*Динамические системы, том 1(29), №2 (2011), 207–218*

УДК 531.36+517.928.7

# Асимптотическое поведение решений системы с критическими переменными в случае двух пар чисто мнимых корней[1]

**В. В. Грушковская, А. Л. Зуев**

Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
Донецкий национальный университет,
Донецк 83114. *E-mail: v_grushkovskaya@mail.ru, al_zv@mail.ru*

**Аннотация.** Данная статья посвящена изучению критического случая теории устойчивости в предположении, что матрица линейного приближения системы имеет две пары чисто мнимых собственных значений. Основным результатом является асимптотическая оценка решений в случае устойчивости по формам третьего порядка. Для системы с устойчивой и критической компонентами построена функция Ляпунова.

**Ключевые слова:** асимптотическая оценка, критический случай, устойчивость, функция Ляпунова

## Введение

Значительное место в теории устойчивости занимает исследование критических случаев. Как известно, случай называется критическим по Ляпунову [8], если характеристическое уравнение системы первого приближения имеет корни с нулевой действительной частью и не имеет корней с положительной действительной частью. Случай с одной парой чисто мнимых корней изучен ещё А. М. Ляпуновым [9]. Теория критических случаев получила развитие в работах Н. Г. Четаева, И. Г. Малкина, К. П. Персидского, Г. В. Каменкова, В. Г. Веретеннинова, А. М. Молчанова, А. Л. Куницына и других ученых.

Метод исследования критических случаев А. М. Ляпунова распространен Л. Сальвадори [18] на системы, для которых все корни характеристического уравнения являются чисто мнимыми. К. Пайффер и А. Я. Савченко в статье [15] представили результаты по пассивной стабилизации, основанные на построении функции Ляпунова в случае нескольких пар чисто мнимых корней. А. Я. Савченко и А. О. Игнатьев [12] исследовали устойчивость невозмущенного движения в предположении, что правые части уравнений возмущенного движения неавтономны, но линеаризованная система автономна и её характеристическое уравнение имеет $m$ корней с отрицательными действительными частями и $n$ пар чисто мнимых корней. J.-H. Fu, E. H. Abed [14] построили функции Ляпунова для нелинейных систем

[1]Работа выполнена при частичной поддержке гранта Президента Украины для молодых ученых GP/F32/141.

в критическом случае одного нулевого или пары чисто мнимых корней. Показано, что в рассматриваемом случае функции Ляпунова содержат только члены третьей и четвертой степени.

Особый интерес в критическом случае теории устойчивости представляет изучение асимптотического поведения решений системы. Известно, что для линейных автономных систем дифференциальных уравнений свойства экспоненциальной и асимптотической устойчивости эквивалентны. A. Devinatz [13] рассмотрел линейную систему с различными собственными значениями и получил асимптотические оценки для полного линейно независимого множества решений исходной системы. Н.Н. Красовский [7] доказал теорему об устойчивости по приближению конечного порядка для систем, определяемых однородными векторными полями, и получил степенную оценку решений. В.И. Зубов дополнил результат Н.Н. Красовского степенной оценкой снизу [3]. K. Peiffer, A. Ya. Savchenko [16] изучили асимптотическое поведение решений нелинейной системы в критическом случае одной пары чисто мнимых корней и показали, что при больших значениях времени $t$ критические переменные асимптотически ведут себя как $(Gt)^{-\frac{1}{2}}$, где $G$ — константа. В качестве примера рассмотрен маятник, к которому прикреплено массивное тело. Для системы уравнений движения такого маятника построена функция Ляпунова. Случай двух пар чисто мнимых корней исследовался в работе [17], где изучено асимптотическое поведение решений нелинейной системы, а полученный результат применяется к задаче нелинейной оптимальной устойчивости. В статье [4] свойства решений исследованы в случае $q$ пар чисто мнимых корней и получены асимптотические неравенства для нормы решений укороченной системы. Кроме того, для случая $q = 2$ проведено асимптотическое интегрирование модельной системы и получены представления решений укороченной системы третьего приближения.

Данная статья посвящена исследованию критического случая теории устойчивости в предположении, что матрица линейного приближения системы имеет две пары чисто мнимых корней. Целью исследования является построение асимптотических оценок решений нелинейной системы, аналогичных оценкам Н. Н. Красовского и В. И. Зубова с конструктивным нахождением констант. Для получения оценок использован принцип сведения с явным построением функции Ляпунова для укороченной подсистемы на центральном многообразии.

