

УДК 517.9+530.1

Автоколебательные режимы горения вдоль полосы

Е.П. Белан*, О.В. Шиян**

*Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского
Симферополь, 95007. E-mail: belan@crimea.edu

**Крымский институт бизнеса,
Симферополь, 95047. E-mail: olgshiyana@yandex.ru

Аннотация. Для распределенной автоколебательной системы, состоящей из диффузионно-связанных осцилляторов Ван-дер-Поля и описывающей движение фронта горения, построены и исследованы на устойчивость периодические по времени пространственно неоднородные решения на отрезке с изолированными краями. Эти решения описывают режим распространения автоколебаний вдоль полосы и возникают при потере устойчивости пространственно однородного режима автоколебаний. Рассмотрены также вопросы о форме и устойчивости этих решений при углублении в область надкритичности.

Ключевые слова: горение, бифуркация, периодические решения, автомодельные циклы, орбитальная устойчивость, параболические уравнения.

1. Введение

Эволюцию фронта безгазового горения феноменологически описывает уравнение [2, 6]

$$\ddot{\xi} + \xi = 2\delta \left(\dot{\xi} - \frac{4}{3}(\dot{\xi})^3 + \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \Delta \xi + \frac{\lambda\beta}{2\pi} \sqrt{-\Delta} \dot{\xi} \right), \quad (1)$$

где ξ — отклонение положения фронта от невозмущенного, соответствующего стационарному режиму, точка означает дифференцирование по времени t , $\lambda > 0$ — корреляционная длина теплопроводностной связи соседних участков фронта, $\beta > 0$ — коэффициент нелокальной связи участков фронта, $0 < \delta \ll 1$ — инкремент неустойчивости, Δ — двумерный лапласиан.

Исследование решений (1) на окружности радиуса R типа бегущих волн представляет интерес, поскольку эти решения соответствуют спиновым волнам горения кругового цилиндра радиуса R . В [2] установлено, что число бегущих волн (1) на окружности радиуса R неограниченно увеличивается при увеличении R и фиксированных прочих параметрах. Необходимое условие устойчивости m -ой спиновой волны было получено в [2], а критерии её устойчивости установлены в [7, 1] ($\beta = 0$), [13] ($\beta \geq 0$).

В данной работе уравнение (1) рассматривается на отрезке длины l с краевыми условиями:

$$\left. \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial x} \right|_{x=l} = 0. \quad (2)$$

Задача (1), (2) в случае $\beta = 0$ рассматривалась в [9, 6] в связи исследованием горения теплоизолированной полосы ширины l . Согласно [9, 6] задача (1), (2) имеет решения в виде стоячих волн. Все они неустойчивы, за исключением решения $\xi_0 = \cos t + O(\delta)$ — синфазной волны.

Согласно проведенному в данной работе анализу, при $\beta > 0$ решение ξ_0 теряет устойчивость и имеет место бифуркация рождения из ξ_0 двух ξ_1^\pm экспоненциально орбитально устойчивых пространственно неоднородных периодических по t решений. Таким образом, мы рассматриваем здесь задачу возникновения пространственно неоднородных периодических режимов из пространственно однородного. Исследование этой задачи в параболических уравнениях, как известно [1, 16], представляет значительный интерес.

В данной работе используются методы нелинейной механики, открытые Н.М. Крыловым и Н.Н. Боголюбовым [4]. Значительное влияние на развитие этих методов оказали исследования Ю.А. Митропольского [4, 10], А.М. Самойленко [11, 12]. Для бифуркационного анализа эти методы использовались, в частности, в [8, 1, 13, 14].

Статья организована следующим образом. В первом разделе устанавливаются условия, обеспечивающие локальную разрешимость начально-краевой задачи. Второй раздел посвящен построению приближенных периодических пространственно неоднородных решений, бифурцирующих из теряющего устойчивость пространственно однородного периодического решения. Обоснование описанного подхода содержится в третьем разделе. Динамика автомодельных циклов при углублении бифуркационного параметра в область надкритичности исследуется в четвертом разделе. В заключении подчеркнуты основные результаты работы.

2. Существование и единственность решения

Задача (1), (2) эквивалентна следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= p, \\ \dot{p} &= -\xi + 2\delta \left(p \left(1 - \frac{4}{3} p^2 \right) + \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \Delta p + \frac{\lambda\beta}{2\pi} \sqrt{-\Delta p} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнение (1), (2) или (3) рассматривается при начальных условиях:

$$\xi \Big|_{t=0} = \xi_0, \quad \dot{\xi} \Big|_{t=0} = p_0, \quad \text{или} \quad \xi \Big|_{t=0} = \xi_0, \quad p \Big|_{t=0} = p_0, \quad (4)$$

Обозначим, следуя [3, см. I.5], H^s , $s \geq 0$, шкалу пространств, порожденную на $[0, l]$ оператором $-\Delta$ при условии (2) (Δ — одномерный лапласиан). Норма в H^s определяется равенством $\|u\|_S^2 = \langle -\Delta^s u, u \rangle + \langle u, u \rangle$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в пространстве $H = L_2(0, l)$.

Система (3) является системой спаренных "обыкновенного" и "параболического" уравнений. Следуя [17, см. 3.4], приходим к заключению о существовании и единственности решения (3), (4) при $\xi_0 \in H$, $p_0 \in H^1$. Итак, система (3) или, что то же самое, (1), (2) в пространстве $E = H \times H^1$ порождает локальную динамическую систему. Далее, в качестве фазового пространства задачи (1), (2) примем пространство E .

