Динамические системы, вып. 22 (2007), 11–20

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 519.642+517.968

О минимизации объема дискретной информации при решении некорректных задач

Е. А. Лукьянова[*], Е. А. Волынец[**]
[*] Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского,
Симферополь 95007. *E-mail: lukyanovaea@mail.ru*
[**] Верховная Рада АРК,
Симферополь, 95003. *E-mail: gentoo@list.ru*

Аннотация. Построен новый класс проекционных методов решения некорректных задач в смысле Адамара. Установлено, что методы из этого класса достигают оптимальный порядок точности восстановления нормального решения при минимально возможных затратах галеркинской информации.

1. Введение

Пусть X - гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и порождаемой им нормой $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.

В пространстве X рассмотрим линейное операторное уравнение I рода

$$Ax = f, \tag{1.1}$$

где свободный член f принадлежит множеству $\mathrm{Range}(A) := \{f : f = Ag, g\in X\}$. Будем считать, что вместо функции f задано некоторое её возмущение $f_\delta\in X$, такое что $\|f - f_\delta\| \le \delta, \delta > 0$.

В настоящей работе исследуется задача приближенного восстановления решения (1.1) с минимальной нормой в X, которое принято называть нормальным решением и обозначать $x^\dagger$. В отношении $x^\dagger$ примем стандартное предположение гладкости

$$x^\dagger\in M_{\nu,\rho}(A) = \{x : x = |A|^\nu u, \|u\| < \rho\}. \tag{1.2}$$

Здесь $|A| = (A^*A)^{1/2}$, A^* - сопряженный к A оператор, $\rho > 0$ — известный параметр, а об неизвестном параметре ν, характеризующем степень гладкости решения, известно лишь, что он принадлежит интервалу $[1, \nu_1], 1 < \nu_1 < \infty$.

Хорошо известно (см., например, [1, с.43]), что $\overline{\mathrm{Range}(|A|^\nu)} = \overline{\mathrm{Range}(A^*)}$ при любом $\nu > 0$ и элементы множества $M_{\nu,\rho}(A)$ образуют всюду плотное множество в подпространстве $\mathrm{Ker}(A)^\perp$, которому принадлежит $x^\dagger$, то есть любое нормальное решение уравнения (1.1) может быть сколь угодно близко приближено элементом из $M_{\nu,\rho}(A)$.

Выберем в X некоторый ортонормированный базис $E = \{e_k\}_{k=1}^\infty$. Под P_m, как обычно, будем понимать ортопроектор на линейную оболочку элементов $e_1, e_2, \ldots, e_m$, то есть $P_m f = \sum_{k=1}^m (f, e_k) e_k$. Пусть $r, s \in \mathbb{N}$. Обозначим через $\mathcal{H}_\gamma^{r,s}$ класс линейных компактных операторов A, $\|A\| \le \gamma$, действующих в X и удовлетворяющих условиям

$$\|(I - P_m)A\| \le \beta_r m^{-r}, \|A(I - P_m)\| \le \beta_s m^{-s} \tag{1.3}$$

при любых $m = 1, 2, \ldots$ и некоторых фиксированных $r > s$ и константах $\beta_r, \beta_s > 0$. Будем считать, что $\mathcal{H}_\gamma^{r,s}$ не является пустым множеством.

В случае $X = L_2(0,1)$ содержательным примером уравнения (1.1) с оператором $A \in \mathcal{H}_\gamma^{r,s}$ может служить интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$Ax(t) \equiv \int_0^1 k(t,\tau) x(\tau) d\tau = f(t), \quad t \in [0,1],$$

с ядром $k(t,\tau)$, которое имеет r ограниченных в метрике $L_2(0,1)$ производных по внешней переменной и s производных – по внутренней. Тогда в качестве базиса E, удовлетворяющего (1.3), могут быть использованы: подпространство тригонометрических многочленов (в случае периодических коэффициентов $k(t,\tau), f(t)$) и ортонормированная система полиномов Лежандра, рассматриваемая на отрезке $[0,1]$ (в общем случае).

2. Постановка задачи

Класс уравнений (1.1) с $A \in \mathcal{H}_\gamma^{r,s}$ и f_δ, заполняющими весь шар в пространстве X радиуса δ с центром в f, где $f \in AM_{\nu,\rho}(A) = \{f : f = Av, v \in M_{\nu,\rho}(A)\}$, а ν пробегает весь интервал $[1, \nu_1]$, обозначим через $\Psi_{\rho,\delta}^{r,s}$.