## 1. Применение принципа сведения к исследованию критических случаев

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений возмущенного движения:

$$\dot{x} = Ax + R(x), \tag{1.1}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ — фазовый вектор системы, $A$ — вещественная $[n \times n]$ — матрица с постоянными коэффициентам, $R(x)$ — вещественная аналитическая в некоторой окрестности нуля функция, разложение которой в ряд Маклорена начинается членами не ниже второго порядка.

Будем предполагать, что характеристическое уравнение системы (1.1) имеет две пары чисто мнимых корней ($\pm i\omega_1, \pm i\omega_2$), а также $p = n - 4$ корней с отрицательными вещественными частями. Будем также предполагать, что среди чисто мнимых корней нет кратных. Тогда линейной подстановкой с постоянными действительными коэффициентами систему (1.1) всегда можно привести к следующему виду [5]:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\xi}}_k &= -\omega_k \tilde{\eta}_k + X_k\left(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, w\right), \\ \dot{\tilde{\eta}}_k &= \omega_k \tilde{\xi}_k + Y_k\left(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, w\right), \ k = 1, 2, \\ \dot{w}_j &= \sum_{i=1}^{p} b_{ji} w_i + W_j\left(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, w\right), \ j = \overline{1, p}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где все собственные числа матрицы $(b_{ij})$ имеют отрицательные вещественные части, разложения в ряд Маклорена функций $X_k\left(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, w\right), Y_k\left(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, w\right), W_j\left(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, w\right)$ не содержат членов ниже второго порядка.

Фазовый вектор полученной системы будем обозначать

$$\tilde{x} = \left(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2, w_1, \ldots, w_p\right)^T.$$

Переменные $\tilde{\xi}_k, \tilde{\eta}_k$ обычно называют критическими переменными, а $w_j$ — переменными присоединенной системы.

Преобразуем полученную систему в соответствии с принципом сведения [5]. Для этого определим функции $u_j\left(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}\right)$ в виде формальных степенных рядов, удовлетворяющих системе уравнений в частных производных [5, с. 56]:

$$\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial \tilde{\xi}_k}\left(-\omega_k \tilde{\eta}_k + X_k\left(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, u\right)\right) + \frac{\partial u_j}{\partial \tilde{\eta}_k}\left(\omega_k \tilde{\xi}_k + Y_k\left(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, u\right)\right)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} b_{ji} u_i + W_j\left(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, u\right), j = \overline{1, p}.$$

Предположим, что вопрос об устойчивости тривиального решения системы (1.2) решается с помощью членов порядка не выше $N$. Обозначим сумму форм ряда $u_j\left(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}\right)$ до $(N-1)-$ого порядка включительно через $v_j\left(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}\right)$ и введём в системе (1.2) следующую замену переменных:

$$\begin{aligned} w_j &= \zeta_j + v_j\left(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}\right), \ j = \overline{1, p}; \\ \tilde{\xi}_k &= \xi_k + \sum_{|l| \geq 1}^{N-1} \Phi_k^{(l)}(\zeta)\, \tilde{\xi}_1^{l_1} \tilde{\xi}_2^{l_2} \tilde{\eta}_1^{l_3} \tilde{\eta}_2^{l_4}, \\ \tilde{\eta}_k &= \eta_k + \sum_{|l| \geq 1}^{N-1} \Psi_k^{(l)}(\zeta)\, \tilde{\xi}_1^{l_1} \tilde{\xi}_2^{l_2} \tilde{\eta}_1^{l_3} \tilde{\eta}_2^{l_4}, \quad k = 1, 2, \end{aligned} \tag{1.3}$$

где $\Phi_k, \Psi_k$ — линейные формы от $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_p$, $|l| = l_1 + l_2 + l_3 + l_4$ [5, с.57].

В результате получим преобразованную систему:

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_k &= -\omega_k \eta_k + \sum_{m=2}^{\infty} \tilde{X}_k^{(m)}(\xi, \eta, \zeta),\\
\dot{\eta}_k &= \omega_k \xi_k + \sum_{m=2}^{\infty} \tilde{Y}_k^{(m)}(\xi, \eta, \zeta), \quad k = 1, 2\\
\dot{\zeta}_j &= \sum_{i=1}^{p} b_{ji}\zeta_i + \sum_{m=2}^{\infty} \tilde{W}_j^{(m)}(\xi, \eta, \zeta), \quad j = \overline{1, p},
\end{aligned}$$

где $\tilde{X}_m^k(\xi, \eta, w), \tilde{Y}_k^m(\xi, \eta, w), \tilde{W}_j^m(\xi, \eta, w)$ — формы степени $m$ по переменным $\xi_1, \xi_2$, $\eta_1, \eta_2$, $w_1, \ldots, w_p$, причем , $\tilde{W}_j^m(\xi, \eta, 0) \equiv 0$ при $m \leq N$.

