Динамические системы, том 2(30), No. 3-4, 211–225

УДК 519.8

Об оценке скорости сходимости проекционно-итерационного метода решения задачи минимизации с ограничениями

Л. Л. Гарт

Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара,
Днепропетровск 49044. *E-mail: ll_hart@mail.ru*

Аннотация. Рассматривается вопрос об оценке скорости сходимости проекционно-итерационного метода, основанного на методе условного градиента, для решения задачи минимизации с ограничениями в гильбертовом пространстве и применении названного метода к решению задач оптимального управления гиперболическими системами. Метод позволяет заменить исходную экстремальную задачу некоторой последовательностью вспомогательных аппроксимирующих ее экстремальных задач, заданных в пространствах, изоморфных подпространствам исходного пространства, и для каждой из «приближенных» задач находить с помощью метода условного градиента лишь несколько приближений, последнее из которых использовать как начальное приближение для следующей «приближенной» задачи. Исследована эффективность предложенного подхода на примере решения конкретной задачи.

Ключевые слова: функционал, множество, пространство, задача минимизации, метод условного градиента, последовательность, приближенное решение, сходимость, оптимальное управление.

1. Введение

Проблемы наилучшего управления различными процессами физики, техники, экономики, описываемыми системами обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнениями с частными производными, интегро-дифференциальными уравнениями, а также многие другие, можно рассматривать как экстремальные задачи в подходящим образом выбранных функциональных пространствах и для их исследования использовать аппарат и методы функционального анализа. Такая трактовка позволяет выявить общие закономерности, присущие широким классам экстремальных задач, создавать и исследовать общие методы их решения.

Численная реализация многих методов решения задач оптимального управления невозможна без использования тех или иных методов приближенного решения возникающих здесь начально-краевых задач, приближенного вычисления встречающихся интегралов. Для решения начально-краевых задач часто применяют методы аппроксимационного (проекционного) типа такие, как конечно-разностный метод, метод конечных элементов, метод прямых, метод характеристик, методы

Ритца или Галеркина и т.д., для приближенного вычисления интегралов используют формулы численного интегрирования [10]. В результате исходная задача оптимального управления заменяется некоторой последовательностью вспомогательных аппроксимирующих ее экстремальных задач. Общефункциональный подход позволяет рассматривать различные проекционные методы с единой точки зрения, поскольку в основе всех этих методов лежит одна и та же идея, заключающаяся в том, что исходная (точная) экстремальная задача, рассматриваемая в каком-то сложном пространстве, аппроксимируется последовательностью «приближенных» экстремальных задач, заданных в подпространствах исходного пространства (либо в некоторых пространствах, изоморфных им). При этом последовательность точных решений «приближенных» задач объявляется последовательностью приближений к решению исходной задачи.

Вопросам аппроксимации различных классов экстремальных задач посвящены работы многих авторов [3], [9], [8]. Исследования проекционных, а также проекционно-итерационных методов решения экстремальных задач с ограничениями в гильбертовых и рефлексивных банаховых пространствах проводились, в частности, С.Д. Балашовой [1], в работах которой были предложены общие условия аппроксимации и сходимости последовательностей точных и приближенных решений аппроксимирующих экстремальных задач, рассматриваемых как в подпространствах исходного пространства, так и в некоторых пространствах, изоморфных им.

Несмотря на широкую область применения, проекционные методы имеют свои недостатки. Хотя «приближенные» экстремальные задачи и проще исходной, тем не менее получение их точных решений практически затруднительно. Сложным является также вопрос о выборе такой задачи из всей последовательности «приближенных» экстремальных задач, который обеспечивал бы получение решения исходной задачи с заданной степенью точности. Если же решение некоторой «приближенной» задачи не удовлетворяет поставленным требованиям, то приходится решать следующую «приближенную» задачу, никак не используя при этом результат, полученный на предыдущем шаге.

Проекционно-итерационный подход к приближенному решению экстремальной задачи естественно устраняет трудности, возникающие при ее решении обычным проекционным методом, так как основан на возможности применения итерационных методов к решению аппроксимирующих ее задач. При этом для каждой из «приближенных» экстремальных задач находится с помощью выбранного итерационного метода лишь несколько приближений и на основании последнего из них строится начальное приближение для следующей «приближенной» задачи.

Данная работа посвящена получению теоретических оценок скорости сходимости и оценки погрешности проекционно-итерационного метода решения задачи минимизации функционала на множестве гильбертова пространства, основанного на методе условного градиента, а также вопросам применения названного метода к решению некоторых задач оптимального управления.

2. Основное содержание

2.1. Постановка задачи

Пусть на некотором множестве Ω вещественного гильбертова пространства H задан ограниченный снизу функционал $F(u)$:

$$\inf_{u \in \Omega} F(u) = F^* > -\infty. \tag{1}$$

Для решения задачи минимизации $F(u)$ на Ω

$$F(u) \to \inf, \qquad u \in \Omega \subset H \tag{2}$$

аппроксимируем функционал $F(u)$ последовательностью более простых «приближенных» функционалов $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, заданных на некоторых множествах $\tilde{\Omega}_n$ вещественных гильбертовых пространств $\tilde{H}_n$ соответственно. Будем считать, что пространства $\tilde{H}_n$ изоморфны подпространствам H_n исходного пространства ($H_1 \subset H_2 \subset \ldots \subset H_n \subset \ldots \subset H$) и Φ_n — линейный ограниченный оператор, ставящий во взаимно однозначное соответствие каждому элементу $u_n \in H_n$ элемент $\tilde{u}_n \in \tilde{H}_n$, причем

$$\|\Phi_n\| \leq C, \qquad n = 1,\ 2, \ldots\ , \tag{3}$$

где $C = const > 0$; Φ_n^{-1} — оператор, осуществляющий обратное отображение $\tilde{H}_n$ на H_n.

Предположим, что множества $\tilde{\Omega}_n \subset \tilde{H}_n$ имеют вид

$$\tilde{\Omega}_n = \{\tilde{u}_n \in \tilde{H}_n \colon\ \tilde{u}_n = \Phi_n u_n,\ u_n \in \Omega_n = \Omega \cap H_n\},\ n = 1,\ 2, \ldots\ , \quad \tilde{\Omega}_1 \neq \emptyset.$$

Заметим при этом, что если исходное множество Ω ограничено в H, то из ограниченности линейного оператора Φ_n и условия (3) немедленно вытекает ограниченность каждого из множеств $\tilde{\Omega}_n$ в $\tilde{H}_n$ ($n = 1, 2, \ldots$).