3. Приближенные периодические решения

Построим здесь приближенные периодические решения ξ_1^\pm задачи (1), (2). Будем искать, следуя [13], эти решения в виде:

$$\xi(t, \theta) = \sum_{k=0}^1 (z_k + \bar{z}_k) \cos(k\theta) + \delta\sigma_1(z, \bar{z}, \theta), \quad \theta = \frac{\pi x}{l}, \quad (5)$$

где $\sigma_1(z, \bar{z}, \theta)$ ($\sigma_1(z, \bar{z}, \theta + 2\pi) = \sigma_1(z, \bar{z}, \theta)$) — кубическая форма по z, \bar{z} , а $z_k = z_k(t)$, $k = 0, 1$, удовлетворяет уравнению:

$$\dot{z}_k = (i + \delta\alpha_k)z_k + \delta b_k(z, \bar{z}), \quad k = 0, 1. \quad (6)$$

Здесь $z = (z_0, z_1)$, черта означает комплексное сопряжение, а

$$\alpha_k = \alpha_k(\rho) = 1 - \frac{k^2}{\rho^2} + \beta \frac{k}{\rho}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \rho = 2\pi l/\lambda.$$

Подставим (5), (6) в уравнение (1) и приравняем затем коэффициенты при δ . В результате относительно $\sigma_1(z, \bar{z}, \theta)$ получим линейное неоднородное уравнение:

$$\mathcal{B}\sigma_1(z, \bar{z}, \theta) = \frac{8}{3}i \left(\sum_{k=0}^1 (z_k - \bar{z}_k) \cos k\theta \right)^3 - iM \sum_{k=0}^1 (b_k - \bar{b}_k) \cos k\theta, \quad (7)$$

где

$$Mb(z, \bar{z}) = b(z, \bar{z}) + \frac{\partial b}{\partial z}z - \frac{\partial b}{\partial \bar{z}}\bar{z},$$

оператор \mathcal{B} является диагональным на пространстве многочленов относительно z, \bar{z} . При этом

$$\mathcal{B}z^\alpha \bar{z}^\beta = \left(1 - \sum_{j=0}^1 (\alpha_j - \beta_j)^2 \right) z^\alpha \bar{z}^\beta,$$

где $z^\alpha = z_0^{\alpha_0} z_1^{\alpha_1}$; $\bar{z}^\beta = z_0^{\beta_0} z_1^{\beta_1}$.

Выберем в (7) b_k , $k = 0, 1$, так, чтобы каждый моном $\cos k\theta z^l \bar{z}^m$, $k = 0, 1$, для которого $\sum_{-1}^1 (l_k - m_k)^2 = 1$, имел нулевой коэффициент. Многочлены b_k , $k = 0, 1$, определяются при этом однозначно. Затем, в соответствии с методом Галеркина,

опустим оставшиеся в (7) мономы $\cos k\theta z^l \bar{z}^m$, для которых $\sum_{-1}^1 (l_k - m_k)^2 = 1$. Полученное теперь уравнение имеет решение того же вида, что и его неоднородность.

Подставим b_k , $k = 0, 1$, в (5), выполним замену $z_k = \frac{1}{2}a_k \exp(it)$, $k = 0, 1$, а затем в полученной относительно a_k , $k = 0, 1$, системе осуществим преобразование $t = \tau/\delta$. В результате получим систему уравнений

$$\begin{aligned} a'_0 &= a_0(\alpha_0 - |a_0|^2 - |a_1|^2) - \frac{1}{2}\bar{a}_0 a_1^2, \\ a'_1 &= a_1(\alpha_1 - 2|a_0|^2 - \frac{3}{4}|a_1|^2) - \bar{a}_1 a_0^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь штрих – дифференцирование по τ . При этом \bar{a}_k , $k = 0, 1$, удовлетворяют комплексно сопряженным уравнениям. Отметим, что система (8) является S^1 -эквивариантной системой. Она инвариантна относительно группы вращений окружности $(a_0, a_1) \mapsto \exp(i\varphi)(a_0, a_1)$, $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Система (8), в сущности, – градиентная система. Действительно, после преобразования

$$a_0, \bar{a}_0, a_1, \bar{a}_1 \mapsto a_0, \bar{a}_0, \sqrt{2}a_1, \sqrt{2}\bar{a}_1$$

она представима в виде

$$a'_k = -\frac{\partial G(a, \bar{a}, \rho)}{\partial \bar{a}_k}, \quad k = 0, 1,$$

где

$$-G = \alpha_0 |a_0|^2 + \alpha_1 |a_1|^2 - \frac{1}{2}|a_0|^4 - \frac{3}{4}|a_1|^4 - \bar{a}_0^2 a_1^2 - a_0^2 \bar{a}_1^2.$$

Перейдем теперь к бифуркационному анализу системы (8). При возрастании ρ и его прохождении через $\rho_0 = \beta^{-1}$ из вещественной стационарной точки (1, 0) системы (8) ответвляется пара точек

$$(\sqrt{3 - 2\alpha_1}; \pm 2i\sqrt{\alpha_1 - 1}). \quad (9)$$

Здесь, как и выше, с целью сокращения записи указаны лишь значения a_0, a_1 . Отметим, что в силу S^1 -эквивариантности системы (8) из окружности $\{(\exp(i\varphi), 0), \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}$ её стационарных решений ответвляется пара окружностей

$$\{(\sqrt{3 - 2\alpha_1} \exp(i\varphi), \pm 2i\sqrt{\alpha_1 - 1} \exp(i\varphi)), \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}$$

стационарных решений.

Устойчивость стационарных решений (9) системы (8), а тем самым и указанных окружностей стационарных решений, определяется матрицей:

$$Q_1(\rho) = \begin{pmatrix} 1 - 2x_0^2 - 4x_1^2 & -x_0^2 + 2x_1^2 & 0 & -2ix_0x_1 \\ -x_0^2 + 2x_1^2 & 1 - 2x_0^2 - 4x_1^2 & 2ix_0x_1 & 0 \\ 0 & -4ix_0x_1 & \alpha_1 - 2x_0^2 - 6x_1^2 & -x_0^2 + 3x_1^2 \\ 4ix_0x_1 & 0 & -x_0^2 + 3x_1^2 & \alpha_1 - 2x_0^2 - 6x_1^2 \end{pmatrix}$$

Здесь $x_0 = \sqrt{3 - 2\alpha_1}$, $x_1 = \sqrt{\alpha_1 - 1}$. У матрицы $Q_1(\rho)$ при малых $\alpha_1 - 1 > 0$ два собственных значения находятся вблизи -2 . Она имеет нулевое собственное значение и собственное значение вида: $-(\alpha_1 - 1) + O(\alpha_1 - 1)^2$.