Известно (см., например, [1, с.14]), что если $x^\dagger \in M_{\nu,\rho}(A)$, то гарантированная точность восстановления такого решения не может быть меньше величины $\rho^{1/(\nu+1)} \delta^{\nu/(\nu+1)}$.

Под дискретной информацией об уравнении (1.1) будем понимать набор значений скалярных произведений следующего вида

$$(Ae_j, e_i), (f_\delta, e_i), \tag{2.1}$$

где элементы $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ составляют базис, фигурирующий в определении класса операторов $\mathcal{H}_\gamma^{r,s}$. Дискретную информацию вида (2.1) принято называть галеркинской информацией, а методы, использующие для своей реализации галеркинскую информацию – проекционными.

Целью настоящей работы является построение проекционных методов решения (1.1), достигающих на всем классе $\Psi_{\rho,\delta}^{r,s}$ оптимальный порядок точности $O(\delta^{\nu/(\nu+1)})$ с минимально возможными затратами галеркинской информации (2.1).

В случае $r = s$ эта задача была решена ранее в [2]. Очевидно, что при фиксированном s рассматриваемый класс уравнений $\Psi^{r,s}_{\rho,\delta}$, где $r > s$, у́же класса $\Psi^{s,s}_{\rho,\delta}$ с изотропной гладкостью, который был рассмотрен в [2]. Ниже будет показано, что в нашем случае за счет сужения класса уравнений удается сократить объем используемой галеркинской информации на логарифмический множитель по сравнению с результатом, полученным в [2].

3. Один класс регуляризирующих методов

Поскольку в уравнении (1.1) оператор A – компактный, то такая задача является некорректной в смысле Адамара. В силу этого факта построение устойчивого приближения к $x^\dagger$ требует применения специальных регуляризирующих методов (см. [3]), осуществляющих переход от некорректной задачи к регуляризованному уравнению, процесс приближенного решения которого устойчив.

В рамках настоящей статьи ограничимся одним классом регуляризирующих методов, который впервые был введен в рассмотрение в [4]. Итак, под методом регуляризации будем понимать оператор $R_\alpha = R_\alpha(A) : X \to X$, такой, что в качестве приближенного решения берется элемент $x_\alpha = R_\alpha(A) f_\delta$, где $\alpha > 0$ называют параметром регуляризации и $R_\alpha(A) = g_\alpha(A^*A)A^*$. Здесь $g_\alpha(\lambda)$ измерима по Борелю на отрезке $[0, \gamma]$ и удовлетворяет условиям

$$\sup_{0 \le \lambda < \infty} \lambda^\nu |1 - \lambda g_\alpha(\lambda)| \le \chi_\nu \alpha^\nu, \tag{3.1}$$

$$\sup_{0 \le \lambda < \infty} \lambda^{1/2} |g_\alpha(\lambda)| \le \chi_* \alpha^{-1/2}, \tag{3.2}$$

где

$$0 \le \nu \le \nu_*, \nu_1 \le 2\nu_* - 1, \tag{3.3}$$

$\chi_\nu (\chi_0 = 1)$, χ_* - положительные не зависящие от α константы и ν_* — квалификация метода R_α. Условиям (3.1)-(3.3) удовлетворяют такие хорошо известные методы регуляризации, как, например, метод Тихонова с $g_\alpha(\lambda) = (\alpha + \lambda)^{-1}$и $\nu_* = 1$, метод Ландвебера с $g_\alpha(\lambda) = \lambda^{-1}[1 - (1 - \mu\lambda)^{1/\alpha}]$ и $\nu_* = \infty, 0 < \mu < 2$, а также метод асимптотической регуляризации (или метод установления) с $g_\alpha(\lambda) = \lambda^{-1}(1 - \exp(-\lambda/\alpha))$ и $\nu_* = \infty$.

4. Модифицированная проекционная схема

Переход от бесконечномерной регуляризованной задачи к конечномерному уравнению в теории некорректных задач принято называть дискретизацией, в результате которой во время построения приближенного решения используется только дискретная информация об операторе A и возмущенной правой части f_δ.