В дальнейшем будем предполагать, что функционалы $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ для любых $\tilde{u}_n \in \tilde{\Omega}_n$ связаны с исходным функционалом $F(u)$ условием близости

$$|\tilde{F}_n(\tilde{u}_n) - F(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n)| \leq \tilde{\beta}_n, \tag{4}$$

где $\tilde{\beta}_n = const > 0$, $\tilde{\beta}_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Для каждого из «приближенных» функционалов $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ будем рассматривать задачу минимизации на соответствующем множестве $\tilde{\Omega}_n$:

$$\tilde{F}_n(\tilde{u}_n) \to \inf, \quad \tilde{u}_n \in \tilde{\Omega}_n \subset \tilde{H}_n, \qquad n = 1,\ 2, \ldots\ . \tag{5}$$

Отметим, что из условия близости (4) и ограниченности снизу исходного функционала вытекает соотношение

$$F^* - \tilde{\beta}_n \leq F(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n) - \tilde{\beta}_n \leq \tilde{F}_n(\tilde{u}_n), \qquad n = 1,\ 2, \ldots \tag{6}$$

для любых $\tilde{u}_n \in \tilde{\Omega}_n$, откуда, в частности, следует ограниченность снизу на $\tilde{\Omega}_n$ каждого из функционалов $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$:

$$\inf_{\tilde{u}_n \in \tilde{\Omega}_n} \tilde{F}_n(\tilde{u}_n) = \tilde{F}_n^* > -\infty, \qquad n = 1,\ 2, \ldots .$$

В работе [12], содержащей научные результаты автора, проведены исследования проекционно-итерационного метода решения задачи минимизации (2), основанного на приближенном решении задач минимизации (5) с помощью метода условного градиента. При этом для каждого из «приближенных» функционалов $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n),\ n = 1, 2, \ldots$ на множестве $\tilde{\Omega}_n$ названным итерационным методом находится лишь несколько приближений $\tilde{u}_n^{(k)} \in \tilde{\Omega}_n,\ k = 1,\ 2, \ldots,\ k_n$ ($k_n \le K$ — целое положительное число) и на основании последнего из них строится начальное приближение для минимизации следующего функционала $\tilde{F}_{n+1}(\tilde{u}_{n+1})$ на множестве $\tilde{\Omega}_{n+1}$. Доказано при определенных условиях, что последовательность приближений $\{\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty}$ выступает в качестве минимизирующей для исходного функционала $F(u)$ на множестве $\Omega \subset H$, а также в качестве последовательности приближений к точке $u^* \in \Omega$ минимума $F(u)$ (если такая точка существует).

Целью данной работы в продолжение работ [12], [6] является получение теоретических оценок скорости сходимости и оценки погрешности проекционно-итерационного метода решения задачи минимизации (2), основанного на методе условного градиента, а также исследование практической сходимости и вычислительной эффективности названного метода применительно к решению одной задачи оптимального управления гиперболической системой.

2.2. Метод решения

Предположим, что каждый из «приближенных» функционалов $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$ непрерывно дифференцируем в смысле Фреше на множестве $\tilde{\Omega}_n \subset \tilde{H}_n$ ($n = 1,\ 2, \ldots$). В качестве начального приближения в проекционно-итерационном процессе возьмем некоторый элемент $\tilde{u}_1^{(0)} \in \tilde{\Omega}_1$. Следуя [4], если уже известно приближение $\tilde{u}_n^{(k)} \in \tilde{\Omega}_n$ ($k = 0,\ 1, \ldots,\ k_n - 1,\ \ n = 1,\ 2, \ldots$), то возьмем главную линейную часть

$$\tilde{F}_n^{(k)}(\tilde{u}_n) \equiv (\tilde{F}_n'(\tilde{u}_n^{(k)}), \tilde{u}_n - \tilde{u}_n^{(k)}), \qquad \tilde{u}_n \in \tilde{\Omega}_n$$

приращения $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n) - \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k)}) = (\tilde{F}_n'(\tilde{u}_n^{(k)}), \tilde{u}_n - \tilde{u}_n^{(k)}) + o(\|\tilde{u}_n - \tilde{u}_n^{(k)}\|_{\tilde{H}_n})$ и определим вспомогательное приближение $\bar{u}_n^{(k)} \in \tilde{\Omega}_n$ из условия

$$\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)}) = \min_{\tilde{u}_n \in \tilde{\Omega}_n} \tilde{F}_n^{(k)}(\tilde{u}_n) = \min_{\tilde{u}_n \in \tilde{\Omega}_n} (\tilde{F}_n'(\tilde{u}_n^{(k)}), \tilde{u}_n - \tilde{u}_n^{(k)}). \tag{7}$$

Если множества $\tilde{\Omega}_n$ замкнуты, ограничены и выпуклы в гильбертовых пространствах $\tilde{H}_n$ ($n = 1,\ 2, \ldots$), то в силу непрерывности линейного (и тем более, выпуклого) функционала $\tilde{F}_n^{(k)}(\tilde{u}_n)$ такой элемент $\bar{u}_n^{(k)} \in \tilde{\Omega}_n$ существует на основании теоремы 6.1.4 из [4]. При этом, очевидно,

$$\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)}) = \min_{\tilde{u}_n \in \tilde{\Omega}_n} \tilde{F}_n^{(k)}(\tilde{u}_n) \le \tilde{F}_n^{(k)}(\tilde{u}_n^{(k)}) = 0. \tag{8}$$

Если окажется, что $\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)}) = 0$ при некотором $k < k_n$, то с учетом (7) для всех $\tilde{u}_n \in \tilde{\Omega}_n$ будем иметь $(\tilde{F}_n'(\tilde{u}_n^{(k)}), \tilde{u}_n - \tilde{u}_n^{(k)}) \geq 0$, откуда следует, что элемент $\tilde{u}_n^{(k)}$ удовлетворяет необходимому условию минимума функционала $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$ на множестве $\tilde{\Omega}_n$ [4]. В этом случае итерации для функционала $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$ на $\tilde{\Omega}_n$ прекращаются и для выяснения того, будет ли $\tilde{u}_n^{(k)}$ точкой минимума $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$ на $\tilde{\Omega}_n$, а элемент $\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k)}$ — точкой минимума функционала $F(u)$ на множестве Ω, нужны дополнительные исследования поведения этих функционалов в окрестности указанных точек. В частности, если функционал $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$ выпуклый на $\tilde{\Omega}_n$ и $\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)}) = 0$, то $\tilde{u}_n^{(k)}$ в самом деле будет точкой минимума $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$ на $\tilde{\Omega}_n$. Если же элемент $\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k)}$ точкой минимума исходного функционала $F(u)$ на Ω не является, то следует положить $\tilde{u}_{n+1}^{(0)} = \Phi_{n+1}\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k)}$ (понятно, что $\tilde{u}_{n+1}^{(0)} \in \tilde{\Omega}_{n+1}$) и продолжить итерации уже для следующего «приближенного» функционала $\tilde{F}_{n+1}(\tilde{u}_{n+1})$ на множестве $\tilde{\Omega}_{n+1}$. В дальнейшем будем предполагать, что $\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)}) < 0$. Тогда заведомо $\bar{u}_n^{(k)} \neq \tilde{u}_n^{(k)}$, и в качестве следующего приближения можно принять

$$\tilde{u}_n^{(k+1)} = \tilde{u}_n^{(k)} + \tilde{\alpha}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)} - \tilde{u}_n^{(k)}), \qquad k = 0,\ 1, \ldots,\ k_n - 1; \tag{9}$$

$$\tilde{u}_{n+1}^{(0)} = \Phi_{n+1}\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}, \qquad n = 1,\ 2, \ldots, \tag{10}$$