Для полученной системы можно строить функции Ляпунова и Четаева отдельно для первой группы уравнений и для второй, сохранив в ней только линейные члены.

Далее будем рассматривать укороченную систему, которая содержит только критические переменные:

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_k &= -\omega_k \eta_k + \sum_{m=2}^{\infty} X_k^{(m)}(\xi, \eta),\\
\dot{\eta}_k &= \omega_k \xi_k + \sum_{m=2}^{\infty} Y_k^{(m)}(\xi, \eta), \quad k = 1, 2
\end{aligned} \tag{1.4}$$

где $X_k^{(m)}(\xi, \eta) = \tilde{X}_k^{(m)}(\xi, \eta, 0)$, $\quad Y_k^{(m)}(\xi, \eta) = \tilde{Y}_k^{(m)}(\xi, \eta, 0)$. Из принципа сведения [5, с. 61] следует, что если для укороченной системы (1.4) построены функции, удовлетворяющие теореме А. М. Ляпунова об асимптотической устойчивости, или функции, удовлетворяющие теореме Н. Г. Четаева о неустойчивости, причем знак производных этих функций определяется суммой форм до $N-$го порядка включительно правых частей системы (1.4) независимо от форм более высокого порядка, то для системы (1.2) также могут быть построены такие функции. В частности, если тривиальное решение системы (1.4) асимптотически устойчиво, независимо от форм $X_k^{(m)}$, $\quad Y_k^{(m)}$ порядка выше $N$, то тривиальное решение системы (1.2) (и системы (1.1)) асимптотически устойчиво.

Будем рассматривать случай, когда задача об устойчивости решается формами третьего порядка. Перейдём в укороченной системе (1.4) к комплексно-сопряженным переменным:

$$z_s = \xi_s + i\eta_s,\ \bar{z}_s = \xi_s - i\eta_s,\ s = 1, 2.$$

В результате получим следующую систему:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_s &= i\omega_s z_s + Z_2^{(l)}(z, \bar{z}) + Z_3^{(l)}(z, \bar{z}) + \ldots,\\
\dot{\bar{z}}_s &= i\omega_s \bar{z}_s + \overline{Z_2^{(l)}}(z, \bar{z}) + \overline{Z_3^{(l)}}(z, \bar{z}) + \ldots, \quad s = 1, 2,
\end{aligned} \tag{1.5}$$

где многоточием обозначены формы порядка выше третьего.

Существуют различные методы приведения полученной системы к нормальной форме. В частности, некоторые из них изложены в работах А. Д. Брюно [1], В. В. Козлова и С. Д. Фурты [6]. В данной статье используется нормализующее преобразование переменных, описанное в работах В. Г. Веретенникова [2] и А. М. Молчанова [10, 11]. Введём замену переменных по формулам

$$u_s = z_s + \sum_{n=1}^{3} Q_{ns}\left(z, \bar{z}\right), \; v_s = \bar{z}_s + \sum_{n=1}^{3} \overline{Q_{ns}}\left(z, \bar{z}\right), \; s = 1, 2, \tag{1.6}$$

где

$$Q_{ns} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left\{ \left( C_{ns}\left(z_1 e^{i\omega_1 t}, z_2 e^{i\omega_2 t}, \bar{z}_1 e^{-i\omega_1 t}, \bar{z}_2 e^{-i\omega_2 t}\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - B_{ns}\left(z_1 e^{i\omega_1 t}, z_2 e^{i\omega_2 t}, \bar{z}_1 e^{-i\omega_1 t}, \bar{z}_2 e^{-i\omega_2 t}\right)\right) (T-t)\, e^{-i\omega_s t} \right\} dt,$$

$$B_{ns}\left(z, \bar{z}\right) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T C_{ns}\left(z_1 e^{i\omega_1 t}, z_2 e^{i\omega_2 t}, \bar{z}_1 e^{-i\omega_1 t}, \bar{z}_2 e^{-i\omega_2 t}\right) e^{-i\omega_s t} dt.$$

Вспомогательные функции $C_{ns}\left(z, \bar{z}\right)$ определяются через $B_{n-1,s}\left(z, \bar{z}\right)$, $Q_{n-1,s}\left(z, \bar{z}\right)$ коэффициенты правой части системы (1.5) [11].