При решении уравнений (1.1) естественным образом встает вопрос об уменьшении общего количества дискретной информации, используемой той или иной схемой дискретизации.

В настоящей статье для построения конечномерного приближения предлагается модифицированная проекционная схема дискретизации, суть которой состоит в замене оператора A и элемента f_δ их конечномерными аналогами следующего вида

$$A_n = \sum_{k=1}^{n}(P_{2^k} - P_{2^{k-1}})AP_{2^{bn-ak}} + P_1 AP_{2^{bn}}, \quad P_{2^n} f_\delta = \sum_{k=1}^{2^n}(f_\delta, e_k)e_k, \tag{4.1}$$

где задействован базис $E = \{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, фигурирующий в определении $\mathcal{H}_\gamma^{r,s}$.

В рамках предлагаемой проекционной схемы (4.1) используется гиперболический крест, под которым понимается множество координатной плоскости $i0j$ следующего вида

$$\begin{gathered}\Gamma_n^{a,b} = \bigcup\nolimits_{k=0}^{n} Q_k, Q_0 = \{1\} \times \{2^{bn}\}, \\ Q_k = (2^{k-1}, 2^k] \times [1, 2^{bn-ak}], k = 1, 2, \ldots, n,\end{gathered} \tag{4.2}$$

где a и b - произвольные вещественные числа, такие что $b \geq a \geq 0$. Фигура $\Gamma_n^{a,b}$ состоит из прямоугольников $Q_k, k = 0, 1, \ldots, n$, левые нижние углы которых имеют координаты $(2^{k-1}, 1)$, а правые верхние — $(2^k, 2^{bn-ak})$. Координаты (i, j) правых верхних углов прямоугольников Q_k лежат на гиперболе $i^a j = 2^{bn}$, а само множество $\Gamma_n^{a,b}$ лежит внутри области, имеющей границы $\{i = 2^n, 1 \leq j \leq 2^{(b-a)n}\}$ и $\{i^a j = 2^{bn}, 2^{(b-a)n} \leq j \leq 2^{bn}\}$. В случае $a = 0$ фигура $\Gamma_n^{a,b}$ трансформируется в прямоугольник $[2^n, 2^{bn}]$, т.е. получаем стандартную проекционную схему Галеркина. Ниже будет показано, что минимальные информационные затраты в рамках исследуемой задачи достигаются при $a > 1$. Этот факт свидетельствует о том, что модифицированная проекционная схема является более экономичной по сравнению со стандартным методом Галеркина. Следует тут же отметить, что модифицированная проекционная схема (4.1) при $b = 2$ и $a = 1$ была впервые использована в [5] для решения уравнений (1.1) в случае известного параметра $\nu = 2$, а в общем виде была приведена в [6].

При вычислении оптимальных значений параметров модифицированной проекционной схемы следует выбирать параметры a и b в зависимости от "дифференциальных" характеристик оператора уравнения (1.1) и от гладкостных свойств искомого решения, а параметр n – в зависимости от уровня возмущения δ правой части решаемого уравнения (1.1).

Таким образом, предлагаемая проекционная схема состоит в выборе скалярных произведений (2.1) с номерами из гиперболического креста $\Gamma_n^{a,b}$ (4.2), задействованных при построении конечномерных элементов вида (4.1).

Общее количество скалярных произведений (2.1), используемых при дискретизации операторного уравнения (1.1) в рамках модифицированной проекционной схемы (4.1), обозначим $\mathrm{card}(\Gamma_n^{a,b})$. Известно [7, §1.2], что для величины $\mathrm{card}(\Gamma_n^{a,b})$ справедливы следующие (порядковые по n) оценки

$$\mathrm{card}(\Gamma_n^{a,b}) \asymp \left\{\begin{array}{ll} 2^{(b-a+1)n}, & a < 1 \\ 2^{bn} n, & a = 1 \\ 2^{bn}, & a > 1 \end{array}\right. . \tag{4.3}$$

Величину $\mathrm{card}(\Gamma_n^{a,b})$ будем рассматривать в качестве целевой функции, зависящей от трех параметров: a, b и n. При этом из (4.3) следует, что для отыскания минимума целевой функции (то есть для обеспечения минимальной площади $\Gamma_n^{a,b}$) требуется вычислить наименьшие значения параметров b и n, а также наибольшее значение параметра a среди допустимых.

