщень точок шару можна представити у вигляді лінійної комбінації допоміжних функцій α , β , γ , δ :

$$p\bar{w}^0(p; z) = \frac{1}{2\mu} [((2 - \omega) \operatorname{sh} pz - \omega pz \operatorname{ch} pz) \alpha + 2(-\omega pz \operatorname{sh} pz + \operatorname{ch} pz) \beta + \\ + 2((1 - \omega) \operatorname{sh} pz - \omega pz \operatorname{ch} pz) \gamma - \omega pz \operatorname{sh} pz \delta], \quad (6)$$

$$p\bar{u}^1(p; z) = \frac{1}{2\mu} [\omega pz \operatorname{sh} pz \alpha + 2((1 - \omega) \operatorname{sh} pz + \omega pz \operatorname{ch} pz) \beta + \\ + 2(\omega pz \operatorname{sh} pz + \operatorname{ch} pz) \gamma - ((2 - \omega) \operatorname{sh} pz + \omega pz \operatorname{ch} pz) \delta], \quad (7)$$

$$\bar{\tau}_{\rho z}^1(p; z) = (-(1 - \omega) \operatorname{sh} pz + \omega pz \operatorname{ch} pz) \alpha + 2\omega pz \operatorname{sh} pz \beta + \\ + 2\omega (\operatorname{sh} pz + pz \operatorname{ch} pz) \gamma + (\omega pz \operatorname{sh} pz + \operatorname{ch} pz) \delta, \quad (8)$$

$$\bar{\sigma}_z^0(p; z) = (\operatorname{ch} pz - \omega pz \operatorname{sh} pz) \alpha + 2\omega (\operatorname{sh} pz - pz \operatorname{ch} pz) \beta - \\ - 2\omega pz \operatorname{sh} pz \gamma - ((1 - \omega) \operatorname{sh} pz + \omega pz \operatorname{ch} pz) \delta. \quad (9)$$

Тут

$$\alpha = \bar{\sigma}_z^0(p; 0), \beta = \mu p \bar{w}^0(p; 0), \gamma = \mu p \bar{u}^1(p; 0), \delta = \bar{\tau}_{\rho z}^1(p; 0), \omega = \frac{1}{2(1 - \nu)}. \quad (10)$$

Застосуємо пряме перетворення Ханкеля (5) до співвідношень (2), (3):

$$\begin{cases} \bar{u}^1(p; h) = 0, \\ \bar{w}^0(p; h) = \int_0^a r A(r) J_0(pr) dr = M(p). \end{cases} \quad (11)$$

Дві з чотирьох допоміжних функцій α і δ можна знайти з межових умов (1) на верхній межі шару:

$$\alpha = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{Q}{\pi \varepsilon^2} \int_0^\varepsilon \rho J_0(p\rho) d\rho = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{Q}{\pi} \frac{J_1(p\varepsilon)}{p\varepsilon} = \frac{Q}{2\pi}, \quad \delta = 0. \quad (12)$$

Підставимо в ліві частини співвідношень (11) вирази для трансформант переміщень (6), (7) та (12). Отримаємо систему відносно функцій β і γ , розв'язок якої має вигляд:

$$\beta = \frac{4\pi\mu p(\omega p_1 S + C) M(p) + (\omega p_1 + (\omega - 2)SC) Q}{4\pi(1 + \omega^2 p_1^2 + \omega(2 - \omega)S^2)}, \quad (13)$$

$$\gamma = \frac{4\pi\mu p((\omega - 1)S - \omega p_1 C) M(p) + (-\omega^2 p_1^2 + (\omega^2 - 3\omega + 2)S^2) Q}{4\pi(1 + \omega^2 p_1^2 + \omega(2 - \omega)S^2)}. \quad (14)$$

Тут $p_1 = ph$, $S = \text{sh } ph$, $C = \text{ch } ph$.

Нормальне напруження на нижній межі шару можна знайти із співвідношення:

$$\sigma_z(\rho; h) = \int_0^{+\infty} p \bar{\sigma}_z^0(p; h) J_0(p\rho) dp. \quad (15)$$

З врахуванням (12) – (14) перепишемо (15) в наступному вигляді:

$$\sigma_z(\rho; h) = G(\rho) + g(\rho). \quad (16)$$

Тут

$$G(\rho) = 2\mu\omega \int_0^{+\infty} \frac{p^2(-p_1 + CS) M(p)}{1 + \omega^2 p_1^2 + \varpi S^2} J_0(p\rho) dp, \quad \varpi = \omega(2 - \omega),$$

$$g(\rho) = \frac{Q}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{p(\omega p_1 S + C)}{1 + \omega^2 p_1^2 + \varpi S^2} J_0(p\rho) dp. \quad (17)$$

Перетворимо доданок $G(\rho)$. Замінімо $M(p)$ його інтегральним представленням із співвідношень (11) та змінимо порядок інтегрування:

$$G(\rho) = 2\mu\omega \int_0^a r A(r) \left[\int_0^{+\infty} \frac{p^2(-p_1 + CS)}{1 + \omega^2 p_1^2 + \varpi S^2} J_0(p\rho) J_0(pr) dp \right] dr, \quad (18)$$

Оскільки при $p \rightarrow +\infty$

$$N(p) = \frac{p^2(-p_1 + CS)}{1 + \omega^2 p_1^2 + \varpi S^2} - \frac{p^2}{\varpi} = -\frac{\varpi p^2(2p_1 + e^{-2p_1}) + p^2(2 - \varpi + 2\omega^2 p_1^2)}{2\varpi(1 + \omega^2 p_1^2 + \varpi S^2)} \rightarrow 0,$$

то зручно ввести позначення

$$R(r, \rho) = -\varpi \int_0^{+\infty} N(p) J_0(p\rho) J_0(pr) dp, \quad T = -\frac{2\mu}{2 - \omega},$$

$$W_{00}^2(r, \rho) = \int_0^{+\infty} p^2 J_0(p\rho) J_0(pr) dp,$$

де $W_{00}^2(r, \rho)$ — інтеграл Вебера-Соніна.

З врахуванням позначень співвідношення (18) приймають вигляд:

$$G(\rho) = T \int_0^a r A(r) [R(r, \rho) - W_{00}^2(r, \rho)] dr. \quad (19)$$

Таким чином маємо такий зв'язок між нормальними напруженнями в точках верхнього берега щілини $\sigma_z(\rho; h)$ та нормальними переміщеннями $A(\rho)$ точок верхнього берега щілини:

$$\sigma_z(\rho, h) = T \int_0^a r A(r) [R(r, \rho) - W_{00}^2(r, \rho)] dr + g(\rho). \quad (20)$$

Із співвідношень (20) отримуємо інтегральне рівняння відносно невідомої функції $f(\rho)$:

$$T \int_0^a r (a^2 - r^2)^\eta f(r) [R(r, \rho) - W_{00}^2(r, \rho)] dr = -g(\rho). \quad (21)$$

Перейдемо до нових змінних s і t :

$$s = \frac{r}{a}, \quad t = \frac{\rho}{a}.$$

Враховуючи, що $W_{00}^2(as, at) = \frac{W_{00}^2(s, t)}{a^3}$ та позначивши $F(t) = f(at)$, $g_1(t) = g(at)$, $R_1(s, t) = a^{2(1+\eta)} R(as, at)$, перетворимо рівняння (21) до вигляду:

$$T \int_0^1 s (1 - s^2)^\eta F(s) [R_1(s, t) - a^{2\eta-1} W_{00}^2(s, t)] ds = -g_1(t). \quad (22)$$

Оскільки в даній статті розглядатимемо лише випадок $\eta = \frac{1}{2}$, то невідому функцію шукатимемо у вигляді:

$$F(t) = \sum_{i=0}^n m_i P_i^{0, \frac{1}{2}}(1 - 2t^2), \quad (23)$$

де $P_i^{0, \frac{1}{2}}(1 - 2t^2)$ — многочлени Якобі. Рівняння (22) з врахуванням співвідношень (23) приймає вигляд:

$$T \sum_{i=0}^n m_i \int_0^1 s (1 - s^2)^{\frac{1}{2}} P_i^{0, \frac{1}{2}}(1 - 2s^2) [R_1(s, t) - W_{00}^2(s, t)] ds = -g_1(t)$$

Зазначимо, що інтеграл $W_{00}^2(s, t)$ розбігається, проте інтегралу

$$\int_0^1 s (1 - s^2)^{\frac{1}{2}} P_i^{0, \frac{1}{2}} (1 - 2s^2) W_{00}^2(s, t) ds$$

можна надати скінченне значення, якщо вважати, що спектральні співвідношення (5.2) наведені в [4] істинні при всіх допустимих значеннях параметрів. З врахуванням цього будемо мати:

$$\int_0^1 s (1 - s^2)^{\frac{1}{2}} P_i^{0, \frac{1}{2}} (1 - 2s^2) W_{00}^2(s, t) ds = \frac{2 [\Gamma(i + \frac{3}{2})]^2 P_i^{0, \frac{1}{2}} (1 - 2t^2)}{i!^2}, i = \overline{0, n}. \quad (24)$$

Перетворимо останнє рівняння до вигляду:

$$T \sum_{i=0}^n m_i \left[\int_0^1 s (1 - s^2)^{\frac{1}{2}} P_i^{0, \frac{1}{2}} (1 - 2s^2) R_1(s, t) ds - \frac{2 [\Gamma(i + \frac{3}{2})]^2 P_i^{0, \frac{1}{2}} (1 - 2t^2)}{i!^2} \right] = -g_1(t), \quad i = \overline{0, n}. \quad (25)$$

Невідомі коефіцієнти m_i можна знайти шляхом розкладання правої та лівої частин інтегрального рівняння (25) в лінійні комбінації многочленів Якобі $P_i^{0, \frac{1}{2}}(1 - 2t^2)$ з наступним прирівнюванням коефіцієнтів при многочленах однакового порядку. Невідому функцію $f(\rho)$ знаходимо за формулою:

$$f(\rho) = F\left(\frac{\rho}{a}\right) = \sum_{i=0}^n m_i P_i^{0, \frac{1}{2}} \left(\frac{a^2 - 2\rho^2}{a^2} \right).$$

Для моделі щілини з пружним наповнювачем $\sigma_z(\rho; h) \neq 0$ при $\rho \leq a$. Як зазначено вище, в рамках запропонованої моделі вважаємо, що вертикальні переміщення точок верхнього берега щілини пропорційні нормальним напруженням, зі змінним коефіцієнтом пропорційності. Інтегральне рівняння для визначення функції $f(\rho)$ має вигляд

$$y_\eta(\rho) f(\rho) = T \int_0^a r A(r) [R(r, \rho) - W_{00}^2(r, \rho)] dr + g(\rho).$$

В рамках запропонованої моделі вважаємо, що $y_\eta(\rho) = -c = const$, тобто

$$\sigma_z(\rho, h) = -cf(\rho), \quad \rho \leq a. \quad (26)$$

Аналоги співвідношень (25) при цьому мають вигляд:

$$\sum_{i=0}^n m_i \left[P_i^{0, \frac{1}{2}} (1 - 2t^2) - \kappa \int_0^1 s (1 - s^2)^{\frac{1}{2}} P_i^{0, \frac{1}{2}} (1 - 2s^2) R_1(s, t) ds + \right.$$

$$+ \frac{2\kappa [\Gamma(i + \frac{3}{2})]^2 P_i^{0, \frac{1}{2}}(1-t^2)}{i!} \Big] = -bg_1(t), \quad \kappa = \frac{2b\mu}{2-\omega}, \quad c = \frac{1}{b}, \quad i = \overline{0, n}.$$

Невідомі коефіцієнти m_i можна знайти способом використаним для випадку щілини вільної від навантаження.

3. Дослідження НДС пружного півпростору з щілиною паралельною верхній межі

Дископодібну щілину в пружному півпросторі будемо розглядати як щілину на межі шару та пружного півпростору з однаковими пружними характеристиками. Межові умови на нижній межі шару в даному випадку мають вигляд:

$$\begin{cases} w_2(\rho; 0) - w_1(\rho; h) = \begin{cases} A(\rho), \rho \leq a, \\ 0, \rho > a, \end{cases} \\ u_2(\rho; 0) = u_1(\rho; h), \\ \sigma_{z2}(\rho; 0) = \sigma_{z1}(\rho; h), \\ \tau_{xz2}(\rho; 0) = \tau_{xz1}(\rho; h), \end{cases} \quad (27)$$

де $A(\rho) = (a^2 - \rho^2)^n f(\rho)$.

Застосуємо пряме перетворення Ханкеля до межових умов (27):

$$\begin{cases} \bar{w}_2^0(p; 0) - \bar{w}_1^0(p; h) = \int_0^a r A(r) J_0(pr) dr = M_1(p) \\ \bar{u}_2^1(p; 0) = \bar{u}_1^1(p; h), \\ \bar{\sigma}_{z2}^0(p; 0) = \bar{\sigma}_{z1}^0(p; h), \\ \bar{\tau}_{xz2}^1(p; 0) = \bar{\tau}_{xz1}^1(p; h). \end{cases} \quad (28)$$

Перетворимо співвідношення (28) до вигляду:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2\omega}\alpha_2 + \frac{1-\omega}{2\omega}\delta_2 = \mu p \bar{w}_1^0(p; h) + \mu p M_1(p) \\ \frac{1-\omega}{2\omega}\alpha_2 - \frac{1}{2\omega}\delta_2 = \mu p \bar{u}_1^1(p; h), \\ \alpha_2 = \bar{\sigma}_{z1}^0(p; h), \\ \delta_2 = \bar{\tau}_{xz1}^1(p; h). \end{cases} \quad (29)$$

При побудові останніх співвідношень були використані співвідношення (10) та залежність між допоміжними функціями пружного півпростору [1]:

$$\begin{pmatrix} \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\omega} & \frac{1-\omega}{2\omega} \\ \frac{1-\omega}{2\omega} & -\frac{1}{2\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \delta_2 \end{pmatrix},$$

Підставимо вирази (12) та (6)–(9) в співвідношення (29), отримаємо систему відносно β_1 і γ_1 , розв'язок якої має вигляд:

$$\beta_1 = -\mu p(1 + p_1)e^{-p_1} M_1(p) - \frac{Q}{4\pi\omega}, \quad (30)$$

$$\gamma_1 = \mu p p_1 e^{-p_1} M_1(p) + \frac{Q(1-\omega)}{4\pi\omega}. \quad (31)$$

Підставимо в співвідношення (15) вирази (30)-(31):

$$\sigma_{z1}(\rho; h) = G_1(\rho) + d(\rho). \quad (32)$$

Тут

$$G_1(\rho) = \mu\omega \int_0^{+\infty} [p^2 (1 + 2p_1 + 2p_1^2) e^{-2p_1} - p^2] M_1(p) J_0(p\rho) dp,$$

$$d(\rho) = \frac{Q}{2\pi} \int_0^{+\infty} p(1 + p_1) e^{-p_1} J_0(p\rho) dp.$$

Замінімо $M_1(p)$ в співвідношенні (32) його інтегральним представленням із співвідношень (28) та змінимо порядок інтегрування:

$$\sigma_z(\rho; h) = \mu\omega \int_0^a r A(r) [L_1(r, \rho) - W_{00}^2(r, \rho)] dr + d(\rho). \quad (33)$$

Тут

$$L_1(r, \rho) = \int_0^{+\infty} p^2 (1 + 2p_1 + 2p_1^2) e^{-2p_1} J_0(p\rho) J_0(pr) dp.$$

Для випадку щілини вільної від навантажень інтегральне рівняння приймає вигляд:

$$\mu\omega \int_0^a r A(r) [L_1(r, \rho) - W_{00}^2(r, \rho)] dr = -d(\rho). \quad (34)$$

Перейдемо до нових змінних s і t :

$$s = \frac{r}{a}, \quad t = \frac{\rho}{a}.$$

Враховуючи, що

$$W_{00}^2(as, at) = \frac{W_{00}^2(s, t)}{a^3}$$

та позначивши

$$F(t) = f(at), \quad d_1(t) = d(at), \quad L_1(s, t) = a^{2(1+\eta)} L(as, at),$$

приведемо рівняння (34) до вигляду:

$$\mu\omega \int_0^1 s (1 - s^2)^\eta F(s) [L_1(s, t) - a^{2\eta-1} W_{00}^2(s, t)] ds = -d_1(t). \quad (35)$$

Для випадку щілини з пружним наповнювачем інтегральне рівняння приймає вигляд:

$$F(t) - \kappa_1 \int_0^1 s (1 - s^2)^\eta F(s) [L_1(s, t) - a^{2\eta-1} W_{00}^2(s, t)] ds = bd_1(t), \quad (36)$$

де $\kappa_1 = b\mu\omega$.

Розв'язок рівнянь (35) і (36) шукатимемо у вигляді (23). З врахуванням цього інтегральні рівняння (35) і (36) приймають вигляд:

$$\mu\omega \sum_{i=0}^n m_i \left[\int_0^1 s (1 - s^2)^{\frac{1}{2}} P_i^{0, \frac{1}{2}}(1 - 2s^2) L_1(s, t) ds - \frac{2 [\Gamma(i + \frac{3}{2})]^2 P_i^{0, \frac{1}{2}}(1 - 2t^2)}{i!^2} \right] = -d_1(t),$$

для щілини вільної від навантажень,

$$\sum_{i=0}^n m_i \left[P_i^{0, \frac{1}{2}}(1 - 2t^2) - \kappa_1 \left[\int_0^1 s (1 - s^2)^{\frac{1}{2}} P_i^{0, \frac{1}{2}}(1 - 2s^2) L_1(s, t) ds - \frac{2 [\Gamma(i + \frac{3}{2})]^2 P_i^{0, \frac{1}{2}}(1 - t^2)}{i!} \right] \right] = bd_1(t)$$

для щілини з пружним наповнювачем.

Розв'язок цих рівнянь знаходимо способом застосованим до рівняння (25).

4. Числові результати

Розглянемо дископодібну щілину з пружним наповнювачем, яка знаходиться на межі пружного шару та абсолютно жорсткого півпростору (рис. 1). Радіус щілини a . Шар знаходиться під дією нормального зосередженого навантаження величини Q . Для числових розрахунків введено безрозмірні величини $\tilde{h} = h/a$, $\tilde{x} = x/a$, $\tilde{\mu} = \mu a^2/Q$, $\tilde{b} = bQ/a^2$, $\tilde{\sigma}_z(\tilde{\rho}, \tilde{h}) = \sigma_z(\rho, h)a^2/Q$, $\tilde{w}(\tilde{\rho}, \tilde{h}) = -w(\rho, h)/a$. Нижче на рисунках наведені графіки нормальних напружень $\tilde{\sigma}_z(\tilde{\rho}, \tilde{h})$ (рис. 2, 4, 6, 8) і вертикальних переміщень $\tilde{w}(\tilde{\rho}, \tilde{h})$ точок верхнього берега щілини (рис. 3, 5, 7, 9).

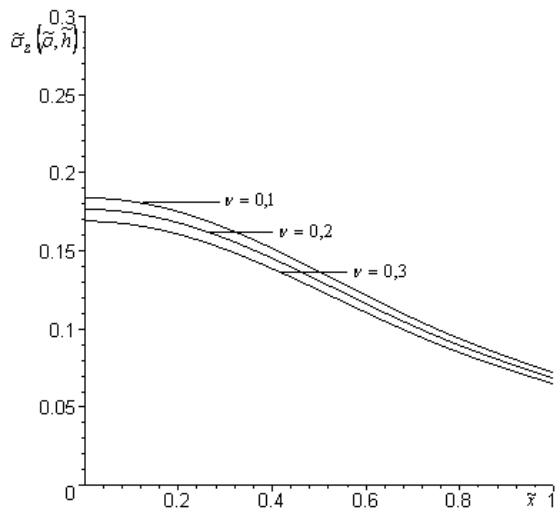


Рис. 2. Нормальні напруження $\tilde{\sigma}_z(\tilde{\rho}, \tilde{h})$ при різних значеннях коефіцієнта Пуассона ν

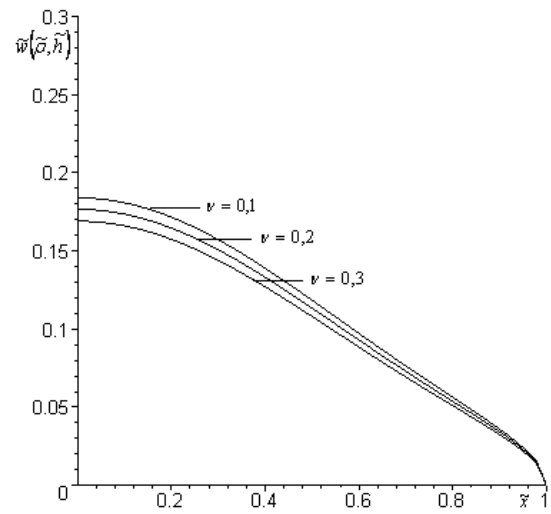


Рис. 3. Вертикальні переміщення $\tilde{w}(\tilde{\rho}, \tilde{h})$ при різних значеннях коефіцієнта Пуассона ν

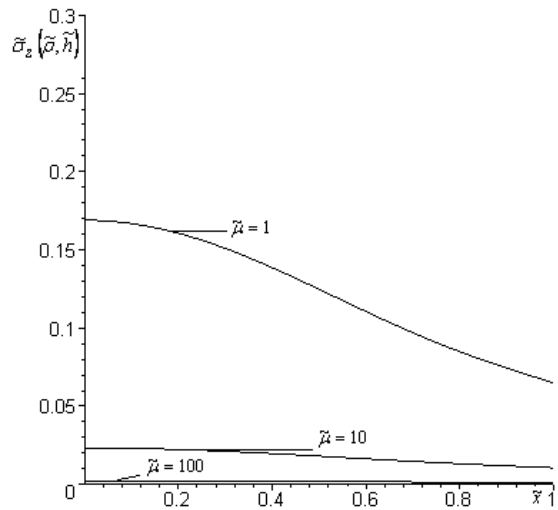


Рис. 4. Нормальні напруження $\tilde{\sigma}_z(\tilde{\rho}, \tilde{h})$ при різних значеннях модуля зсуву $\tilde{\mu}$

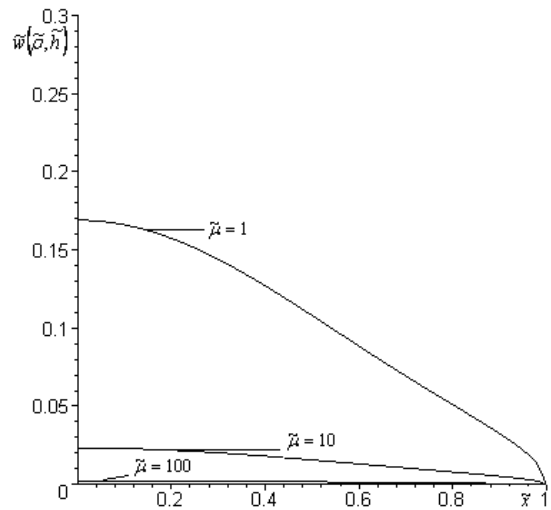


Рис. 5. Вертикальні переміщення $\tilde{w}(\tilde{\rho}, \tilde{h})$ при різних значеннях модуля зсуву $\tilde{\mu}$

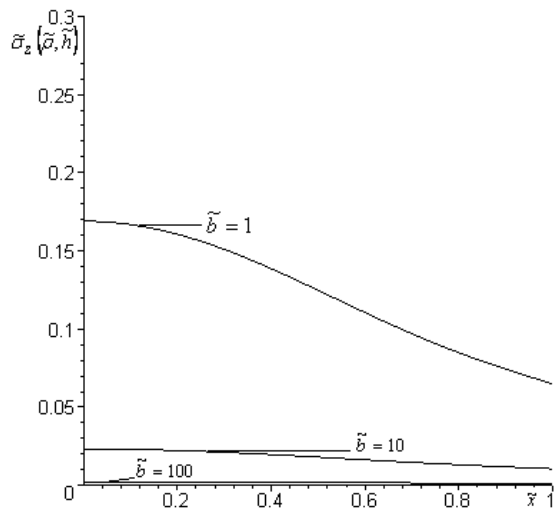


Рис. 6. Нормальні напруження $\tilde{\sigma}_z(\tilde{\rho}, \tilde{h})$ при різних значеннях коефіцієнта пружного зв'язку \tilde{b}

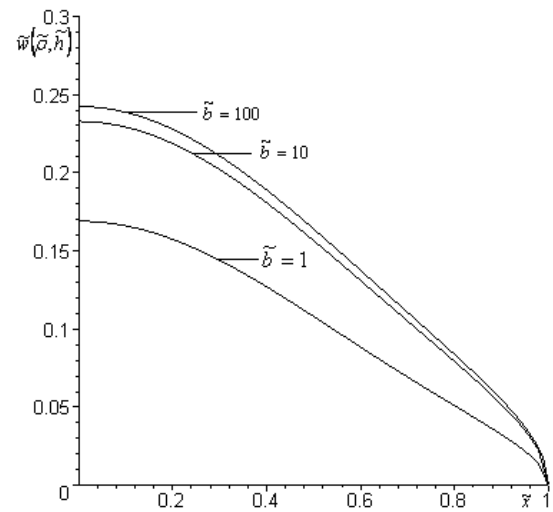


Рис. 7. Вертикальні переміщення $\tilde{w}(\tilde{\rho}, \tilde{h})$ при різних значеннях коефіцієнта пружного зв'язку \tilde{b}

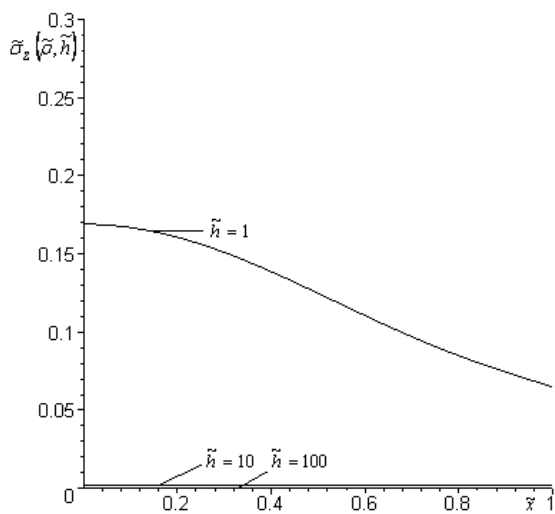


Рис. 8. Нормальні напруження $\tilde{\sigma}_z(\tilde{\rho}, \tilde{h})$ при різних значеннях товщини шару \tilde{h}

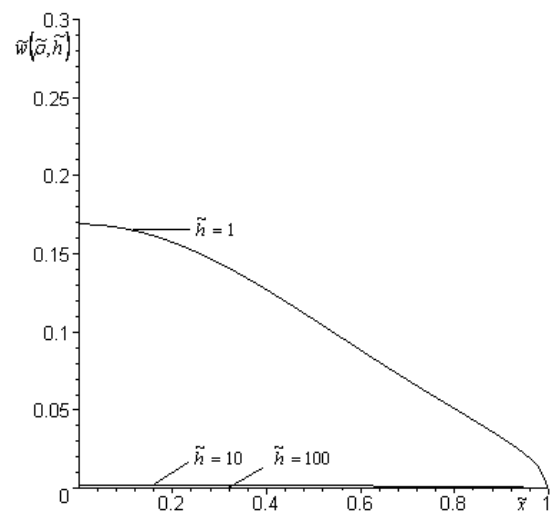


Рис. 9. Вертикальні переміщення $\tilde{w}(\tilde{\rho}, \tilde{h})$ при різних значеннях товщини шару \tilde{h}

Аналіз графіків показує, що зі збільшенням коефіцієнта Пуассона ν , модуля зсуву μ та товщини шару h спостерігається зменшення нормальних напружень $\tilde{\sigma}_z(\tilde{\rho}, \tilde{h})$ та вертикальних переміщень $\tilde{w}(\tilde{\rho}, \tilde{h})$ точок верхнього берега щілини, при

збільшенні коефіцієнта пружності \tilde{b} нормальні напруження $\tilde{\sigma}_z(\tilde{\rho}, \tilde{h})$ в точках верхнього берега щілини зменшуються, а вертикальні переміщення $\tilde{w}(\tilde{\rho}, \tilde{h})$ збільшуються. Отримані результати не суперечать фізичному сенсу.

Перелік цитованих джерел

1. *Величко І.Г., Ткаченко І.Г.* Аналітичне рішення осесиметричної задачі термоупругості для многослойного основания / І.Г. Величко, І.Г. Ткаченко // Динамічні системи. — 2009. — Вип. 26. — С. 3-12.
2. *Гузь А.Н.* Хрупке розрушення матеріалів при динамічних навантаженнях / А.Н. Гузь, В.В. Зозуля. — К.: Наук. думка, 1993. — 238 с. — (Некласичні проблеми механіки розрушення : в 4-х т., в 5-ти кн. / под общ. ред. А.Н. Гузя; Т. 4, кн.2).
3. *Мухелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мухелишвили — М.: Наука, 1966. — 708 с.
4. *Попов Г.Я.* Контактні задачі для лінійно-деформованого основания / Г.Я. Попов — К. - Одеса: Головне изд-во издат. об'єднання "Вища школа 1982. — 168 с.
5. *Черепанов Г.П.* Механіка хрупкого розрушення / Г.П. Черепанов — М.: Наука, 1974. — 640 с.
6. *Chang J.H., Wu D.J.* Computation of mixed-mode stress intensity factors for curved cracks in anisotropic elastic solids / J.H. Chang, D.J. Wu // Engineering Fracture Mechanics. — 2007. — Vol. 74. — P. 1360-1372.
7. *Dong C.Y.* The integral equation formulations of an infinite elastic medium containing inclusions, cracks and rigid lines (FEMOL) / C.Y. Dong // Engineering Fracture Mechanics. — 2008. — Vol. 75, Is. 13. — P. 3952-3965.
8. *Goldstein R. V., Vainshelbaum V. M.* Axisymmetric problem of a crack at the interface of layers in a multi-layered medium / R. V. Goldstein, V. M. Vainshelbaum // International Journal of Engineering Science — 1976. — Vol. 14, Is. 4 — P. 335-352.
9. *Kanaun S.K., Levin V.M.* Elliptical cracks arbitrarily oriented in 3D-anisotropic elastic media / S.K. Kanaun, V.M. Levin // International Journal of Engineering Science. — 2009. — Volume 47, Is. 7-8 — P. 777-792.
10. *Rekik M., Neifar M., El-Borgi S.* Three-dimensional stress distribution around an elliptical crack under arbitrary loadings / M. Rekik, M. Neifar, S. El-Borgi // International Journal of Solids and Structures — 2010. — Vol. 47, Is. 16 — P. 2043-2055.
11. *Sadowski T., Marsavina L., Peride N., Craciun E.-M.* Cracks propagation and interaction in an orthotropic elastic material: Analytical and numerical methods / T. Sadowski, L. Marsavina, N. Peride, E.-M. Craciun // Computational Materials Science. — 2009. — Vol. 46 — P. 687-693.
12. *Winiarski B., Guz I.* Plane problem for layered composites with periodic array of interfacial crack under compressive static loading / B. Winiarski, I. Guz // Int J Fract. — 2007. — №144. — P. 113-119.
13. *Xiangqiao Yan* Automated simulation of fatigue crack propagation for two-dimensional linear elastic fracture mechanics problems by boundary element method / Xiangqiao Yan // Engineering Fracture Mechanics. — 2007. — Vol. 74, Issue 14 — P. 2225-2246.

Получена 01.03.2010