В результате такого преобразования получается нормальная форма системы (1.5), которая может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{u}_s &= i\omega_s u_s + \sum_{l=2}^{3} \left\{ \sum_{|k_s|+|l_s|=1} B_s^{(k_{s1},k_{s2},l_{s1},l_{s2})} u_1^{k_{s1}} u_2^{k_{s2}} v_1^{l_{s1}} v_2^{l_{s2}} \right\} + \ldots; \\ \dot{v}_s &= -i\omega_s v_s + \sum_{l=2}^{3} \left\{ \sum_{|k_s|+|l_s|=1} \overline{B_s^{(k_{s1},k_{s2},l_{s1},l_{s2})}} u_1^{l_{s1}} u_2^{l_{s2}} v_1^{k_{s1}} v_2^{k_{s2}} \right\} + \ldots, \end{aligned} \tag{1.7}$$

где $B_s^{(k_{s1},k_{s2},l_{s1},l_{s2})}$ — коэффициенты форм $B_{ns}\left(u, v\right)$, $k_{sj}, l_{sj}$ — неотрицательные целые числа, $|k_s| = k_{s1} + k_{s2}$, $|l_s| = l_{s1} + l_{s2}$. В правой части системы (1.7) отличны от нуля только те коэффициенты $B_s^{(k_{s1},k_{s2},l_{s1},l_{s2})}$, показатели которых удовлетворяют резонансному соотношению [2, с. 62]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(k_{11} - l_{11} - 1\right)\omega_1 + \left(k_{12} - l_{12}\right)\omega_2 = 0, \\ \left(k_{21} - l_{21}\right)\omega_1 + \left(k_{22} - l_{22} - 1\right)\omega_2 = 0. \end{array} \right.$$

Будем предполагать, что внутренние резонансы до третьего порядка включительно отсутствуют, то есть для любых целых чисел $m_1, m_2$, не равных нулю одновременно и удовлетворяющих условию $|m_1| + |m_2| \le 3$, выполнено неравенство $m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \ne 0$. Тогда нормализованная система (1.7) не содержит форм четного порядка, а в формах нечётного порядка всегда остаются неуничтожаемые члены

— члены тождественного резонанса. Таким образом, при отсутствии внутренних резонансов система (1.7) может быть представлена в виде [2, с. 63]:

$$\dot{u}_s = i\omega_s u_s + u_s\left(A_s^{(1,0)}u_1v_1 + A_s^{(0,1)}u_2v_2\right) + \ldots,$$
$$\dot{v}_s = -i\omega_s u_s + v_s\left(\overline{A_s^{(1,0)}}u_1v_1 + \overline{A_s^{(0,1)}}u_2v_2\right) + \ldots,$$

где $A_1^{(1,0)} = B_1^{(2,0,1,0)},\ A_1^{(0,1)} = B_1^{(1,1,0,1)},\ A_2^{(1,0)} = B_2^{(1,1,1,0)},\ A_2^{(0,1)} = B_2^{(0,2,0,1)}$.

Для дальнейшего исследования перейдем к вещественным переменным заменой

$$u_s = r_s e^{i\theta_s},\ v_s = r_s e^{-i\theta_s}.$$

Нормализованная система в новых переменных примет вид:

$$\dot{r}_s = r_s\left(\mathrm{Re}\left[A_s^{(1,0)}\right]r_1^2 + \mathrm{Re}\left[A_s^{(0,1)}\right]r_2^2\right) + R_s(r,\theta);$$
$$r_s\dot{\theta}_s = \omega_s r_s + r_s\left(\mathrm{Im}\left[A_s^{(1,0)}\right]r_1^2 + \mathrm{Im}\left[A_s^{(0,1)}\right]r_2^2\right) + F_s(r,\theta).$$

Так как мы предполагаем, что задача устойчивости в полученной системе решается формами не выше третьего порядка, то возможно исключить из рассмотрения уравнения для $\dot{\theta}_s$, а в уравнениях для $\dot{r}_s$ пренебречь членами $R_s(r,\theta)$ [5, с.65]. Таким образом, задача исследования устойчивости в несущественно особенном критическом случае двух пар чисто мнимых корней без резонанса сведена к исследованию устойчивости следующей системы:

$$\begin{aligned}\dot{r}_1 &= r_1\left(\mathrm{Re}\left[A_1^{(1,0)}\right]r_1^2 + \mathrm{Re}\left[A_1^{(0,1)}\right]r_2^2\right),\\ \dot{r}_2 &= r_2\left(\mathrm{Re}\left[A_2^{(1,0)}\right]r_1^2 + \mathrm{Re}\left[A_2^{(0,1)}\right]r_2^2\right).\end{aligned} \tag{1.8}$$