где величина $\tilde{\alpha}_n^{(k)}$ $(0 \leq \tilde{\alpha}_n^{(k)} \leq 1)$ определяется так:

$$\tilde{g}_n^{(k)}(\tilde{\alpha}_n^{(k)}) = \min_{0 \leq \tilde{\alpha}_n \leq 1} \tilde{g}_n^{(k)}(\tilde{\alpha}_n), \qquad \tilde{g}_n^{(k)}(\tilde{\alpha}_n) \equiv \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k)} + \tilde{\alpha}_n(\bar{u}_n^{(k)} - \tilde{u}_n^{(k)})). \tag{11}$$

Для выпуклого множества $\tilde{\Omega}_n$, очевидно, будет $\tilde{u}_n^{(k+1)} \in \tilde{\Omega}_n$ при всех значениях $k = 0,\ 1, \ldots,\ k_n - 1$.

Теорема 1 ([12]). *Пусть функционал $F(u)$ определен на выпуклом замкнутом ограниченном множестве Ω гильбертова пространства H, а функционалы $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$ — соответственно на выпуклых замкнутых множествах $\tilde{\Omega}_n$ гильбертовых пространств $\tilde{H}_n$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$. Пусть $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n) \in C^1(\tilde{\Omega}_n)$, $n = 1,\ 2, \ldots$ и для каждого из указанных номеров n градиент $\tilde{F}_n'(\tilde{u}_n)$ на множестве $\tilde{\Omega}_n$ удовлетворяет условию Липшица*

$$\|\tilde{F}_n'(\tilde{u}_n) - \tilde{F}_n'(\tilde{v}_n)\|_{\tilde{H}_n} \leq L\|\tilde{u}_n - \tilde{v}_n\|_{\tilde{H}_n}, \qquad L = const > 0 \tag{12}$$

при всех $\tilde{u}_n, \tilde{v}_n \in \tilde{\Omega}_n$. Пусть выполнены условия (1) и (4), причем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \tilde{\beta}_n < \infty$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_n^2 < \infty$. Тогда последовательность приближений $\{\tilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющая условиям (7), (9)–(11), существует и для всех $k = 0,\ 1, \ldots,\ k_n - 1$

$$\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)}) = (\tilde{F}_n'(\tilde{u}_n^{(k)}), \bar{u}_n^{(k)} - \tilde{u}_n^{(k)}) \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

при любом выборе $\tilde{u}_1^{(0)} \in \tilde{\Omega}_1$.

Теорема 2. *Пусть сохраняют силу все условия теоремы 1. Пусть, кроме того, функционалы $F(u)$ и $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$ выпуклы на $\Omega \subset H$ и $\tilde{\Omega}_n \subset \tilde{H}_n$ соответственно, $F(u) \in C(\Omega)$ и выполнено условие (A): для каждого $u^* \in \Omega$ такого, что $F(u^*) = F^*$, существует последовательность элементов $\{\tilde{u}_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\tilde{u}_n \in \tilde{\Omega}_n$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi_n^{-1}\tilde{u}_n = u^*$. Пусть $\tilde{u}_1^{(0)} \in \tilde{\Omega}_1$ выбрано произвольно и последовательность $\{\tilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty}$ определена согласно условиям (7), (9)–(11). Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k)}) = F^* \tag{13}$$

для всех $k = 1,\ 2,\ldots,\ k_n$, последовательность $\{\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty}$ является минимизирующей для $F(u)$ и любая ее слабая предельная точка есть точка минимума $F(u)$ на Ω, причем в случае единственности точки минимума к ней слабо сходится вся последовательность $\{\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty}$. Справедлива оценка

$$0 \le a_n = F(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}) - F^* \le \sigma_n, \qquad n > 1, \tag{14}$$

где $\quad \sigma_n = M\prod\limits_{j=2}^{n} q_j + C^2D^2\dfrac{L}{2}\sum\limits_{i=2}^{n}\tilde{\alpha}_i^2 k_i\prod\limits_{j=i}^{n} q_j + 4\sum\limits_{i=2}^{n-1}\tilde{\beta}_i\prod\limits_{j=i+1}^{n} q_j + 2\tilde{\beta}_n, \quad q_n = \dfrac{1}{1+\tilde{\alpha}_n k_n},$
$M > 0$ — постоянная, не зависящая от n, D — диаметр множества Ω.

Доказательство теоремы 2. Выпуклые непрерывные функционалы $F(u)$ и $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$ на замкнутых ограниченных выпуклых множествах Ω и $\tilde{\Omega}_n$ гильбертовых пространств H и $\tilde{H}_n$ соответственно достигают на них своей точной нижней грани [4]:

$$\inf_{u\in\Omega} F(u) = F^* = F(u^*),$$

$$\inf_{\tilde{u}_n\in\tilde{\Omega}_n} \tilde{F}_n(\tilde{u}_n) = \tilde{F}_n^* = \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^*), \qquad n = 1,\ 2,\ldots,$$

причем из непрерывности $F(u)$ на Ω, условий (A) и (4) вытекает [2], что

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{F}_n(\tilde{u}^*) = F^*.$$

Так же, как в работе [4], для выпуклого функционала $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n) \in C^1(\tilde{\Omega}_n)$ на выпуклом множестве $\tilde{\Omega}_n$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$ с помощью условия (7) можно получить

$$\begin{aligned} 0 \le \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k+1)}) - \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^*) \le \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k)}) - \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^*) \le (\tilde{F}_n'(\tilde{u}_n^{(k)}), \tilde{u}_n^{(k)} - \tilde{u}_n^*) = \\ = -\tilde{F}_n^{(k)}(\tilde{u}_n^*) \le -\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)}), \qquad k = 0,\ 1,\ldots,k_n - 1. \end{aligned}$$

На основании этого соотношения и оценки (6) будем иметь

$$|\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k)}) - F^*| \le |\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k)}) - \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^*)| + |\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^*) - F^*| \le -\tilde{F}_n^{(k-1)}(\bar{u}_n^{(k-1)}) + \tilde{\beta}_n \tag{15}$$

для всех $k = 1,\ 2,\ldots,\ k_n$, $\quad n = 1,\ 2,\ \ldots$. Поскольку $\tilde{\beta}_n \to 0$ при $n \to \infty$ и в силу теоремы 1 $\quad \tilde{F}_n^{(k-1)}(\bar{u}_n^{(k-1)}) \to 0$ при $n \to \infty$ для всех $k = 1,\ 2,\ldots,\ k_n$, то, переходя к пределу в неравенстве (15), получаем предельное соотношение (13).

Далее, из очевидного равенства

$$F(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}) - F^* = F(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}) - \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k_n)}) + \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k_n)}) - F^*, \qquad n = 1,\ 2, \dots \quad (16)$$

с учетом условия близости (4) и неравенства (15) можно получить

$$0 \le F(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}) - F^* \le -\tilde{F}_n^{(k_n-1)}(\bar{u}_n^{(k_n-1)}) + 2\tilde{\beta}_n, \qquad n = 1,\ 2, \dots\ , \quad (17)$$

откуда при $n \to \infty$ вытекает предельное соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} F(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}) = F^*$, т.е. $\{\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty}$ — минимизирующая последовательность для функционала $F(u)$.

В силу теоремы 6.1.2 из [4] выпуклое замкнутое ограниченное множество Ω в гильбертовом пространстве H слабо компактно, поэтому существует хотя бы одна подпоследовательность $\{\Phi_{n_i}^{-1}\tilde{u}_{n_i}^{(k_{n_i})}\}_{i=1}^{\infty}$ последовательности $\{\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty} \in \Omega$, которая слабо сходится к некоторому элементу $v^* \in \Omega$. Поскольку выпуклый непрерывный функционал $F(u)$ на выпуклом множестве $\Omega \subset H$ слабо полунепрерывен снизу [4], то

$$F^* = \lim_{n\to\infty} F(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}) = \varliminf_{i\to\infty} F(\Phi_{n_i}^{-1}\tilde{u}_{n_i}^{(k_{n_i})}) \ge F(v^*) \ge F^*,$$

т.е. $F(v^*) = F^*$. Если $F(u)$ достигает своего минимума в единственной точке $u^* \in \Omega$, то вся последовательность $\{\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty}$ слабо сходится к u^*.

Докажем оценку (14). Обозначим через

$$D = \sup_{u,v\in\Omega} \|u - v\|_H, \qquad \tilde{D}_n = \sup_{\tilde{u}_n,\tilde{v}_n\in\tilde{\Omega}_n} \|\tilde{u}_n - \tilde{v}_n\|_{\tilde{H}_n}$$

диаметры множеств $\Omega \subset H$ и $\tilde{\Omega}_n \subset \tilde{H}_n$ $(n = 1,\ 2, \dots)$ соответственно. Поскольку множества Ω и $\tilde{\Omega}_n$ ограничены, то $D < \infty$, $\tilde{D}_n < \infty$ и, кроме того,

$$\tilde{D}_n \le C \cdot D, \qquad n = 1,\ 2, \dots\ ,$$

где $C > 0$ — константа из неравенства (3) [12].

Так же, как в [4], при минимизации функционала $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$ на множестве $\tilde{\Omega}_n \subset \tilde{H}_n$ методом условного градиента с учетом условий (8), (11), (12) можно получить

$$\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k+1)}) - \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k)}) \le \tilde{\alpha}_n(\tilde{F}'_n(\tilde{u}_n^{(k)}), \bar{u}_n^{(k)} - \tilde{u}_n^{(k)}) + \frac{L}{2}\tilde{\alpha}_n^2\|\bar{u}_n^{(k)} - \tilde{u}_n^{(k)}\|_{\tilde{H}_n}^2 \le$$
$$\le -\tilde{\alpha}_n|\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)})| + \frac{L}{2}C^2D^2\tilde{\alpha}_n^2$$

при всех $k = 0, 1, \dots, k_n - 1$, $\quad 0 \le \tilde{\alpha}_n \le 1$. Пользуясь этим неравенством, запишем для произвольного $n > 1$:

$$\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k_n)}) - \tilde{F}_{n-1}(\tilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})}) = \sum_{k=0}^{k_n-1}\big(\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k+1)}) - \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k)})\big) + \tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(0)}) - \tilde{F}_{n-1}(\tilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})}) \le$$
$$\le -\tilde{\alpha}_n\sum_{k=0}^{k_n-1}|\tilde{F}_n^{(k)}(\bar{u}_n^{(k)})| + \frac{L}{2}C^2D^2\tilde{\alpha}_n^2k_n + |\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(0)}) - \tilde{F}_{n-1}(\tilde{u}_{n-1}^{(k_{n-1})})|.$$

В силу условия близости (4) и формулы (10) будем иметь

$$\tilde F_n(\tilde u_n^{(0)}) - \tilde F_{n-1}(\tilde u_{n-1}^{(k_{n-1})}) = \tilde F_n(\tilde u_n^{(0)}) - F(\varPhi_n^{-1}\tilde u_n^{(0)}) + F(\varPhi_n^{-1}\tilde u_n^{(0)}) - F(\varPhi_{n-1}^{-1}\tilde u_{n-1}^{(k_{n-1})}) + \\ + F(\varPhi_{n-1}^{-1}\tilde u_{n-1}^{(k_{n-1})}) - \tilde F_{n-1}(\tilde u_{n-1}^{(k_{n-1})}) \le \tilde\beta_n + \tilde\beta_{n-1}, \qquad n>1,$$

поэтому для всех указанных номеров n будет

$$\tilde F_n(\tilde u_n^{(k_n)}) - \tilde F_{n-1}(\tilde u_{n-1}^{(k_{n-1})}) \le -\tilde\alpha_n \sum_{k=0}^{k_n-1} |\tilde F_n^{(k)}(\bar u_n^{(k)})| + \frac{L}{2}C^2D^2\tilde\alpha_n^2 k_n + \tilde\beta_n + \tilde\beta_{n-1}.$$

С помощью этого неравенства и условия близости (4) можно получить

$$F(\varPhi_n^{-1}\tilde u_n^{(k_n)}) - F(\varPhi_{n-1}^{-1}\tilde u_{n-1}^{(k_{n-1})}) = F(\varPhi_n^{-1}\tilde u_n^{(k_n)}) - \tilde F_n(\tilde u_n^{(k_n)}) + \tilde F_n(\tilde u_n^{(k_n)}) - \\ - \tilde F_{n-1}(\tilde u_{n-1}^{(k_{n-1})}) + \tilde F_{n-1}(\tilde u_{n-1}^{(k_{n-1})}) - F(\varPhi_{n-1}^{-1}\tilde u_{n-1}^{(k_{n-1})}) \le \\ \le -\tilde\alpha_n \sum_{k=0}^{k_n-1} |\tilde F_n^{(k)}(\bar u_n^{(k)})| + \frac{L}{2}C^2D^2\tilde\alpha_n^2 k_n + 2\tilde\beta_n + 2\tilde\beta_{n-1}, \qquad n>1,$$

или, с учетом обозначения $a_n = F(\varPhi_n^{-1}\tilde u_n^{(k_n)}) - F^*$,

$$a_n - a_{n-1} \le -\tilde\alpha_n \sum_{k=0}^{k_n-1} |\tilde F_n^{(k)}(\bar u_n^{(k)})| + \frac{L}{2}C^2D^2\tilde\alpha_n^2 k_n + 2\tilde\beta_n + 2\tilde\beta_{n-1}, \qquad n>1.$$