5. Регуляризирующие проекционные методы

При построении конечномерного приближения к $x^\dagger$ будем определять приближенное решение $\hat{x}_\alpha$ по правилу

$$\hat{x}_\alpha = R_\alpha(A_n)P_{2^n}f_\delta. \tag{5.1}$$

При этом регуляризирующий метод R_α выбирается из описанного выше (см. §3) класса регуляризаторов, т.е. удовлетворяет условиям (3.1)–(3.3), оператор A_n представлен в виде (4.1), а в качестве значения параметра дискретизации целесообразно взять (см. [6]) наименьшее целое $n > 0$, такое что

$$2^{-2rn} = O(\delta). \tag{5.2}$$

Соответствующая вычислительная процедура останавливается согласно принципу невязки [8], т.е. сразу как только параметр α удовлетворит следующему условию

$$b_1\delta \le \| P_{2^n}f_\delta - A_n\hat{x}_\alpha \| \le b_2\delta \tag{5.3}$$

при некоторых фиксированных константах $2 < b_1 \le b_2$.

Любой регуляризирующий проекционный метод вида (4.1), (5.1)–(5.3) будем обозначать $(R_\alpha, A_n, b_1, b_2)$.

6. Минимизация объема галеркинской информации

В работе [6] было показано, что для достижения оптимального порядка точности на классе $\Psi^{s,s}_{\rho,\delta}$ в рамках модифицированной проекционной схемы необходимо, чтобы выполнялись условия

$$\|A_n x^\dagger - P_{2^n}f_\delta \| = O(\delta), \tag{6.1}$$

$$\| |A|^\nu - |A_n|^\nu \| = O(\delta^{\nu/(\nu+1)}). \tag{6.2}$$

Таким образом, ближайшая наша цель состоит в подборе таких значений параметров a и b, которые, с одной стороны, способны гарантировать справедливость оценок (6.1), (6.2), а с другой - обеспечивают минимальные затраты галеркинской информации в смысле величины $\mathrm{card}(\Gamma_n^{a,b})$ (4.3).

Для изложения дальнейших рассуждений нам потребуются 2 вспомогательных соотношения (см. леммы 3.2 и 3.1 [7] соответственно)

$$\|(A_n - P_{2^n}A)|A|^\nu u \| \le \rho c_1 2^{-vn}, \tag{6.3}$$

$$\|A^*A - A_n^*A_n\| \leq \beta_r^2 2^{-2rn} + c_2 2^{-yn}, \tag{6.4}$$

где c_1, c_2 - константы, не зависящие от δ, $vn = 2sn(b-a)$, $yn = bsn - (as-r)_+n$. Здесь, как обычно,

$$g_+n = \begin{cases} 0 & , g < 0 \\ \log_2 n & , g = 0 \\ gn & , g > 0 \end{cases} .$$

Далее, запишем очевидное соотношение

$$\|A_nx^\dagger - P_{2^n}f_\delta\| \leq \|A_nx^\dagger - P_{2^n}f\| + \|P_{2^n}(f - f_\delta)\| \leq \|A_nx^\dagger - P_{2^n}f\| + \delta. \tag{6.5}$$

В силу (6.3), (6.5) и соотношения

$$\|A_nx^\dagger - P_{2^n}f\| = \|(A_n - P_{2^n}A)|A|^\nu u\| \tag{6.6}$$

имеем

$$\|A_nx^\dagger - P_{2^n}f\| \leq \rho c_1 2^{-2sn(b-a)} + \delta. \tag{6.7}$$

Заметим, что согласно (6.1) и (6.7) параметры a, b следует выбирать так, чтобы величина $2^{-2sn(b-a)}$ не превосходила δ по порядку.

Чтобы обеспечить (6.2), воспользуемся известной оценкой (см. [9])

$$\||A|^\nu - |A_n|^\nu\| \leq z(\nu)\|A^*A - A_n^*A_n\|^{\min\{\frac{\nu}{2},1\}},$$

где функция $z(\nu)$ ограничена на $(0, \infty)$.