В переменных $\rho_s = r_s^2 \geq 0$ полученная система может быть записана в виде:

$$\dot{\rho}_s = 2\rho_s\left(a_{s1}\rho_1 + a_{s2}\rho_2\right), s = 1, 2. \tag{1.9}$$

где $a_{11} = \mathrm{Re}\left[A_1^{(1,0)}\right], a_{12} = \mathrm{Re}\left[A_1^{(0,1)}\right], a_{21} = \mathrm{Re}\left[A_2^{(1,0)}\right], a_{22} = \mathrm{Re}\left[A_2^{(0,1)}\right]$.

Систему (1.9) будем называть модельной системой [2, с. 65]. Эта система имеет инвариантные лучи, соответствующие частным решениям вида $\rho_s = \tilde{\rho}_s\eta(t)$. Подставив эти выражения в (1.9), получим следующую систему уравнений:

$$\frac{d\eta}{dt} = E\eta^2,\ \eta(0) = 1, \tag{1.10}$$

$$\tilde{\rho}_s\left(2\left(a_{s1}\rho_1 + a_{s2}\rho_2\right) - E\right) = 0, s = 1, 2, \tag{1.11}$$

где $E$ — вещественный параметр, аналогичный собственному значению в линейных системах.

Нетривиальные решения алгебраических уравнений (1.11), в зависимости от знака $E$, определяют инвариантные лучи системы (1.9) трех типов: устойчивые ($E < 0$); нейтральные ($E = 0$); неустойчивые ($E > 0$).

Справедлив следующий критерий асимптотической устойчивости по формам третьего порядка:

**Теорема** (Критерий Молчанова,[11]). *Для асимптотической устойчивости тривиального решения модельной системы* (1.9) *в конусе* $\rho_s \geq 0$ *необходимо и достаточно (для асимптотической устойчивости тривиального решения полной системы* (1.1) *— достаточно), чтобы внутри и на границе конуса* $\rho_s \geq 0$ *не было ни одного нейтрального или неустойчивого луча.*

## 2. Основной результат

Докажем теорему о степенной оценке решений при $t \geq t_0$.

**Теорема.** *Пусть выполнен критерий А. М. Молчанова:* $a_{11} < 0, a_{22} < 0$ *и верно хотя бы одно из следующих условий:*

1) $a_{11} \geq a_{21}$;

2) $a_{22} \geq a_{12}$;

3) $a_{11} < a_{21}; a_{22} < a_{12}; \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0.$

*Тогда существует такое* $\varepsilon > 0$, *что для всех решений системы* (1.2) *с начальными условиями* $|\tilde{x}_0| < \varepsilon$ *выполнена оценка:*

$$|\tilde{x}(t)| \leq \left(\alpha_1 \left(t - t_0\right) + \alpha_2 |\tilde{x}_0|^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}, t \geq t_0, \tag{2.1}$$

*где* $\alpha_1, \alpha_2$ *— положительные постоянные.*

*Доказательство.* Для системы

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= r_1 \left(\operatorname{Re}\left[A_1^{(1,0)}\right] r_1^2 + \operatorname{Re}\left[A_1^{(0,1)}\right] r_2^2\right) + R_1\left(|r|\right), \\ \dot{r}_2 &= r_2 \left(\operatorname{Re}\left[A_2^{(1,0)}\right] r_1^2 + \operatorname{Re}\left[A_2^{(0,1)}\right] r_2^2\right) + R_2\left(|r|\right), \end{aligned} \tag{2.2}$$

где $|R_s| \leq M_s |r|^4$ $(s = 1, 2)$ при достаточно малых значениях $|r|$, рассмотрим функцию Ляпунова вида

$$V_1 = r_1^2 + \beta r_2^2, \tag{2.3}$$

где коэффициент $\beta$ определяется из следующих условий:

- если $a_{12}a_{21} < 0$, то $\beta = -\frac{a_{12}}{a_{21}}$;
- если $a_{12} < 0, a_{21} < 0$, то $\beta = 1$;
- $a_{12} > 0, a_{21} > 0$, то $\beta = \frac{a_{12}}{a_{21}}$;
- если $a_{12} = 0$, то $\beta = \frac{a_{11}a_{22}}{a_{21}^2}$;
- если $a_{21} = 0$, то $\beta = \frac{a_{12}^2}{a_{11}a_{22}}$.