Суммируя изложенное выше, приходим к заключению, что при малых $\rho - \rho_0$ приближенными периодическими по t орбитально экспоненциально устойчивыми решениями задачи (1), (2) являются:

$$\tilde{\xi}_1^\pm = \xi_1^\pm(t, \theta) = \sqrt{3 - 2\alpha_1} \cos t \pm 2\sqrt{\alpha_1 - 1} \sin t \cos \theta. \quad (10)$$

Эти функции удовлетворяет (1) с точностью порядка $O(\delta, \alpha_1 - 1)$ по невязке.

4. Существование и устойчивость периодических решений

Строгий смысл изложенному выше придаёт

Теорема 1. *Существует δ_0 такое, что при $0 < \delta < \delta_0$ и малых $\rho - \rho_0 > 0$ ($\rho_0 = \beta^{-1}$) задача (1), (2) имеет периодические по t пространственно неоднородные решения $\xi_1^\pm(\omega(\delta)t, \theta)$, где $\omega(\delta) = 1 + O(\delta^2)$ - гладкая функция δ . Справедливо равенство:*

$$\xi_1^\pm(t, \theta) = \sqrt{3 - 2\alpha_1} \cos t \pm 2\sqrt{\alpha_1 - 1} \sin t \cos \theta + O(\delta, \rho - \rho_0), \quad \theta = \frac{\pi x}{l}. \quad (11)$$

Решения $\xi_1^\pm(\omega(\delta)t, \theta)$ экспоненциально орбитально устойчивы при малых $\delta, \rho - \rho_0$.

Доказательство теоремы.

Докажем вначале существование при малых $\delta > 0, \rho - \rho_0 > 0$, периодического решения задачи (1), (2) вида:

$$\xi = y_0(t) + y_1(t) \cos \theta + v(t, \theta), \quad (12)$$

где $y_0(t), y_1(t), v(t, \theta)$ периодические по t функции, а $v(t, \theta)$ удовлетворяет условиям:

$$P_0 v = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v dt = 0, \quad P_1 v = \cos \theta \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v \cos t dt = 0.$$

Подставим (12) в уравнение (1). В результате получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_0 + y_0 &= 2\delta \left[\dot{y}_0 \left(1 - \frac{4}{3} y_0^2 \right) - 2\dot{y}_0 (\dot{y}_1)^2 - 4\dot{y}_0 P_0(\dot{v}^2) \right], \\ \ddot{y}_1 + y_1 &= 2\delta \left[\alpha_1 \dot{y}_1 - (\dot{y}_1)^3 - 4(\dot{y}_0)^2 \dot{y}_1 - 2\dot{y}_1^2 P_0(\dot{v} \cos 2\theta) - 4\dot{y}_1 P_0(\dot{v}^2) \right], \\ \ddot{v} + v &= 2\delta \left[\dot{v} + \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \Delta \dot{v} + \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{-\Delta} \dot{v} - \frac{1}{3} (\dot{y}_1^3) \cos 3\theta - \frac{4}{3} (\dot{v}^3) - \right. \\ &\quad \left. - 4(\dot{y}_0)^2 \dot{v} - 4\dot{y}_0 P(\dot{v}^2) \right], \quad \dot{v}_x \Big|_{x=0} = \dot{v}_x \Big|_{x=l} = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где $P = E - (P_0 + P_1)$, а E - единичный оператор. Эта система имеет периодическое решение $(\cos t + O(\delta), 0, 0)$, которое, как покажем, является экспоненциально орбитально устойчивым, если $\alpha_1 < 1$, и неустойчивым, если $\alpha_1 > 1$. С этой целью линеаризуем систему (13) на указанном периодическом решении. Опустив в ней члены, порядок малости которых относительно δ больше единицы, получим систему

$$\begin{aligned} \ddot{y}_0 + y_0 &= 2\delta \left(1 - 4 \sin^2 t\right) \dot{y}_0, \\ \ddot{y}_1 + y_1 &= 2\delta \left(\alpha_1 - 4 \sin^2 t\right) \dot{y}_1, \\ \ddot{v} + v &= 2\delta \left[(1 - 4 \cos^2 t) \dot{v} + \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \Delta \dot{v} + \frac{\beta\lambda}{2\pi} \sqrt{-\Delta} \dot{v} \right], \quad \dot{v}_x \Big|_{x=0} = \dot{v}_x \Big|_{x=l} = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

Выполним в этой системе преобразование

$$\begin{aligned} y_k &= z_k \exp(it) + \bar{z}_k \exp(-it), \quad \dot{y}_k = z_k i \exp(it) - \bar{z}_k i \exp(-it), \quad k = 0, 1, \\ v &= u \exp(it) + \bar{u} \exp(-it), \quad \dot{v} = u i \exp(it) - \bar{u} i \exp(-it), \end{aligned}$$

а затем в полученной системе замену $t = \tau/\delta$. В результате приходим к системе

$$\begin{aligned} z_0' &= -z_0 - \bar{z}_0 - z_0 \exp(2i\tau/\delta), \\ z_1' &= (\alpha_1 - 2)z_1 - \bar{z}_1 - z_1 \exp(2i\tau/\delta), \\ u' &= -u - \bar{u} + \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \Delta u + \frac{\beta\lambda}{2\pi} \sqrt{-\Delta} u - \exp(2i\tau/\delta)u, \quad u'_x \Big|_{x=0} = u'_x \Big|_{x=l} = 0. \end{aligned}$$