Откуда с помощью (6.4) получаем

$$\||A|^\nu - |A_n|^\nu\| \leq c_3[2^{-2rn} + 2^{-bsn+(as-r)_+n}]^{\min\{\frac{\nu}{2},1\}}. \tag{6.8}$$

Напомним, что в силу (6.2) величина $[2^{-2rn} + 2^{-bsn+(as-r)_+n}]^{\min\{\frac{\nu}{2},1\}}$ не должна превосходить по порядку $\delta^{\nu/(\nu+1)}$.

Очевидно, что наиболее экономичный выбор области $\Gamma_n^{a,b}$ возможен в ситуации, когда оба слагаемых в правой части (6.8) имеют одинаковый порядок, т.е. при условии

$$2rn = bsn - (as-r)_+n. \tag{6.9}$$

В силу (5.2) из (6.9) следует

$$2^{-bsn+(as-r)_+n} = O(\delta)$$

и значит,

$$c_4 2^{-bsn+(as-r)_+n} \leq \delta.$$

Аналогично, из соотношения (6.7) получим

$$c_5 2^{-2bsn+2asn} \leq \delta.$$

Далее, рассматривая возможные случаи: а) $as - r > 0$, б) $as - r < 0$, в) $as - r = 0$ с учетом (5.2), получим три варианта. Непосредственными вычислениями убеждаемся, что случай б), приводящий к значениям $b = 2r/s$ и $1 < a < r/s$ при n, выбираемом из условия (5.2), даёт наиболее экономичный крест с точки зрения количества используемой галеркинской информации, причем $\mathrm{card}(\Gamma_n^{a,b}) = 2^{2nr/s}$.

Тем самым нами доказано следующее утверждение.

Лемма. *Пусть* $A \in \mathcal{H}_\gamma^{r,s}$, $x^\dagger \in M_{\nu,\rho}(A), \nu \in [1, \nu_1]$, *где* $1 < \nu_1 < \infty$. *Если параметр дискретизации* n *выбран согласно (5.2),* $b = 2r/s$ *и* $1 < a < r/s$, *то имеют место соотношения (6.1), (6.2) и*

$$card(\Gamma_n^{a,b}) = 2^{2nr/s} = O(\delta^{-1/s}).$$

7. Оптимальная точность проекционных методов

При доказательстве основного утверждения нам потребуется следующий факт (см. Лемму 3.2 [9]): для произвольной величины $\alpha_1 > 0$ и фиксированной функции g_α, удовлетворяющей условиям (3.1)-(3.3), найдется константа $c_* > 0$, такая что для всех $0 \le \lambda \le \gamma$ и $\alpha \ge \alpha_1$

$$(1 - \lambda g_\alpha(\lambda))^2 \le c_*(1 - \lambda g_{\alpha_1}(\lambda))^2 + \alpha_1^{-1}(\lambda(1 - \lambda g_\alpha(\lambda)))^2. \tag{7.1}$$

Теорема. *Пусть в (4.1)* $b = 2r/s$, $1 < a < r/s$, *а параметр дискретизации* n *выбран согласно (5.2). Тогда оптимальная по порядку оценка погрешности* $O(\delta^{\nu/(\nu+1)})$ *достигается в рамках любого проекционного метода вида* $(R_\alpha, A_n, b_1, b_2)$ *на классе уравнений* $\Psi_{\rho,\delta}^{r,s}$.

Доказательство. Доказательство проведем с использованием схемы рассуждений, приведенной ранее при доказательстве теорем 3.3 [9] и 4.1 [10]. Величину погрешности метода $(R_\alpha, A_n, b_1, b_2)$ запишем в виде

$$x^\dagger - \hat{x}_\alpha = R_{\alpha,n}(A_n x^\dagger - P_{2^n} f_\delta) + S_{\alpha,n} x^\dagger,$$

где $R_{\alpha,n} = g_\alpha(A_n^* A_n) A_n^*$, $\quad S_{\alpha,n} = I - g_\alpha(A_n^* A_n) A_n^* A_n$. Тогда с учетом (3.2) и (3.1) получаем соответственно

$$\|x^\dagger - \hat{x}_\alpha\| = \|S_{\alpha,n} x^\dagger\| + 2\chi_* \alpha^{-1/2}\delta, \tag{7.2}$$

$$\|I - A_n R_{\alpha,n}\| = \|I - g_\alpha(A_n A_n^*) A_n A_n^*\| \le \sup_{0 \le \lambda \le \infty} |1 - \lambda g_\alpha(\lambda)| \le 1.$$

Используя представление

$$A_n S_{\alpha,n} x^\dagger = (A_n - A_n R_{\alpha,n} A_n) x^\dagger =$$

$$= (P_{2^n} f_\delta - A_n \hat{x}_\alpha) + (I - A_n R_{\alpha,n})(A_n x^\dagger - P_{2^n} f_\delta)$$

и лемму 1, аналогично теореме 4.1 [10] можно показать, что

$$b_1\delta - 2\delta \le \|A_n S_{\alpha,n} x^\dagger\|, \quad \alpha^{-1/2}\delta \le \alpha^{-1/2}(b_1-2)^{-1}\|A_n S_{\alpha,n} x^\dagger\|. \tag{7.3}$$

Используя полярное разложение оператора $A_n = U(A_n^* A_n)^{1/2}$, $\|U\| = 1$, отношение (3.1) и лемму 1, оценим норму элемента $A_n S_{\alpha,n} x^\dagger$ следующим образом

$$\alpha^{-1/2}\|A_n S_{\alpha,n} x^\dagger\| = \alpha^{-1/2}\|A_n S_{\alpha,n}|A|^\nu u\| \le$$

$$\le \rho\alpha^{-1/2}\|A_n S_{\alpha,n}|A_n|^\nu\| + \|A_n S_{\alpha,n}(|A|^\nu - |A_n|^\nu)\| \le$$

$$\le \rho\alpha^{-1/2}\|U S_{\alpha,n}|A_n|^\nu\| + \|U S_{\alpha,n}|A_n|\|\||A|^\nu - |A_n|^\nu\| \le$$

$$\le \rho\chi_{(\gamma+1)/2}\alpha^{\nu/2} + \rho\chi_{1/2}c_3 z(\nu)\delta^{\nu/(\nu+1)}. \tag{7.4}$$

Аналогично получим

$$\|S_{\alpha,n}x^\dagger\| = \|S_{\alpha,n}|A|^\nu v\| \le \rho\|S_{\alpha,n}|A_n|^\nu\| + \rho\|S_{\alpha,n}\|\||A|^\nu - |A_n|^\nu\| \le$$

$$\le \ \rho\chi_{\nu/2}\alpha^{\nu/2} + \rho z(\nu)c_3\delta^{\nu/(\nu+1)}. \tag{7.5}$$

Подстановка (7.4) в (7.3) даёт отношение

$$\alpha^{-1/2}\delta \le (b_1-2)^{-1}(\rho\chi_{(\nu+1)/2}\alpha^{\nu/2} + \rho\chi_{1/2}c_3 z(\nu)\delta^{\nu/(\nu+1)}).$$

Далее, используя (7.2) и полученные выше оценки для $\alpha^{-1/2}\delta$ и $\|S_{\alpha,n}x^\dagger\|$, находим

$$\|x^\dagger - \hat{x}_\alpha\| \le \rho(\chi_{\nu/2}\alpha^{\nu/2} + z(\nu)c_3\delta^{\nu/(\nu+1)} +$$

$$+2(b_1-2)^{-1}\chi_*(\chi_{(\nu+1)/2}\alpha^{\nu/2} + \chi_{1/2}c_3 z(\nu)\delta^{\nu/(\nu+1)})) = c_4\alpha^{\nu/2} + c_5\delta^{\nu/(\nu+1)},$$

где $c_4 = \rho(\chi_{\nu/2} + 2\chi_*\chi_{(\nu+1)/2}(b_1-2)^{-1})$, $\quad c_5 = \rho z(\nu)c_3(2\chi_*\chi_{1/2}(b_1-2)^{-1}+1)$. И окончательно, если $\alpha \le \delta^{2/\nu+1}$, имеем следующее соотношение

$$\|x^\dagger - \hat{x}\| \le (c_4 + c_5)\delta^{\nu/\nu+1}.$$

Таким образом, утверждение теоремы доказано для $\alpha \le \delta^{2/(\nu+1)}$.

Пусть теперь $\alpha > \delta^{2/(\nu+1)}$. Далее, с учётом (7.1) получим

$$\|S_{\alpha,n}x^\dagger\|^2 \le c_*(\|S_{\alpha_1,n}x^\dagger\|^2 + \alpha_1^{-1}\|A_n S_{\alpha,n}x^\dagger\|^2). \tag{7.6}$$

Положим $\alpha_1 = \delta^{2/(\nu+1)}$. С помощью леммы 1 легко установить, что

$$\alpha_1^{-1}\|A_n S_{\alpha,n}x^\dagger\|^2 \le (b_2+2)^2\delta^{2\nu/(\nu+1)} \tag{7.7}$$

Из (7.5) получим соотношение

$$\|S_{\alpha_1,n}x^\dagger\|^2 \le \delta^{2\nu/(\nu+1)}(\rho\chi_{\nu/2} + \rho z(\nu)c_3)^2. \tag{7.8}$$

Подставляя (7.7) и (7.8) в (7.6), находим

$$\|S_{\alpha,n}x^\dagger\|^2 \le c_*((\rho\chi_{\nu/2} + \rho z(\nu)c_3)^2 + (b_2+2)^2)\delta^{2\nu/(\nu+1)}. \tag{7.9}$$

С учётом отношения $\alpha > \alpha_1 = \delta^{2/(\nu+1)}$ имеем

$$\alpha^{-1/2}\delta \le \alpha_1^{-1/2}\delta = \delta^{\nu/(\nu+1)}. \tag{7.10}$$

Подставляя (7.9) и (7.10) в (7.2), получим

$$\|x^\dagger - \hat{x}_\alpha\| \le c_6\delta^{\nu/(\nu+1)},$$

где $c_6 = (c_*(\rho\chi_{\nu/2} + \rho z(\nu)c_3)^2 + (b_2+2)^2)^{1/2} + 2\chi_*$.

Таким образом, отношение

$$\|x^\dagger - \hat{x}_\alpha\| \le \delta^{\nu/(\nu+1)} \max\{c_6, c_4 + c_5\}$$

выполняется для любых $\alpha > 0$. Теорема доказана. □

8. Выводы

1. В работе введен в рассмотрение новый класс регуляризирующих проекционных методов вида $(R_\alpha, A_n, b_1, b_2)$, использующих идею гиперболического креста.

2. В рамках указанных методов построены устойчивые приближения с наилучшей возможной точностью $O(\delta^{\nu/(\nu+1)})$ к нормальным решениям уравнений из класса $\Psi^{r,s}_{\rho,\delta}(r > s)$.

3. За счет сокращения класса исследуемых уравнений по сравнению с $\Psi^{s,s}_{\rho,\delta}$ из [2], удалось добиться уменьшения объема информационных затрат на логарифмический множитель.

Список цитируемых источников

1. *Вайникко Г. М., Веретенников А. Ю.* Итерационные процедуры в некорректных задачах. —М.: Наука, 1986. — 182 с.
2. *Solodky S.G., Lebedeva E.* Bounds of information expenses in constructing projection methods for solving ill-posed problems// CMAM — 2006. — 6, № 1. — p. 87–93
3. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979. — 285 с.
4. *Бакушинский А.Б.* Оптимальные и квазиоптимальные методы решения линейных задач, порожденные регуляризующими алгоритмами // Изв.вузов.Математика. — 1978. — № 11. — С. 6–10.
5. *Pereverzev S.V.* Optimization of Projection Methods for solving Ill-Posed Problems // Computing. — 1995. — 55. — P. 113–124.

6. *Solodky S.G.*, A Generalized projection scheme for solving ill-posed problems, J. Inverse Ill Posed Probl. — 1999. — 7. — P. 185–200.
7. *Солодкий С.Г.* Оптимальные схемы дискретизации операторных уравнений - Диссертация на соискание ученой степени доктора физ.-мат.наук.-Киев: Ин-т математики НАНУ. — 2003. — 300 с.
8. *Морозов В.А.* О выборе параметра при решении функциональных уравнений методом регуляризации// ДАН СССР. — 1967. — 175, № 6. — С. 1225–1228.
9. *Plato R., Vainikko G.* On the Regularization of Projection Methods for solving Ill-posed Problems// Numer.Math. —1990. — 57. —P. 63–79.
10. *Pereverzev S.V., Solodky S.G.* An efficient discretization for solving Ill-posed problems//Lec Appl. Math. —1996. — 32. — P. 643–649.

Получена 01.06.2007