Поскольку $\tilde F_n^{(k)}(\bar u_n^{(k)}) \to 0$ с ростом k при каждом фиксированном n [4], то при условии $|\tilde F_n^{(k)}(\bar u_n^{(k)})| \ge |\tilde F_n^{(k_n-1)}(\bar u_n^{(k_n-1)})|$, $k=0,\ 1,\dots,k_n-1$, получим

$$a_n - a_{n-1} \le -\tilde\alpha_n k_n |\tilde F_n^{(k_n-1)}(\bar u_n^{(k_n-1)})| + \frac{L}{2}C^2D^2\tilde\alpha_n^2 k_n + 2\tilde\beta_n + 2\tilde\beta_{n-1}, \qquad n>1.$$

Согласно оценке (17) $|\tilde F_n^{(k_n-1)}(\bar u_n^{(k_n-1)})| \ge a_n - 2\tilde\beta_n$, поэтому

$$a_{n-1} - a_n \ge \tilde\alpha_n k_n(a_n - 2\tilde\beta_n) - \frac{L}{2}C^2D^2\tilde\alpha_n^2 k_n - 2\tilde\beta_n - 2\tilde\beta_{n-1}, \qquad n>1.$$

Решение этого неравенства относительно a_n дает

$$0 \le a_n \le \frac{1}{1+\tilde\alpha_n k_n}\big(a_{n-1} + \frac{L}{2}C^2D^2\tilde\alpha_n^2 k_n + 2\tilde\beta_{n-1}\big) + 2\tilde\beta_n, \qquad n>1. \tag{18}$$

Принимая в формуле (18) обозначение $q_n = \dfrac{1}{1+\tilde\alpha_n k_n}$, получаем

$$a_n \le q_n(a_{n-1} + 2\tilde\beta_{n-1}) + \frac{L}{2}C^2D^2 q_n\tilde\alpha_n^2 k_n + 2\tilde\beta_n \le \\ \le q_n q_{n-1}(a_{n-2} + 2\tilde\beta_{n-2}) + \frac{L}{2}C^2D^2\big(q_n q_{n-1}\tilde\alpha_{n-1}^2 k_{n-1} + q_n\tilde\alpha_n^2 k_n\big) + 4q_n\tilde\beta_{n-1} + 2\tilde\beta_n \le \\ \le \ldots \le (a_1 + 2\tilde\beta_1)\prod_{j=2}^{n} q_j + \frac{L}{2}C^2D^2\sum_{i=2}^{n}\tilde\alpha_i^2 k_i \prod_{j=i}^{n} q_j + 4\sum_{i=2}^{n-1}\tilde\beta_i \prod_{j=i+1}^{n} q_j + 2\tilde\beta_n, \qquad n>1.$$

Наконец, пользуясь теоремой 6.2.3 из [4], условием (4) и оценкой (6), находим

$$a_1 + 2\tilde{\beta}_1 = F(\Phi_1^{-1}\tilde{u}_1^{(k_1)}) - \tilde{F}_1(\tilde{u}_1^{(k_1)}) + \tilde{F}_1(\tilde{u}_1^{(k_1)}) - \tilde{F}_1^* + \\ + \tilde{F}_1^* - F^* + 2\tilde{\beta}_1 \leq \tilde{F}_1(\tilde{u}_1^{(k_1)}) - \tilde{F}_1^* + 4\tilde{\beta}_1 \leq \frac{B}{k_1} + 4\tilde{\beta}_1 = M,$$

где

$$\tilde{F}_1^* = \inf_{\tilde{u}_1 \in \tilde{\Omega}_1} \tilde{F}_1(\tilde{u}_1), \qquad B = max\{2LC^2D^2;\ \tilde{F}_1(\tilde{u}_1^{(0)}) - \tilde{F}_1^*\}.$$

Таким образом, справедливость оценки (14) установлена. Остается заметить, что $0 < q_n = \dfrac{1}{1 + \tilde{\alpha}_n k_n} < 1$ при всех $n > 1$, так что $\sigma_n \to 0$ при $n \to \infty$.

В самом деле, при $q_n \leq q < 1$, $1 \leq k_n \leq K$ $(n = 1,\ 2, \ldots)$ для величины σ_n из (14) будем иметь

$$0 \leq \sigma_n \leq Mq^{n-1} + C^2D^2K\frac{L}{2}\sum_{i=2}^{n}\tilde{\alpha}_i^2 q^{n-i+1} + 4\sum_{i=2}^{n-1}\tilde{\beta}_i q^{n-i} + 2\tilde{\beta}_n, \qquad n > 1. \tag{19}$$

Если числовая последовательность $\tilde{\alpha}_n \to \alpha$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ при $n \to \infty$, то для любого малого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N_1(\varepsilon)$ такой, что для всех $n \geq N_1$ будет $|\tilde{\alpha}_n - \alpha| \leq \varepsilon$ и тогда

$$\sum_{i=2}^{n}\tilde{\alpha}_i^2 q^{n-i+1} \leq \sum_{i=2}^{N_1-1}\tilde{\alpha}_i^2 q^{n-i+1} + (\alpha+\varepsilon)^2\ \frac{q(1-q^{n-N_1+1})}{1-q}, \qquad n \geq N_1.$$

Аналогично, для сходящейся последовательности $\tilde{\beta}_n \to 0$ $(n \to \infty)$ при том же $\varepsilon > 0$ найдется номер $N_2(\varepsilon)$ такой, что для всех $n \geq N_2$ будет $\tilde{\beta}_n \leq \varepsilon$ и

$$\sum_{i=2}^{n-1}\tilde{\beta}_i q^{n-i} \leq \sum_{i=2}^{N_2-1}\tilde{\beta}_i q^{n-i} + \varepsilon\ \frac{q(1-q^{n-N_2})}{1-q}, \qquad n \geq N_2.$$

Обозначим через $N = max\{N_1,\ N_2\}$. Тогда с учетом двух последних неравенств соотношение (19) перепишется в виде

$$0 \leq \sigma_n \leq Mq^{n-1} + C^2D^2K\frac{L}{2}\left(\sum_{i=2}^{N-1}\tilde{\alpha}_i^2 q^{n-i+1} + (\alpha+\varepsilon)^2\ \frac{q(1-q^{n-N+1})}{1-q}\right) + \\ + 4\left(\sum_{i=2}^{N-1}\tilde{\beta}_i q^{n-i} + \varepsilon\ \frac{q(1-q^{n-N})}{1-q}\right) + 2\tilde{\beta}_n, \qquad n \geq N.$$

Устремляя здесь $n \to \infty$, будем иметь:

$$0 \leq \lim_{n\to\infty}\sigma_n \leq C^2D^2K\frac{L}{2}\ \alpha^2\frac{q}{1-q}.$$

Отсюда при $\alpha \to 0$ получаем, что $\sigma_n \to 0$ при $n \to \infty$, что и требовалось доказать. □

Замечание 1. В условиях теоремы 2 может быть получена оценка, характеризующая скорость сходимости последовательности $\{\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k_n)})\}_{n=1}^{\infty}$ к F^*. А именно, из соотношения (16) с учетом условия близости (4) и оценки (14) следует

$$|\tilde{F}_n(\tilde{u}_n^{(k_n)}) - F^*| \leq \sigma_n + \tilde{\beta}_n, \qquad n > 1.$$

Теорема 3. *Пусть выполнены все условия теоремы 1. Пусть, кроме того, $F(u)$ — непрерывный сильно выпуклый функционал на $\Omega \subset H$, а функционалы $\tilde{F}_n(\tilde{u}_n)$ выпуклы на $\tilde{\Omega}_n \subset \tilde{H}_n$, $n = 1, 2, \ldots$ соответственно и выполнено условие (A). Тогда последовательность $\{\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty}$, где $\tilde{u}_n^{(k_n)}$ определяются согласно условиям (7), (9)–(11), сходится к единственной точке u^* минимума $F(u)$ на Ω по норме пространства H при любом выборе $\tilde{u}_1^{(0)} \in \tilde{\Omega}_1$ и справедлива оценка*

$$\| \Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)} - u^*\|_H^2 \leq \frac{2}{\chi}\, \sigma_n, \qquad n > 1, \tag{20}$$

где $\sigma_n > 0$ определяется формулой (14), $\chi = const > 0$.

Доказательство теоремы 3. Из сильной выпуклости непрерывного функционала $F(u)$ следует его выпуклость и ограниченность снизу на замкнутом выпуклом множестве $\Omega \subset H$ [4], так что выполняются все условия теоремы 2. Кроме того, $F(u)$ достигает минимума на Ω в единственной точке u^* и при этом справедливо неравенство

$$\| \Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)} - u^*\|_H^2 \leq \frac{2}{\chi}\left(F(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}) - F(u^*)\right), \qquad n = 1,\ 2, \ldots,$$

где $\chi > 0$ — константа сильной выпуклости $F(u)$ на Ω [4]. Отсюда в силу теоремы 2 вытекает сходимость $\{\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty}$ к u^* по норме пространства H. Оценка (20) является следствием последнего неравенства и оценки (14). □

2.3. Применение метода к решению задачи оптимального управления

Рассмотрим вопрос о применении проекционно-итерационного подхода к решению задачи оптимального управления процессом, описываемым уравнениями колебания. При этом в роли проекционного метода будем использовать метод конечных разностей, а в роли итерационного метода минимизации функционала качества — метод условного градиента. Такой подход, как показано в [7], укладывается в общую схему проекционно-итерационного метода решения задач минимизации с ограничениями в гильбертовых пространствах, теоретически обоснованного в [12], и сопровожден детально описанной вычислительной технологией, позволяющей довести идею проекционно-итерационного метода до успешного расчета.

Пусть имеется однородная упругая гибкая струна $0 \leq s \leq l$, один конец которой свободен, на другой ее конец действует внешняя сила $p = p(t)$ и, кроме того, к каждой точке струны также приложена внешняя сила $f = f(s,t)$. Требуется, управляя указанными внешними силами, к заданному моменту времени T привести струну в состояние, как можно меньше отличающееся от некоторого заданного состояния (например, состояния покоя) [5].

Математическая формулировка этой задачи: минимизировать функционал

$$J(u) = \beta_0 \int_0^l |x(s,T,u) - y(s)|^2\, ds + \beta_1 \int_0^l \left| \frac{\partial x}{\partial t}(s,T,u) - z(s) \right|^2 ds \tag{21}$$

при условиях

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + f(s,t), \qquad (s,t) \in Q = \{0 < s < l,\ 0 < t < T\}, \tag{22}$$

$$\frac{\partial x}{\partial s}(0,t) = p(t), \qquad \frac{\partial x}{\partial s}(l,t) = 0, \qquad 0 < t < T, \tag{23}$$

$$x(s,0) = \varphi(s), \qquad \frac{\partial x}{\partial t}(s,0) = \mu(s), \qquad 0 \le s \le l, \tag{24}$$

$$u = (p(t), f(s,t)) \in U \subset H = L_2[0,T] \times L_2(Q), \tag{25}$$

где $a > 0$ — скорость распространения колебаний, $l > 0,\ T > 0,\ \beta_0 \ge 0,\ \beta_1 \ge 0$ — заданные постоянные, $\beta_0^2 + \beta_1^2 > 0$; $y(s), z(s), \varphi(s), \mu(s)$ — заданные функции на отрезке $0 \le s \le l$, причем $y(s), z(s), \mu(s) \in L_2[0,l]$, $\varphi(s) \in W_2^{(1)}[0,l]$, $W_2^{(1)}[0,l]$ — пространство Соболева [4]; U — заданное выпуклое замкнутое ограниченное множество управлений из H:

$$U = \{u = (p(t), f(s,t)) \in H : \int_0^T p^2(t)\, dt \le R_0^2,\ \iint_Q f^2(s,t)\, ds\, dt \le R_1^2\}, \tag{26}$$

$R_0 > 0,\ R_1 > 0$ — заданные числа. В частном случае, когда $y(s) = z(s) = 0,\ \beta_0 = \beta_1 = 1$, будем иметь дело с задачей о наилучшем успокоении струны к моменту времени T; если же $\inf\limits_{u \in U} J(u) = 0$, то можно говорить о возможности полного успокоения струны к моменту T.

В [5] показано, что начально-краевая задача (22)–(24) при каждом $u \in H$ имеет, и притом единственное, решение $x(s,t) \equiv x(s,t,u) \in W_2^{(1)}(Q)$, которое может быть представлено с помощью формулы Даламбера, а функционал (21) при условиях (22)–(26) является выпуклым и непрерывно-дифференцируемым для всех $u \in U$, причем его градиент на U удовлетворяет условию Липшица и имеет вид

$$J'(u) = \big(a^2 \psi(0,t,u);\ \psi(s,t,u)\big) \in H, \tag{27}$$

где функция $\psi(s,t) \equiv \psi(s,t,u)$ является решением следующей вспомогательной начально-краевой задачи:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2}, \qquad (s,t) \in Q,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial s}(0,t)=\frac{\partial\psi}{\partial s}(l,t)=0,\qquad 0<t<T,$$

$$\psi(s,T)=2\beta_1\left(\frac{\partial x}{\partial t}(s,T,u)-z(s)\right),\ \frac{\partial\psi}{\partial t}(s,T)=-2\beta_0\left(x(s,T,u)-y(s)\right),\ 0\le s\le l.$$

По теореме 3.6 из [5] функционал (21) при условиях (22)–(26) достигает на U своей нижней грани J^*, т.е. существует оптимальное решение $u^*=(p^*(t),f^*(s,t))\in\in U$ задачи (21)–(26).

В работе [7] рассмотрен конечно-разностный метод приближенного решения задачи (21)–(26), согласно которому в прямоугольной области Q вводится равномерная (для простоты) сетка точек

$$\bar{\omega}_{h\tau}=\bar{\omega}_h\times\bar{\omega}_\tau=\{(s_i,t_j)\in Q:\ s_i=ih,\ t_j=j\tau;\ \ i=\overline{0,N},\ j=\overline{0,M}\},$$

где h и τ — шаги сетки по направлениям s и t соответственно, $h=l/N,\ \tau=T/M$. Далее интегралы в (21) заменяются квадратурными суммами по формуле прямоугольников, а начально-краевая задача (22)–(24) — разностной схемой с весами [11], условно устойчивой и имеющей первый порядок аппроксимации по h и по τ, решение которой $x_{ij}\approx x(s_i,t_j,\tilde{u}),\ i=\overline{0,N},\ j=\overline{0,M}$ на каждом временном слое при заданном сеточном управлении $\tilde{u}\in\tilde{U}_{h\tau}$ может быть получено, к примеру, методом разностной прогонки. Здесь

$$\tilde{U}_{h\tau}=\{\tilde{u}=(\tilde{p},\tilde{f})\in\tilde{H}_{h\tau}=H_h\times H_{h\tau}:\ \ \|\tilde{p}\|_\tau\le R_0,\ \|\tilde{f}\|_{h\tau}\le R_1\},\tag{28}$$

H_h и $H_{h\tau}$ — соответственно пространства сеточных функций $\tilde{p}=\{p_j\}_{j=\overline{0,M}}$, определенных на сетке $\bar{\omega}_\tau$, с нормой $\|\tilde{p}\|_\tau=\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{M-1}p_j^2\,\tau}$ и сеточных функций $\tilde{f}==\{f_{ij}\}_{i=\overline{0,N},\ j=\overline{0,M}}$, определенных на сетке $\bar{\omega}_{h\tau}$, с нормой $\|\tilde{f}\|_{h\tau}=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{N-1}\sum\limits_{j=1}^{M-1}f_{ij}^2\,h\tau}$; $p_j=p(t_j),\ f_{ij}=f(s_i,t_j)$. В результате исходная задача оптимального управления (21)–(26) сводится к задаче минимизации на множестве $\tilde{U}_{h\tau}\subset\tilde{H}_{h\tau}$ вида (28) разностного функционала

$$J_{h\tau}(\tilde{u})=\beta_0\sum_{i=1}^{N-1}\left(x_{iM}-y_i\right)^2\,h+\beta_1\sum_{i=1}^{N-1}\left(\frac{x_{iM}-x_{i,M-1}}{\tau}-z_i\right)^2\,h,\tag{29}$$

где $x_{ij},\ i=\overline{0,N},\ j=\overline{0,M}$ — решение упомянутой схемы с весами, соответствующее сеточному управлению $\tilde{u}\in\tilde{U}_{h\tau},\ y_i=y(s_i),\ z_i=z(s_i)$.

В [7] показано, что метод конечных разностей решения задачи (21)–(26) является по существу методом проекционного типа, и рассмотрена его проекционно-итерационная реализация, основанная на методе условного градиента. При этом в роли задачи (2) здесь выступает задача минимизации при условиях (22)–(25)

функционала (21) ($F(u) = J(u)$), заданного на множестве (26) ($\Omega = U$) гильбертова пространства $H = L_2[0,T] \times L_2(Q)$, а роль «приближенных» задач (5) играют задачи минимизации разностных функционалов (29) $\Big(\tilde F_n(\tilde u_n) = J_{h_n\tau_n}(\tilde u_n)\Big)$, заданных на множествах вида (28) ($\tilde\Omega_n = \tilde U_n$) из гильбертовых пространств $\tilde H_n = \tilde H_{h_n\tau_n} = H_{\tau_n} \times H_{h_n\tau_n}$, где H_{τ_n} и $H_{h_n\tau_n}$ — соответственно пространства сеточных функций, определенных на сетке $\bar\omega_{\tau_n}$, и сеточных функций, определенных на сетке $\bar\omega_{h_n\tau_n}$, при этом $h_n = l/N_n,\ \tau_n = T/M_n$ $(N_{n+1} \geq N_n,\ M_{n+1} \geq M_n,\ N_1 > 0,\ M_1 > 0)$, $n = 1,\ 2,\dots$. Пространства $\tilde H_n = \tilde H_{h_n\tau_n}$ элементов $\tilde u_n = (\tilde p_n, \tilde f_n)$ с нормой

$$\|\tilde u_n\|_{\tilde H_n} = \|\tilde p_n\|_{\tau_n} + \|\tilde f_n\|_{h_n\tau_n}$$

изоморфны подпространствам $H_n \subset H$ элементов $u_n = (p_n(t), f_n(s,t))$ с нормой

$$\|u_n\|_H = \|p_n\|_{L_2[0,T]} + \|f_n\|_{L_2(Q)},$$

составленных из кусочно-постоянных функций вида

$$p_n(t) = \sum_{j=1}^{M_n-1} p_j\,\chi_j(t), \qquad f_n(s,t) = \sum_{i=1}^{N_n-1}\sum_{j=1}^{M_n-1} f_{ij}\,\zeta_{ij}(s,t), \tag{30}$$

где $\chi_j(t)$ и $\zeta_{ij}(s,t)$ — соответственно характеристические функции промежутка $\{t_{j-1} < t \leq t_j\}$ и ячейки $\{s_{i-1} < s \leq s_i,\ t_{j-1} < t \leq t_j\}$, $i = \overline{1, N_n}$, $j = \overline{1, M_n}$. Оператор Φ_n, отображающий H_n на $\tilde H_n$, определяется как оператор, который каждому элементу $u_n = (p_n(t), f_n(s,t))$ вида (30) ставит во взаимно однозначное соответствие элемент $\tilde u_n = (\tilde p_n, \tilde f_n)$, составленный из сеточных функций $\tilde p_n = \{p_j\}_{j=\overline{0,M_n}} \in H_{\tau_n}$, $\tilde f_n = \{f_{ij}\}_{i=\overline{0,N_n},\ j=\overline{0,M_n}} \in H_{h_n\tau_n}$ таких, что $p_j = p_n(t_j),\ f_{ij} = f_n(s_i,t_j)$. Φ_n^{-1} — оператор, осуществляющий обратное отображение.

Для каждой из разностных задач минимизации функционалов (29) (или, что то же самое, «приближенных» задач (5)) будем строить итерационным методом условного градиента на основании формул (7), (9)–(11) несколько (k_n) приближений $\tilde u_n^{(k)}$ $(k = 1,\ 2,\dots, k_n)$, последнее из которых с использованием кусочно-постоянного продолжения (30) будем принимать в качестве начального приближения к решению следующей, $(n+1)$-й, «приближенной» задачи ($n = 1,\ 2,\dots$). Соответствующие расчетные формулы проекционно-итерационного процесса можно найти в [7].

Рассмотрим применение проекционно-итерационного метода к решению задачи оптимального управления (21)–(26), в которой принято $\beta_0 = \beta_1 = 1$, $l = T = 1$, $a = 1$, $y(s) = z(s) = 0$, $f(s,t) = 2\left((s-1)^2 - t^2\right)$, $p(t) = -2t^2$, $\varphi(s) = \mu(s) = 0$, $R_0 = R_1 = 1$.

Аппроксимация начально-краевой задачи (22)–(24) была выполнена по явной разностной схеме [11]. Совокупность вложенных вдвое сеток $\bar\omega_{h_n\tau_n}$, $n = 1,\ 2,\dots, p$, определялась величиной первоначального разбиения $N_1 = M_1 = 10$ и для получения приближенного решения с точностью $\varepsilon = 0,0001$ оказалась состоящей из $p = 4$

сеток с размерностью последней $N_p = M_p = 80$. При этом количество k_n строящихся приближений на шаге с номером n определялось как наименьшее целое k $(k = 0, 1,\dots)$, удовлетворяющее неравенствам

$$\|\tilde{u}_n^{(k+1)} - \tilde{u}_n^{(k)}\|_{\tilde{H}_n} < \varepsilon_n, \ |J_{h_n\tau_n}(\tilde{u}_n^{(k+1)}) - J_{h_n\tau_n}(\tilde{u}_n^{(k)})| < \varepsilon_n, \ \|J'_{h_n\tau_n}(\tilde{u}_n^{(k)})\|_{\tilde{H}_n} < \varepsilon_n,$$

где $J'_{h_n\tau_n}(\tilde{u}_n) \in \tilde{H}_n$ — разностный аналог градиента (27). Величина ε_n при каждом n выбиралась в соответствии с порядком разностной аппроксимации исходной задачи управления, а именно $\varepsilon_n = C_n(h_n+\tau_n)$, $C_n = const > 0$. Критерием окончания проекционно-итерационного процесса служило условие $\varepsilon_n \leq \varepsilon$, $n = 1, 2, \dots$. Начальные значения для векторной сеточной функции управления $\tilde{u}_1^{(0)}$ на первой сетке были приняты во всех ее узлах равными нулю. Расчеты проводились на ЭВМ типа Pentium-166.

В ходе реализации описанного проекционно-итерационного процесса было выполнено в общей сложности $\tilde{k} = \sum\limits_{n=1}^{p} k_n = 2 + 5 + 12 + 46 = 65$ итераций. Время счета при этом составило $t = 6,8$ с. Для минимизируемого функционала (21) было получено приближенное значение $J \approx 1,7168 \cdot 10^{-9}$.

Наряду с проекционно-итерационным методом для решения той же задачи оптимального управления был применен обычный конечно-разностный метод на одной сетке $\bar{\omega}_{h\tau}$ с параметрами разбиения $N = M = 80$. При начальных значениях векторной сеточной функции $\tilde{u}^{(0)}$, равных в каждом узле нулю, приближенное решение задачи было получено с точностью $\varepsilon = 0,0001$ за 73 итерации, что потребовало 7,93 мин. машинного времени. Приближенное значение функционала (21) составило $J \approx 1,7597 \cdot 10^{-9}$.

3. Заключение

В данной работе получены теоретические оценки скорости сходимости и оценка погрешности проекционно-итерационного метода, основанного на методе условного градиента, для решения задачи минимизации выпуклого (сильно выпуклого) функционала на некотором множестве гильбертова пространства, а также рассмотрено применение конечно-разностного варианта этого метода к решению задачи оптимального управления процессом колебания струны.

Сформулированные и доказанные в работе теоремы могут быть использованы для исследования вопросов о сходимости и вычислительной эффективности проекционно-итерационных методов при численном анализе и приближенном решении различных экстремальных задачах с ограничениями, в том числе задач оптимизации реальных сложных систем.

Анализ результатов применения проекционно-итерационного метода к решению задачи о наилучшем успокоении струны к заданному моменту времени показывает, что предложенный подход приводит на практике к уменьшению вычислительных затрат на построение приближений и обеспечивает большую точность получаемых приближенных решений.

Список цитируемых источников

1. *Балашова С. Д.* О решении задач минимизации проекционно-итерационными методами // Математические модели и вычислительные методы в прикладных задачах. /Под ред. Е. М. Киселевой, Н. И. Ободан. — Д.: ДГУ, 1996. — С. 99–104.
2. *Балашова С. Д., Тавадзе Э. Л.* О сходимости проекционно-итерационного метода решения экстремальной задачи с ограничениями // Математические модели и вычислительные методы в прикладных задачах. /Под ред. Е. М. Киселевой, Н. И. Ободан. — Д.: ДГУ, 1996. — С. 128–134.
3. *Будак Б. М., Беркович Е. М.* Об аппроксимации экстремальных задач, I, II // Журнал вычислительной математики и математической физики — 1971. — Т. 11, № 3. — С. 580–596; № 4. — С. 870–884.
4. *Васильев Ф. П.* Лекции по методам решения экстремальных задач. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1974. — 374 с.
5. *Васильев Ф. П.* Методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1981. — 400 с.
6. *Гарт Л. Л.* Об одном варианте проекционно-итерационного метода минимизации функционала в гильбертовом пространстве // Системный анализ и информационные технологии.: Материалы 14-й Междунар. конф. — К.: УНК «ИПСА» НТУУ «КПИ», 2012. — С. 40.
7. *Гарт Л. Л., Поляков Н. В.* Применение проекционно-итерационного метода к решению задач оптимального управления колебательными процессами // Питання прикладної математики і математичного моделювання. /Під ред. О. М. Кісельової, О. О. Кочубея. — Д.: Вид-во ДНУ, 2010. - С. 71-80.
8. *Гурман В. И., Расина И. В., Блинов А. О.* Эволюция и перспективы приближенных методов оптимального управления // Программные системы: теория и приложения. — 2011. — Т. 2, № 6. — С. 11–29.
9. *Ермольев Ю. М., Гуленко В. П., Царенко Т. И.* Конечно-разностный метод в задачах оптимального управления. — К.: Наук. думка, 1978. — 164 с.
10. *Ляшко И. И., Макаров В. Л., Скоробогатько А. А.* Методы вычислений. — К.: Наук. думка, 1977. — 408 с.
11. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977. — 656 с.
12. *Тавадзе Э. Л., Тавадзе Л. Л.* Проекционно-итерационный метод решения задачи минимизации с ограничениями, основанный на методе условного градиента // Математическое моделирование. — 1998. — № 3. — С. 128–134.

Получена 10.07.2012