Переходим теперь к соответствующей усредненной системе. Легко видеть, что $\{0, -2, \alpha_1 - 1, \alpha_1 - 3, \dots, \alpha_k - 1, \alpha_k - 3, \dots\}$ — её спектр устойчивости. Следовательно [15, 5], [17, см. 7.5], имеет место потеря устойчивости (14) при увеличении α_1 и переходе через 1. При этом система (14) имеет равный единице мультипликатор, один из мультипликаторов при увеличении α_1 и прохождении через 1 проходит через единицу. Остальные мультипликаторы положительны и меньше единицы вблизи бифуркационного значения 1. Как известно [17, см. 9.5], в рассматриваемом случае из теряющего устойчивость периодического решения $(\cos t + O(\delta), 0, 0)$ системы (13) ответвляются два периодических решения. Построим их. Отметим, что система (13) в окрестности точки бифуркации $(\beta^{-1}, \cos t + O(\delta), 0, 0)$ имеет трехмерное инвариантное многообразие [17, см. 9.1]. При этом $v = 0$ является приближенным представлением этого многообразия. Редукция системы (13) на нём принимает вид

$$\begin{aligned} \ddot{y}_0 + y_0 &= 2\delta \left[\dot{y}_0 \left(1 - \frac{4}{3} \dot{y}_0^2\right) - 2\dot{y}_0 (\dot{y}_1)^2 \right], \\ \ddot{y}_1 + y_1 &= 2\delta \left[\alpha_1 \dot{y}_1 - (\dot{y}_1)^3 - 4(\dot{y}_0)^2 \dot{y}_1 \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Эта система имеет периодическое решение $y_0 = \cos t + O(\delta)$, $y_1 = 0$, которое является экспоненциально орбитально устойчивым, если $\alpha_1 < 1$ и неустойчивым, если $\alpha_1 > 1$. При увеличении α_1 и переходе через 1 имеет место бифуркация рождения

из $y_0 = \cos t + O(\delta)$, $y_1 = 0$ пары периодических решений. Построим, следуя [4], эти решения в виде:

$$\begin{aligned} y_0 &= a_0 \cos \tau + \delta w_0^1(a_0, a_1, \tau) + \delta^2 \dots, \\ y_1 &= 2a_1 \sin \tau + \delta w_1^1(a_0, a_1, \tau) + \delta^2 \dots, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\tau = \omega(\delta)t$, $\omega(\delta) = 1 + \omega_2\delta^2 + \dots$, $w_k^s(a_0, a_1, \tau)$, $k = 0, 1$, $s = 1, 2, \dots$, — 2π периодические функции τ , а a_0, a_1 — решение системы

$$\begin{aligned} a_0' &= \delta(a_0 + g_0^1(a_0, a_1) + \delta g_0^2(a_0, a_1) + \dots), \\ a_1' &= \delta(a_1 + g_1^1(a_0, a_1) + \delta g_1^2(a_0, a_1) + \dots). \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь штрих — производная по τ . Подставим (16), (17) в (23). Приравняв затем коэффициент при δ нулю, относительно w_k^1 , $k = 0, 1$, выводим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w_0^1}{\partial \tau^2} + w_0^1 &= 2\left(\frac{4}{3}a_0^3 \sin^3 \tau + 8a_0a_1^2 \sin \tau \cos^2 \tau\right) + 2g_0^1 \sin \tau, \\ \frac{\partial^2 w_1^1}{\partial \tau^2} + w_1^1 &= 2(-8a_0^2a_1 \cos \tau \sin^2 \tau - 8a_1^3 \cos^3 \tau) - 4g_1^1 \cos \tau. \end{aligned}$$

Условия разрешимости этих уравнений приводят к однозначному определению g_k^1 , $k = 0, 1$. Затем находим и w_k^1 , $k = 0, 1$. Подставив g_k^1 , $k = 0, 1$, в (17) и опустив затем члены порядка δ^2 и выше, получаем систему

$$\begin{aligned} a_0' &= \delta a_0(1 - a_0^2 - 2a_1^2), \\ a_1' &= \delta a_1(\alpha_1 - a_0^2 - 3a_1^2). \end{aligned} \quad (18)$$

Замена

$$a_0 = 1 + b_0, \quad a_1 = b_1$$

приводит (18) к виду

$$\begin{aligned} b_0' &= \delta(-2b_0 - 3b_0^2 - 2b_1^2 - 2b_0b_1^2), \\ b_1' &= \delta b_1(\alpha_1 - 1 - 2b_0 - b_0^2 - 3b_1^2). \end{aligned} \quad (19)$$

Это семейство дифференциальных уравнений имеет гладкое центральное многообразие, представимое в виде

$$b_0 = -b_1^2 + O(b_1^3, (\alpha_1 - 1)).$$

Редукция системы (19) на её центральное многообразие приводит к семейству дифференциальных уравнений

$$b_1' = \delta b_1(\alpha_1 - 1 - b_1^2 - b_1^4 + O(b_1^6)). \quad (20)$$

При увеличении α_1 и его прохождении через 1 в уравнении (20) имеет место бифуркация типа "вилка" ("трезубца") и из его нулевого решения ответвляются пара экспоненциально устойчивых стационарных решений $\pm(\alpha_1 - 1)^{1/2}$. Возвращаясь

теперь к системе (18), заключаем, что в ней при увеличении α_1 и его прохождении через 1 имеет место бифуркация типа "вилка". При этом из её стационарного решения $(1, 0)$ ответвляются два экспоненциально устойчивых решения $2 - \alpha_1 + O(\alpha_1 - 1)^{3/2}, \pm(\alpha_1 - 1)^{1/2} + O(\alpha_1)$. Заметим, что в (18) из $(1, 0)$ бифурцируют $(3 - \alpha_1)^{1/2}, \pm(\alpha_1 - 1)^{1/2}$.

Суммируя изложенное выше, приходим к заключению, что при малых $\alpha_1 - 1 > 0, \delta > 0$ система (23) имеет два периодических решения

$$y_0 = (3 - 2\alpha_1)^{1/2} \cos t + O(\alpha_1 - 1, \delta), \quad y_1 = \pm 2(\alpha_1 - 1)^{1/2} \sin t + O(\alpha_1 - 1, \delta),$$

которые ответвляются от периодического решения $y_0 = \cos t + O(\delta), y_1 = 0$. Эти решения являются экспоненциально орбитально устойчивыми. Очевидно, что и система (13) при малых $\alpha_1 - 1 > 0, \delta > 0$ имеет два периодических решения

$$((3 - 2\alpha_1)^{1/2} \cos t + O(\alpha_1 - 1, \delta), \pm 2(\alpha_1 - 1)^{1/2} \sin t + O(\alpha_1 - 1, \delta), O(\alpha_1 - 1, \delta)),$$

которые ответвляются от периодического решения $(\cos t + O(\delta), 0, 0)$. Теорема доказана.

5. Периодические режимы при $\rho - \rho_0 \sim 1$

Перейдем теперь к вопросу о форме и устойчивости ξ_1^\pm при углублении ρ в область надкритичности. С этой целью построим приближенные решения задачи (1), (2) в виде:

$$\xi(t, \theta) = \sum_{k=0}^3 (z_k + \bar{z}_k) \cos(k\theta) + \delta \sigma_1(z, \bar{z}, \theta), \quad (21)$$

где $\sigma_1(z, \bar{z}, \theta)$ — кубическая форма по z, \bar{z} , а $z_k = z_k(t), k = 0, 1, 2, 3$. Следуя описанной выше методике и полагая $z_k = \frac{1}{2} a_k \exp(it), k = 0, 1, 2, 3$, а затем в полученной системе выполнив замену $t = \tau/\delta$, выводим S^1 -эквивариантную систему

$$\begin{aligned} a_0' &= a_0 (\alpha_0 - |a_0|^2 - |a_1|^2 - |a_2|^2 - |a_3|^2) - \frac{1}{2} \bar{a}_0 (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) - \\ &\quad - \frac{1}{4} a_1^2 \bar{a}_2 - \frac{1}{2} |a_1|^2 a_2 - \frac{1}{2} (\bar{a}_1 a_2 a_3 + \bar{a}_2 a_1 a_3 + \bar{a}_3 a_2 a_1), \\ a_1' &= a_1 \left(\alpha_1 - 2|a_0|^2 - \frac{3}{4} |a_1|^2 - |a_2|^2 - |a_3|^2 \right) - \frac{1}{2} \bar{a}_1 (2a_0^2 + a_2^2 + a_3^2) - \frac{1}{4} a_1^2 \bar{a}_3 - \frac{1}{2} |a_1|^2 a_3 - \\ &\quad - \frac{1}{4} a_2^2 \bar{a}_3 - \frac{1}{2} |a_2|^2 a_3 - (\bar{a}_0 a_1 a_2 + \bar{a}_1 a_0 a_2 + \bar{a}_2 a_0 a_1) - (\bar{a}_0 a_2 a_3 + \bar{a}_2 a_0 a_3 + \bar{a}_3 a_2 a_0), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} a_2' &= a_2 \left(\alpha_2 - 2|a_0|^2 - |a_1|^2 - \frac{3}{4} |a_2|^2 - |a_3|^2 \right) - \frac{1}{2} \bar{a}_2 (2a_0^2 + a_1^2 + a_3^2) - \\ &\quad - \frac{1}{2} a_1^2 \bar{a}_0 - |a_1|^2 a_0 - (\bar{a}_0 a_1 a_3 + \bar{a}_1 a_0 a_3 + \bar{a}_3 a_0 a_1) - \frac{1}{2} (\bar{a}_1 a_2 a_3 + \bar{a}_2 a_1 a_3 + \bar{a}_3 a_2 a_1), \end{aligned}$$

$$a_3' = a_3 \left(\alpha_3 - 2|a_0|^2 - |a_1|^2 - |a_2|^2 - \frac{3}{4}|a_3|^2 \right) - \frac{1}{2}\bar{a}_3(2a_0^2 + a_1^2 + a_2^2) - \frac{1}{4}a_2^2\bar{a}_1 - \frac{1}{2}|a_2|^2 a_1 - \frac{1}{4}a_1^2\bar{a}_1 - (\bar{a}_0 a_1 a_2 + \bar{a}_1 a_0 a_2 + \bar{a}_2 a_0 a_1),$$

Как и выше, можно убедиться в том, что (22) после соответствующего преобразования представима в градиентной форме.

При увеличении ρ и его прохождении через ρ_1 из неподвижной точки $(1, 0, 0, 0)$ системы (22) ответвляются две неподвижные точки. Их координаты $a_k(\rho), k = 0, 1, 2, 3$, удовлетворяют условию $a_k = (i)^k x_k, x_k \in \mathbb{R}, k = 0, 1, 2, 3$. Обозначим ту из них, для которой $x_1 = x_1(\rho) > 0$ при малых $\rho - \rho_0 > 0$, $M^+ = (x_0, ix_1, x_2, ix_3)$, Для второй точки тогда справедливо равенство $M^- = (x_0, -ix_1, x_2, -ix_3)$. Параметры (x_0, x_1, x_2, x_3) удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} x_0 \left(\alpha_0 - x_0^2 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{3}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2 \right) - \frac{3}{2}x_1^2 x_2 - \frac{1}{2}x_1 x_2 x_3 &= 0, \\ x_1 \left(\alpha_1 - x_0^2 - \frac{3}{4}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{3}{2}x_3^2 \right) - x_0 x_1 x_2 - x_0 x_2 x_3 - \frac{3}{4}x_1^2 x_3 - \\ &\quad - \frac{1}{4}x_2^2 x_3 - \frac{1}{2}x_1 x_2 x_3 = 0, \\ x_2 \left(\alpha_2 - 3x_0^2 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{3}{4}x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2 \right) - \frac{3}{2}x_0 x_1^2 - x_0 x_1 x_3 - \frac{1}{2}x_1 x_2 x_3 &= 0, \\ x_3 \left(\alpha_3 - x_0^2 - \frac{3}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{3}{4}x_3^2 \right) - x_0 x_1 x_2 - \frac{1}{4}x_1 x_2^2 - \frac{1}{4}x_1^3 &= 0. \end{aligned} \tag{23}$$

В силу S^1 -эквивариантности (22) каждая из указанных точек порождает окружность стационарных точек: $M_1^+ \rightarrow \{\exp(i\varphi)(x_0, ix_1, x_2, ix_3), \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}$.

Приведем теперь характерную особенность при увеличении ρ динамики пары $M^\pm(\rho)$ непрерывных и симметричных ветвей стационарных решений (22). Существует значение параметра $\beta = \beta^*, \beta^* \approx 1.91$, такое, что динамика $M^\pm(\rho)$ при фиксированном β из промежутка $(0, \beta^*)$ качественно отличается от соответствующей динамики $M^\pm(\rho)$, если $\beta > \beta^*$. А именно, если $\beta \in (0, \beta^*)$, то $M^\pm(\rho)$ сохраняют устойчивость на (ρ_0, ∞) . Если же $\beta > \beta^*$, то существует $\rho_1^* = \rho_1^*(\beta)$ такое, что пара $M^\pm(\rho)$ в результате подкритической бифуркации типа "вилка" исчезает при ρ_1^* , передавая устойчивость ветви стационарных решений $M^1(\rho) = (0, ix^1(\rho), 0, ix^3(\rho))$. Эта ветвь существует при $\alpha_1(\rho) > 0$ и устойчива на $(\rho_1^*(\beta), \rho_2^*(\beta))$. При увеличении ρ и прохождении через $\rho_2^*(\beta)$ в результате надкритической бифуркации типа "вилка" $M^1(\rho)$ теряет устойчивость. Отметим, что непрерывные функции $\rho_1^*(\beta), \rho_2^*(\beta)$ таковы, что:

- i) $\rho_1^*(\beta) - \beta_1$ — монотонно убывает;
- ii) $\rho_2^*(\beta) - \rho_1^*(\beta)$ ($\rho_2^*(\beta^*) = \rho_1^*(\beta^*) \approx 1.34$) — монотонно возрастает. Поведение $\rho_1^*(\beta), \rho_2^*(\beta)$ представлено на рис.1

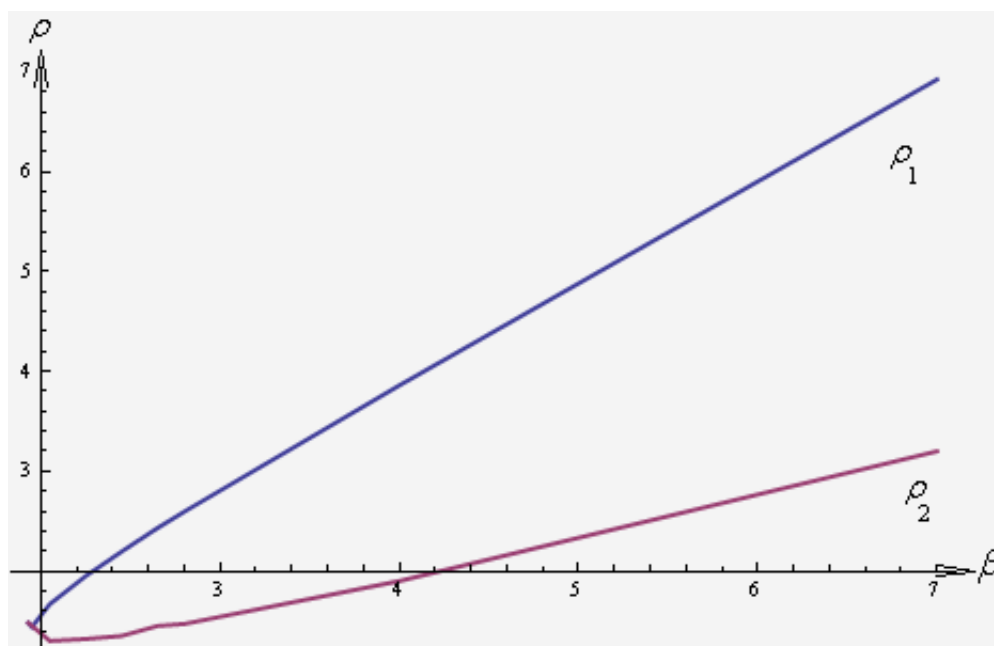


Рис. 1.

Исчезнувшая пара симметричных стационарных ветвей возникает, как бы, вновь с новыми, разумеется, характеристиками. При дальнейшем увеличении ρ имеет место усложнение этой пары при сохранении ею устойчивости и при $\rho - \rho_2^*(\beta) \gg 1$.

Подчеркнем, что аналогичная динамика двух ветвей стационарных точек имеет место и для 6-ти модовой упрощенной модели исходной задачи. В этом случае β^* сдвигается вправо ($\beta^* \approx 2.04$). В этой связи отметим, что анализ упрощенной модели (8) даёт значение $\beta^* = 2$.

Следовательно, есть основания полагать, что при увеличении ρ справедлива следующая динамика автомодельных циклов, бифурцирующих из однородного цикла. Если $\beta \in (0, \beta^*)$, то эти циклы сохраняют устойчивость при изменении ρ на (β^{-1}, ∞) . Форма их при малых $\rho - \beta^{-1}$ вполне определяется двумя параметрами с асимптотикой согласно (11). При увеличении $\rho - \beta^{-1}$ их форма усложняется. Однако она определяется и при $\rho - \beta^{-1} \gg 1$ небольшим числом параметров. При каждом фиксированном ρ выделяются 3 — 5 параметров, которые по существу и определяют форму автомодельных циклов. Поведение параметров автомодельных циклов в случае $\beta = 1$ представлено на рис.2.

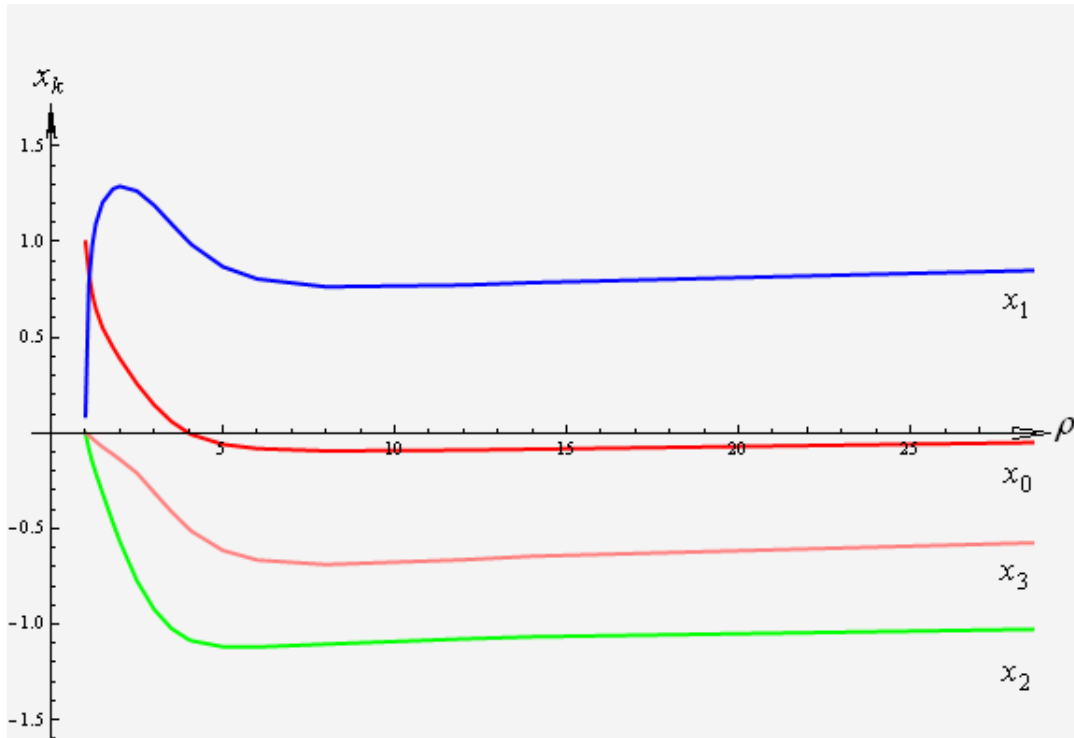


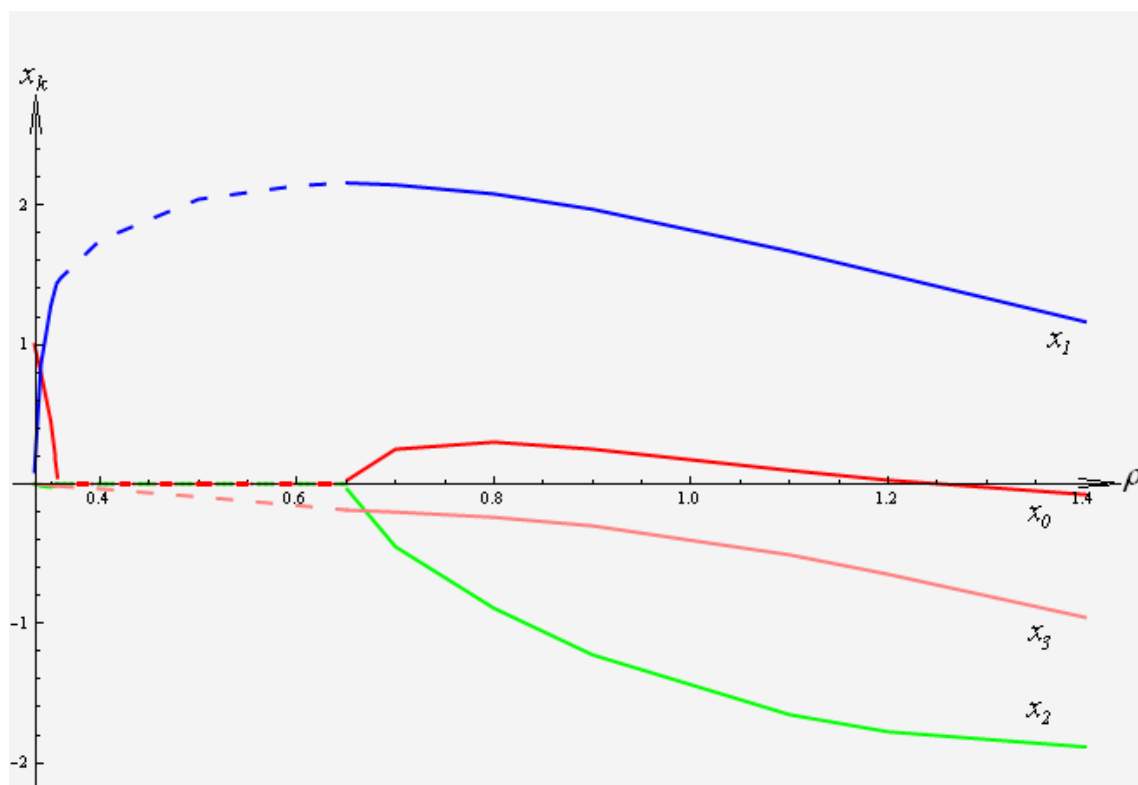
Рис. 2. $\beta = 1$.

Отметим также, что бифурцирующий из нуля неустойчивый с индексом неустойчивости 1 цикл

$$(\alpha_1)^{1/2}(\rho) \sin t \cos \theta + O(\varepsilon, \rho - \rho_1)$$

остаётся неустойчивым и при $\rho \gg 1$. Этот результат является распространением на случай $\beta \in (0, \beta^*)$ результата Маломеда [9] о неустойчивости стоячих волн. Заметим, что при увеличении $\rho - \rho_0$ форма этого цикла усложняется. Стоячая волна трансформируется в суперпозицию стоячих волн.

Если $\beta > \beta^*$, то пара симметричных автомодельных циклов существует на $(\rho_0, \rho_1(\beta))$ ($\rho_1(\beta) \approx \rho_1^*(\beta)$). Отметим усиление чувствительности при малых $\rho - \rho_1$ ключевых параметров x_0, x_1 автомодельных циклов от β . При $\rho = \rho_1(\beta)$ ($\rho_1(\beta) \approx \rho_1^*(\beta)$) в результате подкритической бифуркации эта пара циклов исчезает, а неустойчивый цикл обретает устойчивость. Этот автомодельный цикл, инвариантный относительно преобразования $x \rightarrow l - x$, сохраняет устойчивость на $(\rho_1(\beta), \rho_2(\beta))$. Затем из этого цикла ответвляются два автомодельных цикла, сохраняющих устойчивость и при $\rho - \rho_1(\beta) \gg 1$. Поведение параметров автомодельных циклов в случае $\beta = 3$ представлено на рис.3.

Рис. 3. $\beta = 3$.

6. Заключение

Остановимся здесь на основных результатах работы. В силу теоремы 1 при увеличении бифуркационного параметра ρ и его прохождении через значение $\rho_0 = \beta^{-1}$ из теряющего устойчивость пространственно однородного цикла ответвляется пара экспоненциально орбитально устойчивых пространственно неоднородных (автомодельных) циклов, переходящих друг в друга при преобразовании $x \rightarrow l - x$. Их форма при малых $\rho - \rho_0$ вполне определяется двумя параметрами. Качественно исходную задачу отражает её упрощенная форма — система (8). Отметим, что при увеличении β скорость изменения параметров автомодельных циклов быстро растет, усиливается их чувствительность от параметра ρ . При увеличении ρ и выходе из окрестности ρ_0 усиливается чувствительность автомодельных циклов от β , приобретая при этом и качественные изменения. При $\beta \in (0, \beta^*)$ и увеличении ρ указанные циклы, усложняясь по форме, сохраняют устойчивость. Подчеркнем, что переход к 6-ти модовой аппроксимации исходной задачи не приводит к качественным изменениям. Однако при этом становятся значимыми количественные отличия в значениях параметров автомодельных циклов.

Если $\beta > \beta^*$, то автомодельные циклы существуют на промежутке $(\beta^{-1}, \rho_1(\beta))$ изменения параметра ρ . При $\rho = \rho_1(\beta)$ они сливаются и исчезают, передавая при

этом устойчивость пространственно неоднородному циклу, инвариантному относительно преобразования $x \rightarrow l - x$. Этот цикл рождается из неустойчивого нулевого решения тогда, когда индекс неустойчивости нуля, увеличиваясь на единицу, становится равным два. При рождении он имеет форму стоячей волны и фактически сохраняет её при возрастании бифуркационного параметра ρ_0 . При этом его амплитуда быстро растет. Рост амплитуды этой структуры тем не менее не обеспечивает сохранение ею устойчивости при дальнейшем увеличении ρ_0 . При прохождении его через бифуркационное значение $\rho_2(\beta)$ он теряет устойчивость, испуская при этом пару устойчивых автомоделных циклов, сохраняющих устойчивость при дальнейшем увеличении ρ_0 .

Есть основания полагать, что выявленными здесь устойчивыми режимами не исчерпываются устойчивые структуры исходной задачи.

Список цитируемых источников

1. Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией / Е.Ф. Мищенко, В.А. Садовничий, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов. — М.: Физматлит. — 2005. — 430 с.
2. Алдушин А.П. Феноменологическое описание нестационарных неоднородных волн горения / А.П. Алдушин, Б.А. Маломед // Физика горения и взрыва. — 1981. — 17. N 1. — С. 3 — 12.
3. Бабин А.В. Аттракторы эволюционных уравнений. / А.В. Бабин, М.И. Вишик. — М.: Наука. — 1989.
4. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. — М.: Наука. — 1969. — 410 с.
5. Жиков В.В. Некоторые вопросы допустимости и дихотомии. Принцип усреднения. / В.В. Жиков // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1976. — 40, № 6 — С. 1380—1408.
6. Зельдович Я.Б. Сложные волновые режимы в распределенных динамических системах / Я.Б. Зельдович, Б.А. Маломед // Изв. вузов, сер. Радиофизика, — 1982. — 15. — N 6. — С. 591 — 618.
7. Колесов А.Ю. Явление буферности в теории горения / А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов // ДАН. — 2004. — 396. — N 2. — С. 170 — 173.
8. Колесов А.Ю. Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений. / А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов. — М.: Физматлит. — 2004. — 406 с.
9. Маломед Б.А. Распространение автоколебательных волн вдоль полосы. / Б.А. Маломед // Изв. вузов, сер. Радиофизика. — 1981. — 14. — N 5. — С. 571 — 576.
10. Митропольский Ю.А. Лыкова О.Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. / Ю.А. Митропольский, О.Б. Лыкова. — М.: Наука. — 1973. — 410 с.
11. Самойленко А.М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. / А.М. Самойленко. — М.: Наука. — 1987. — 302 с.
12. Самойленко А.М. Н.Н. Боголюбов и нелинейная механика. / А.М. Самойленко // УМН. — 1994. — Т49. — Вып. 5. — С. 103 -146.
13. Самойленко А.М. Динамика бегущих волн феноменологического уравнения спинового горения. / А.М. Самойленко, Е.П. Белан // ДАН. — 2006. — 406. — N 6. — С. 738-741.

14. *Самойленко А.М.* