*Динамические системы, вып. 24 (2008), 25–31*

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 519.911

# Якісний аналіз однієї сингулярної задачі Коші: розв'язність, кількість розв'язків, асимптотики розв'язків

**О.Є. Зернов***, **Ю.В. Кузіна****

* Південноукраїнський державний педагогічний університет ім. К. Д. Ушинського, Одеса 65027. *E-mail: zernov@ukr.net*

** Одеський інститут фінансів Українського державного університета фінансів та міжнородної торговлі,
Одеса 65080. *E-mail: yuliak@te.net.ua*

**Анотація.** Розглядається сингулярна задача Коші для неявного диференціального рівняння. Доведено існування неперервно диференційовних розв'язків, досліджено асимптотичну поведінку цих розв'язків, визначена їх кількість. Крім того, вивчено асимптотичну повединку перших похідних знайдених розв'язків. Ми користуємося методами якісної теорії диференціальних рівнянь та функціонального аналізу. Всі умови є ефективними.

Сингулярна задача Коші для диференціального рівняння, розв'язаного відносно похідної, достатньо докладно вивчена; одержані суттеві результати як щодо розв'язністі та кількісті розв'язків [10, 13], так і щодо асимптотичних властивостей розв'язків [1, 5]. Але при дослідженні задач Коші для диференціального рівняннння, не розв'язаного відносно похідної, в основному розглядалися лише питання розв'язності [3, 12, 15] й збіжності до розв'язку послідовностей наближень [2, 11, 14, 16], але асимтотика розв'язків вивченна порівнянно мало навіть в регулярному випадку. В цієй роботі досліджується проблема існування, кількості розв'язків та асимптотичної поведінки ціх розв'язків і їх перших похідних однієї сингулярної задачі Коші для диференціального рівняння, не розв'язного відносно похідної невідомої функції. При аналізі задачі використуються методи якісної теорії диференціальних рівняннь [4, 5, 6]. Робота продовжує дослідження авторів початі в роботах [7, 8, 9].

Розглядається задача Коші

$$\alpha(t)x'(t) = at + bx(t) + \varphi(t, x(t), x'(t)) = 0, \tag{1}$$

$$x(0) = 0, \tag{2}$$

де $x : (0, \tau) \to \mathbb{R}$ — невідома функція. Нехай виконані наступні *умови (А)*:

© *О. Є. ЗЕРНОВ, Ю. В. КУЗІНА*

1) $a, b$ — сталі, $b \neq 0$;

2) $\alpha : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ — неперервна функція, $\lim_{t \to +0} \alpha(t) = 0$;

3) $\varphi : D \to \mathbb{R}$ — неперервна функція,

$$D = \{(t, x, y) : t \in (0, \tau), \quad |x + \frac{a}{b}t| < \gamma_1(t), \quad |y + \frac{a}{b}| < \gamma_2(t)\},$$

де $\gamma_i : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ — неперервні функції, $\lim_{t \to +0} \gamma_i(t) = 0$, $i \in \{1, 2\}$.

**Означення 1.** Розв'язком задачі (1), (2) назвемо неперервно диференційовну функцію $x : (0, \rho] \to \mathbb{R}$, $0 < \rho < \tau$, яка тотожно задовольняє рівняння (1) при всіх $t \in (0, \rho]$ та, крім того, задовольняє умову $\lim_{t \to +0} x(t) = 0$.

Нехай сталі $c_1$, $c_2$ визначені рівностями

$$c_1 = -\frac{a}{b}, \quad c_2 = -\frac{a}{b^2}. \tag{3}$$

Назвемо *умовами (B)* сукупність наступних умов:

1) $|\varphi(t, x_1, y_1) - \varphi(t, x_2, y_2)| \leq l_2 \frac{\alpha(t)}{t} |x_1 - x_2| + l_3 \alpha(t) |y_1 - y_2|$ для будь-яких $(t, x_1, y_1) \in D$, $(t, x_2, y_2) \in D$, де $l_2, l_3$ — додатні сталі, $l_2 + l_3 < \frac{1}{2}$;

2) $\alpha : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ — неперервно диференційовна функція, причому

$$\lim_{t \to +0} \frac{\alpha(t)}{\gamma_1(t)} = 0, \quad \lim_{t \to +0} \alpha'(t) = 0, \quad \lim_{t \to +0} t \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} = \lambda_1,$$

де $\lambda_1$ — невід'ємна стала;

3) $|c_2| \, \alpha(t) < \gamma_1(t)$, $|c_2| \, \alpha'(t) < \gamma_2(t)$, $t \in (0, \tau)$;

4) існує неперервно диференційовна функція $\beta : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ така, що

$$|\varphi(t, c_1 t + c_2 \alpha(t), c_1 + c_2 \alpha'(t))| \leq \alpha(t) \beta(t), t \in (0, \tau)$$

та, крім того,

$$\lim_{t \to +0} \frac{\beta(t)}{\gamma_2(t)} = 0, \quad \lim_{t \to +0} \frac{\alpha(t)}{t \beta(t)} = \lambda_2, \quad \lim_{t \to +0} t \frac{\beta'(t)}{\beta(t)} = \lambda_3,$$

де $\lambda_2$, $\lambda_3$ — невід'ємні сталі.

**Теорема.** *Якщо виконані умови (A),(B), то існують сталі $\rho \in (0, \tau)$, $M > 0$, $q > 0$ такі, що:*

*a) якщо $b > 0$, то у задачі (1), (2) існує континуум $\Omega$ розв'язків $x : (0, \rho] \to \mathbb{R}$, кожен з яких задовольняє умовам*

$$|x(t) - c_1 t - c_2 \alpha(t) \leq M \alpha(t) \beta(t), \tag{4}$$

$$|x'(t) - c_1 - c_2 \alpha'(t)| \leq q M \beta(t), \tag{5}$$

*де сталі $c_1$ та $c_2$ означені формулами (3). Якщо $\xi$ — будь-яка стала, яка задовольняє умову*

$$|\xi - c_1\rho - c_2\alpha(\rho)| < M\alpha(\rho)\beta(\rho),$$

*то в континуумі $\Omega$ існує єдиний розв'язок $x_\xi : (0,\rho] \to \mathbb{R}$ такий, що $x_\xi(\rho) = \xi$;*

*б) якщо $b < 0$, то у задачі (1),(2) існує єдиний розв'язок $x : (0,\rho] \to \mathbb{R}$, який задовольняє умови (4), (5).*

*Доведення.* Нехай сталі $M$ та $q$ задовольняють умови

$$2\,|b| < q < \frac{|b|}{l_3}, \quad M > \frac{|c_2|\,\lambda_1\lambda_2 + 1}{|b| - l_3 q}.$$

Одночасно припускається, що $\rho > 0$ задовольняє умову

$$\rho < \min\{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5\}$$

(всі сталі $\rho_i$ визначаються далі). Достатня малість $\rho$ забезпечує коректність всіх наступних міркувань. Означимо через $B$ множину всіх неперервно диференційовних функцій $x : (0,\rho] \to \mathbb{R}$ з нормою

$$\|x\|_B = \max_{t\in[0,\rho]} (|x(t)| + |x'(t)|)\,.$$

Означимо через $U$ підмножину $B$, кожний елемент $u : [0,\rho] \to \mathbb{R}$ якої задовольняє нерівності

$$\begin{array}{rcll} |u(t) - c_1 t - c_2\alpha(t)| & \le & M\alpha(t)\beta(t), & t \in (0,\rho]\,, \\ |u'(t) - c_1 - c_2\alpha'(t)| & \le & qM\beta(t), & t \in (0,\rho]\,, \end{array}$$

причому $u(0) = 0$, $u'(0) = c_1$. Очевидно, що $U$ — замкнена й обмежена множина.

Існує таке $\rho_1 \in (0,\tau)$, що для всіх $t \in (0,\rho]$, де $\rho \le \rho_1$, виконується умова:

$$(t, u(t), u'(t)) \in D$$

для всіх $u \in U$.

Надалі будемо розглядати диференціальне рівняння

$$x'(t) = \frac{1}{\alpha(t)}\,(at + bx(t) + \varphi(t, u(t), u'(t))), \tag{6}$$

де $u \in U$ — будь-яка фіксована функція. Означимо

$$D_0 = \{(t,x) : t \in (0,\rho]\,, x \in \mathbb{R}\}\,.$$

Всюди в $D_0$ для рівняння (6) виконуються умови теореми існування й єдності розв'язків задачі Коші та неперервної залежності розв'язку від початкових даних. Введемо наступні означення:

$$\begin{array}{rcl} \Phi_1 & = & \{(t,x) : t \in (0,\rho]\,, |x - c_1 t - c_2\alpha(t)| = M\alpha(t)\beta(t)\}\,, \\ D_1 & = & \{(t,x) : t \in (0,\rho]\,, |x - c_1 t - c_2\alpha(t)| < M\alpha(t)\beta(t)\}\,, \\ H & = & \{(t,x) : t = \rho, \quad |x - c_1\rho - c_2\alpha(\rho)| < M\alpha(\rho)\beta(\rho)\}\,. \end{array}$$

Нехай функція $A_1 : D_0 \to [0, +\infty)$ означена рівністю

$$A_1(t, x) = (x - c_1 t - c_2 \alpha(t))^2 (\alpha(t)\beta(t))^{-2}$$

та нехай $a_1 : D_0 \to \mathbb{R}$ — похідна цієї функції в силу рівняння (6). Неважко переконатися в тому, що існує таке $\rho_2 \in (0, \tau)$, що для всіх $t \in (0, \rho]$, де $\rho \leq \rho_2$, виконується умова:

$$\operatorname{sign} a_1(t, x) = \operatorname{sign} b, \quad (t, x) \in \Phi_1. \tag{7}$$

а) Нехай $b > 0$. Тоді $a_1(t, x) > 0$, $(t, x) \in \Phi_1$. Тому ([8], стор.65–66) кожна з інтегральних кривих рівняння (6), які перетинають $H$, означена при $t \in (0, \rho]$ та лежить в $D_1$ при всіх $t \in (0, \rho]$. Розглянемо деяку фіксовану точку $G(\rho, x_G) \in H$ та позначимо через $I_u : (t, x_u(t))$ інтегральну криву рівняння (6), яка проходить через цю точку. На підставі сказаного,

$$|x_u(t) - c_1 t - c_2 \alpha(t)| < M\alpha(t)\beta(t), \quad t \in (0, \rho]\,. \tag{8}$$

Легко бачити, що

$$|x'_u(t) - c_1 - c_2 \alpha'(t)| < qM\beta(t), \quad t \in (0, \rho]\,. \tag{9}$$

Покладемо за означенням $x_u(0) = 0$, $x'_u(0) = c_1$. Тоді $x_u \in U$. Означимо оператор $T : U \to U$ рівністю

$$Tu = x_u. \tag{10}$$

б) Нехай $b < 0$. Тоді $a_1(t, x) < 0$ , $(t, x) \in \Phi_1$. Тому ([8], стор.66) серед інтегральних кривих рівняння (6), які перетинають $H$, знайдеться хоча б одна, яка означена при $t \in (0, \rho]$ та лежить в $D_1$ при всіх $t \in (0, \rho]$. Позначимо цю інтегральну криву через $I_u : (t, x_u(t))$. Доведемо тепер, що $I_u : (t, x_u(t))$ — це є єдина інтегральна крива рівняння (6) з такими властивостями. Для цього розглянемо однопараметричні сім'ї множин

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \{(t, x) : t \in (0, \rho]\,, |x - x_u(t)| = \nu\alpha(t)\beta(t)(-\ln t)\}\,, \\ D_2 &= \{(t, x) : t \in (0, \rho]\,, |x - x_u(t)| < \nu\alpha(t)\beta(t)(-\ln t)\}\,, \end{aligned}$$

де $\nu$ — параметр, $\nu \in (0, 1]$. Нехай функція $A_2 : D_0 \to [0, +\infty)$ означена рівністю

$$A_2(t, x) = (x - x_u(t))^2 (\alpha(t)\beta(t)(-\ln t))^{-2}$$

та нехай $a_2 : D_0 \to \mathbb{R}$ — похідна цієї функції в силу рівняння (6). Легко бачити, що існує таке $\rho_3 \in (0, \tau)$, що для всіх $t \in (0, \rho]$, де $\rho \leq \rho_3$, виконується умова:

$$a_2(t, x) < 0, \quad (t, x) \in D_0,$$

якщо тільки $x \neq x_u(t)$. Зокрема, $a_2(t, x) < 0$, якщо $(t, x) \in \Phi_2(\nu)$ для кожного $\nu \in (0, 1]$. Звідси випливає ([8], стор.66–67) справедливість твердження, яке доводиться. Як й у випадку $b > 0$, виконані умови (8), (9). Якщо покласти за означенням $x_u(0) = 0$, $x'_u(0) = c_1$, тоді $x_u \in U$. Означимо оператор $T : U \to U$ рівністю (10).

Доведемо, що $T : U \to U$ — оператор стиску. Нехай $u_1 \in U$, $u_2 \in U$ — будь-які фіксовані функції. Позначимо $Tu_i = x_i$, $i \in \{1, 2\}$. Якщо $u_1 = u_2$, то $x_1 = x_2$. Нехай далі $\|u_1 - u_2\|_B = h$, $h > 0$. Будемо досліджувати поведінку інтегральних кривих диференціального рівняння

$$x'(t) = \frac{1}{\alpha(t)} \left(at + bx(t) + \varphi(t, u_1(t), u_1'(t))\right). \tag{11}$$

Введемо позначення

$$\begin{aligned} \Phi_3 &= \{(t, x) : t \in (0, \rho], |x - x_2(t)| = \gamma h \alpha(t)\}, \\ D_3 &= \{(t, x) : t \in (0, \rho], |x - x_2(t)| < \gamma h \alpha(t)\}, \end{aligned}$$

де $\gamma$ — стала, яка задовольняє умову

$$\frac{l_2 + l_3}{|b|} < \gamma < \frac{1 - (l_2 + l_3)}{|b|}.$$

Нехай функція $A_3 : D_0 \to [0, +\infty)$ означена рівністю

$$A_3(t, x) = (x - x_2(t))^2 (\alpha(t))^{-2}$$

та нехай $a_3 : D_0 \to \mathbb{R}$ — похідна цієї функції в силу рівняння (11). Легко бачити, що існує таке $\rho_4 \in (0, \tau)$, що для всіх $t \in (0, \rho]$, де $\rho \le \rho_4$, виконується умова:

$$\operatorname{sign} a_3(t, x) = \operatorname{sign} b, \quad (t, x) \in \Phi_3. \tag{12}$$

а) Нехай $b > 0$. Тоді $a_3(t, x) > 0$, $(t, x) \in \Phi_3$. Тому ([8], стор.67–68) інтегральна крива $I_u : (t, x_u(t))$ не має спільних точок з $\Phi_3$ та, отже, ця інтегральна крива лежить в $D_3$ при всіх $t \in (0, \rho]$. Це означає, що

$$|x_1(t) - x_2(t)| \le \gamma h \alpha(t), \quad t \in (0, \rho]. \tag{13}$$

Тому

$$|x_1'(t) - x_2'(t)| \le (|b| \gamma + l_2 + l_3) h, \quad t \in (0, \rho], \tag{14}$$

звідки

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |x_1'(t) - x_2'(t)| \le (|b| \gamma + l_2 + l_3 + o(1)) h, \quad t \to +0. \tag{15}$$

Існує таке $\rho_5 \in (0, \tau)$, що для всіх $t \in (0, \rho]$, де $\rho \le \rho_5$, виконується умова

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |x_1'(t) - x_2'(t)| \le \theta h, \quad t \in (0, \rho], \tag{16}$$

де

$$\theta = \frac{1}{2} \left(1 + |b| \gamma + l_2 + l_3\right);$$

очевидно, $0 < \theta < 1$. Отже,

$$\max_{t\in[0,\rho]}(|x_1(t) - x_2(t)| + |x_1'(t) - x_2'(t)|) \le \theta h, \tag{17}$$

або

$$\|Tu_1 - Tu_2\|_B \le \theta \|u_1 - u_2\|_B\,, \tag{18}$$

де $0 < \theta < 1$. Проведені міркування не залежать від обрання функцій $u_i \in U$, $i \in \{1, 2\}$. Тому $T : U \to U$ — оператор стиску.

б) Нехай $b < 0$. Тоді $a_3(t, x) < 0$, $(t, x) \in \Phi_3$. При цьому

$$\begin{aligned} |x_1(t) - x_2(t)| &\le |x_1(t) - c_1 t - c_2\alpha(t)| + |x_2(t) - c_1 t - c_2\alpha(t)| \le \\ &\le 2M\alpha(t)\beta(t) < \gamma h\alpha(t), \end{aligned}$$

якщо $t \in (0, t(h)]$, де $t(h) \in (0, \rho)$ достатньо мале. Тому інтегральна крива $I_u : (t, x_u(t))$ рівняння (11) лежить в $D_3$ при $t \in (0, t(h)]$, звідки виходить ([8], стор.67–69), що ця інтегральна крива буде залишатися в $D_3$ при всіх $t \in (0, \rho]$. Далі, як й у випадку $b > 0$, одержимо оцінки (13)–(18). Таким чином, $T : U \to U$ — оператор стиску. Для завершення доведення теореми достатньо застосувати до оператора $T : U \to U$ принцип Банаха стиснутих відображень. □

## Перелік цитованих джерел


1. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М: Мир, 1968. — 464 с.
2. *Витюк А. Н.* Обобщенная задача Коши для системы дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных // Дифференц. уравнения — 1971. — Т. 7, № 9. — С. 1575–1580.
3. *Давыдов А. А.* Нормальная форма дифференциального уравнения, не разрешенного отностительно производной, в окрестности особой точки // Функц. анал. Прилож. — 1995. — Т. 19, № 2. — С. 1–10.
4. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости.. — М: Наука, 1967. — 472 с.
5. *Еругин Н. П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. — Минск: Наука и техника, 1972. — 664 с.
6. *Зернов А.Е.* Качественный анализ неявной сингулярной задачи Коши // Укр. матем. журн. — 2001. — Т. 53, № 3. — С. 302–310.
7. *Зернов А. Е., Кузина Ю. В.* Качественное исследование сингулярной задачи Коши $F(t, x(t), x'(t)) = 0, x(0) = 0$ // Укр. матем. журн. — 2003. — Т. 55, № 12. — С. 1720–1723.
8. *Зернов А. Е., Кузина Ю. В.* Геометричний аналіз задачі Коші для неявного диференціального рівняння // Матем. Студії. — 2008. — Т. 29, № 1. — С. 63–70.
9. *Зернов А. Е., Кузина Ю. В.* Геометрический анализ некоторой сингулярной задачи Коши // Нелін. коливання. — 2004. — Т. 7, № 1. — С. 67–80.

10. *Кигурадзе И. Т.* О задаче Коши для сингулярных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения — 1965. — Т. 1, № 10. — С. 1271–1291.
11. *Рудаков В. П.* О существовании и единственности решения систем дифференциальных уравнений первого порядка, частично разрешенных относительно производных // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1971., № 9. — С. 79–84.
12. *Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О.* Диференціальні рівняння. — К: Либідь, 2003. — 600 с.
13. *Чечик В. А.* Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностью // Труды Московск. матем. об-ва. — 1959. № 8. — С. 155–198.
14. *Anichini G., Conti G.* Boundary value problems for implicit ODE's in a singular case // Differential Equations and Dynamical Systems. — 1999. — B. 7, № 4. — P. 437–459.
15. *Conti R.* Sulla risoluzione dell'equazione $F(t, x, \frac{dx}{dt}) = 0$ //Ann. mat. pura ed appl.— 1959.— № 48. — P. 97–102.
16. *Kowalski Z.* The polygonal method of solving the differential equation $y' = h(t, y, y, y')$ // Ann. polon. math. — 1963. — B. 13, № 2. — P. 173–204.

*Получена 2.05.2008*