Найдём производную функции (2.3) в силу системы (2.2):

$$\dot{V}_1 = -2\,(Ay, y) + 2\,(r_1 R_1 + r_2 R_2)\,, \tag{2.4}$$

где $y = (y_1, y_2) = (r_1^2, r_2^2)$, $A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -\beta a_{21} & -\beta a_{22} \end{pmatrix}$.

В силу выбора $\beta$, матрица $A$ является матрицей положительно определенной квадратичной формы, следовательно, для всех $y$ выполнены неравенства:

$$\lambda_{\min}\left(y_1^2 + y_2^2\right) \le (Ay, y) \le \lambda_{\max}\left(y_1^2 + y_2^2\right), \tag{2.5}$$

где $\lambda_{\min} > 0, \lambda_{\max} > 0$ — минимальное и максимальное собственные значения матрицы $A$, соответственно. Заметим ещё, что

$$y_1^2 + y_2^2 = r_1^4 + r_2^4 \ge \frac{\left(r_1^2 + r_2^2\right)^2}{2}. \tag{2.6}$$

Подставляя (2.5) и (2.6) в (2.4), а также учитывая, что $|R_s| \le M_s |r|^4, s = 1, 2,$ получим:

$$\dot{V}_1 \le -\lambda_{\min}\left(r_1^2 + r_2^2\right)^2 + 2\sqrt{M_1^2 + M_2^2}\left(r_1^2 + r_2^2\right)^{\frac{5}{2}}.$$

Так как

$$\min\left\{1, \frac{1}{\beta}\right\} V_1 \le r_1^2 + r_2^2 \le \max\left\{1, \frac{1}{\beta}\right\} V_1,$$

то

$$\dot{V}_1 \le V_1^2 \left(-\lambda_{\min} \min\left\{1, \frac{1}{\beta^2}\right\} + 2\max\left\{1, \frac{1}{\beta^{\frac{5}{2}}}\right\} \sqrt{M_1^2 + M_2^2} V_1^{\frac{1}{2}}\right).$$

Определим $V_{10} = V\,(t_0)$ из условия

$$-\lambda_{\min} \min\left\{1, \frac{1}{\beta^2}\right\} + 2\max\left\{1, \frac{1}{\beta^{\frac{5}{2}}}\right\} \sqrt{M_1^2 + M_2^2} V_{10}^{\frac{1}{2}} \le 0.$$

Тогда функция $V_1\,(t)$ не возрастает на решениях системы (2.2), следовательно,

$$\dot{V}_1 \le -\gamma_1 V_1^2, \tag{2.7}$$

где

$$\gamma_1 = \lambda_{\min} \min\left\{1, \frac{1}{\beta^2}\right\} - 2\max\left\{1, \frac{1}{\beta^{\frac{5}{2}}}\right\} \sqrt{M_1^2 + M_2^2} V_{10}^{\frac{1}{2}}. \tag{2.8}$$

Для полученного дифференциального неравенства запишем уравнение сравнения:

$$\dot{V}_1 = -\gamma_1 V_1^2, \tag{2.9}$$

Решением $\widehat{V}_1$ полученного уравнения, удовлетворяющим начальному условию $\widehat{V}_1\,(t_0) = V_{10}$, будет функция

$$\widehat{V}_1 = \left(\gamma_1\,(t - t_0) + V_{10}^{-1}\right)^{-1}.$$

Следовательно,

$$V_1 \leq \left(\gamma_1 (t - t_0) + V_{10}^{-1}\right)^{-1}, \tag{2.10}$$

где $\gamma_1$ определяется из (2.8).

Возвращаясь к заменам, сделанным в предыдущем пункте, мы построим функцию Ляпунова для укороченной системы (1.4):

$$V_1 = |\xi_1 + i\eta_1 + Q_{11}(\xi + i\eta, \xi - i\eta) + Q_{21}(\xi + i\eta, \xi - i\eta)|^2 + \\ + \beta|\xi_2 + i\eta_2 + Q_{12}(\xi + i\eta, \xi - i\eta) + Q_{22}(\xi + i\eta, \xi - i\eta)|^2. \tag{2.11}$$

Поскольку функции $Q_{1s}, Q_{2s}$ являются однородными формами второго и третьего порядка, соответственно, то справедливы следующие оценки:

$$|Q_{1s}(z, \bar{z})| \leq H_{1s}(|z_1| + |z_2|)^2, \ |Q_{2s}(z, \bar{z})| \leq H_{2s}(|z_1| + |z_2|)^3,$$

где $z_s = \xi_s + i\eta_s, \ \bar{z}_s = \xi_s - i\eta_s, s = 1, 2$ а константы $H_{1s}, H_{2s}$ определяются коэффициентами соответствующих форм $Q_{1s}, Q_{2s}$. С учетом этих неравенств, функцию $V_1$ можно оценить снизу в окрестности $\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2} \leq \varepsilon_1$, где

$$\varepsilon_1 = \frac{-H_{11} - H_{12} + \sqrt{(H_{11} + H_{12})^2 + 2(H_{21} + H_{22})}}{2(H_{21} + H_{22})}, \tag{2.12}$$

следующим образом:

$$V_1 \geq \frac{\min\{1, \beta\}}{8}\left(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2\right). \tag{2.13}$$

Согласно принципу сведения Каменкова [5, с.61], функция Ляпунова для системы (1.2) будет иметь вид

$$V(\widetilde{x}) = V_1(\varepsilon, \eta) + V_2(\zeta), \tag{2.14}$$

где переменные $\tilde{x}$ и $(\xi, \eta, \zeta)$ связаны преобразованием (1.3). В системе (2.14) функция $V_1(\varepsilon, \eta)$ определяется формулой (2.11), а $V_2(\zeta) = (T\zeta, \zeta)$, для которой производная в силу системы

$$\dot{\zeta}_1 = b_{11}\zeta_1 + b_{12}\zeta_2,$$
$$\dot{\zeta}_2 = b_{21}\zeta_1 + b_{22}\zeta_2$$

имеет вид

$$\dot{V}_2 = -{M_3}^2 \sum_{i=1}^{p} \zeta_i^2.$$

Из доказательства принципа сведения [5, с. 60] следует существование $\varepsilon_2 > 0$, $0 < \delta < 1$, таких, что при $\tilde{x} \in B_{\varepsilon_2}$ производная функции $V$ в силу системы (1.2) удовлетворяет неравенству

$$\dot{V} \leq -(1 - \delta)\left(\left|\dot{V}_1\right| + M_3^2 \sum_{i=1}^{p} \zeta_i^2\right), \tag{2.15}$$

где $\dot{V}_1$ — производная функции $V_1$ в силу системы (1.4).

Неравенство (2.15) гарантирует отрицательную определенность функции $\dot{V}$ в $\varepsilon_2$-окрестности. Определим область начальных условий системы (1.2), для которых оценка (2.15) выполнена на решении при всех $t \geq 0$. Для этого построим замкнутую область $M_c = \{\tilde{x} : v(\tilde{x}) \leq c\}$ из условия $M_c \subset B_{\varepsilon_2}$.

Из неравенства (2.7),$\dot{V}_1 = -\alpha_1 V_1^2$, следовательно, $\left|\dot{V}_1\right| \geq \alpha_1 V_1^2$.

Используя рассуждения, аналогичные применяемым при выводе неравенства (2.5), получаем

$$\mu_{\min} \sum_{i=1}^{p} \zeta_i^2 \leq (T\zeta, \zeta) \leq \mu_{\max} \sum_{i=1}^{p} \zeta_i^2, \tag{2.16}$$

где $\mu_{\min}, \mu_{\max}$ — минимальное и максимальное собственное значение матрицы $T$, соответственно. Тогда

$$\left|\dot{V}_1\right| + M_3^2 \sum_{i=1}^{p} \zeta_i^2 \geq \gamma_1 V_1^2 + \frac{M_3^2}{\mu_{\max}} \geq \min\left\{\gamma_1 V_1^2, \frac{M_3^2}{\mu_{\max}}\right\} = \gamma_1 V_1^2$$

в некоторой $\varepsilon_3-$ окрестности $\widetilde{x}$. Следовательно,

$$\dot{V} \leq -(1-\delta)\,\gamma_1 V^2.$$

Решая соответствующее уравнение сравнения

$$\dot{V} = -(1-\delta)\,\gamma_1 V^2,$$

получаем оценку на функцию V:

$$V \leq \left((1-\delta)\,\gamma_1\,(t-t_0) + V_0^{-1}\right)^{-1} \text{при } t \geq t_0. \tag{2.17}$$

С другой стороны, из неравенств (2.13), (2.16) и преобразований (1.3) следует:

$$V \geq \min\left\{\frac{1}{8}, \frac{\beta}{8}, \mu_{\min}\right\} |\tilde{x}|^2 \tag{2.18}$$

$$V_0 \leq \max\left\{\frac{9}{2}, \frac{9\beta}{2}, \mu_{\max}\right\} |\tilde{x}_0|^2 \tag{2.19}$$

Из (2.17), (2.18) и (2.19) получаем требуемую оценку:

$$|\tilde{x}(t)| \leq \left(\alpha_1\,(t-t_0) + \alpha_2 |\tilde{x}_0|^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}, t \geq t_0,$$

где

$$\alpha_1 = (1-\delta)\,\gamma_1 \min\left\{\frac{1}{8}, \frac{\beta}{8}, \mu_{\min}\right\},\ \alpha_2 = \min\left\{\frac{1}{8}, \frac{\beta}{8}, \mu_{\min}\right\} \min\left\{\frac{2}{9}, \frac{2}{9\beta}, \frac{1}{\mu_{\max}}\right\},$$

а $\gamma_1$ имеет вид (2.8). □

## Заключение

В работе доказана степенная оценка вида

$$|\tilde{x}(t)| \leq \left(\alpha_1 \left(t - t_0\right) + \alpha_2 |\tilde{x}_0|^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad t \geq t_0,$$

при выполнении условий критерия А. М. Молчанова в критическом случае двух пар чисто мнимых корней.

Представляет дальнейший интерес распространение оценки на системы с произвольным числом чисто мнимых корней и произвольной степенью формы, обеспечивающей асимптотическую устойчивость тривиального решения.

В дальнейшем предполагается рассмотреть классы механических систем, для которых в явном виде будут вычислены коэффициенты модельной системы и построены соответствующие оценки решений.

### Список цитируемых источников

1. *Брюно А. Д.* Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. — М.: Наука, Физматлит, 1998. — 288 с.
2. *Веретенников В. Г.* Устойчивость и колебания нелинейных систем.— М.: Наука, 1984. — 320 с.
3. *Зубов В. И.* Методы А. М. Ляпунова и их применение. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1957. — 263 с.
4. *Зуев А. Л.* Об асимптотических оценках решений в случае устойчивости по формам третьего порядка // Труды ИПММ НАН Украины. —1998. —Т. 2.—С. 63-71.
5. *Каменков Г. В.* Устойчивость и колебания нелинейных систем.—М.: Наука, 1972. — 214 с.
6. *Козлов В. В., Фурта С. Д.* Асимптотики решений сильно нелинейных систем дифференциальных уравнений. – М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский Институт компьютерных исследований, 2009. — 312 с.
7. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. —М.: Физматгиз, 1959. —212 с.
8. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. — М. -Л.: ГИТТЛ, 1950. — 472 с.
9. *Ляпунов А. М.* Собрание сочинений: в 2 т. — М.: АН СССР, 1956. — Т.2. — 480 с.
10. *Молчанов А. М.* Разделение движений и асимптотические методы в теории нелинейных колебаний // Докл. АН СССР. —1961.— Т. 136.— №. 5.— С. 1030-1033.
11. *Молчанов А. М.* Устойчивость в случае нейтральности линейного приближения // Докл. АН СССР. — 1961.—Т. 141.—№. 1.—С. 24-27.
12. *Савченко А. Я., Игнатьев А. О.* Некоторые задачи устойчивости неавтономных динамических систем. — К.: Наукова думка, 1989. — 208 с.
13. *Devinatz A.* An asymptotic theorem for systems of linear differential equations //Transactions of the American Mathematical Society. —1971. — V. 160—P. 353-363.
14. *Fu J.-H., Abed E. H.* Families of Lyapunov functions for nonlinear systems in critical cases //IEEE Transactions on automatic control. —1993. —V. 38, N. 1—P. 3-16.

15. *Peiffer K., Savchenko A. Ya.* On Passive Stabilization in Critical Cases // Journal of Mathematical Analysis and Applications. —2000. —V. 244.—P. 106-119.
16. *Peiffer K., Savchenko A. Ya.* On the asymptotic behavior of a passively stabilized system with one critical variable. // Rend.Acc.Sc.fis.mat.Napoli. — 2000. —V. 67.— P. 157-168.
17. *Peiffer K., Savchenko A. Ya., Zuyev A. L.* On the asymptotic behavior of solutions in the critical case of two pairs of purely imaginary roots //Problems of Nonlinear Analysis in Engineering Systems. —2003. — V. 9, N. (18).— P. 1-10.
18. *Salvadori L.* Sulla ricerca di una funzione di Liapounoff per un sistema differentiale interessante la meccanica dei sistemi olonomi //Ricerche Mat. — 1962. — V. 11,N. 2 — P. 271-295.

*Получена 10.10.2011 Переработана 12.12.2011*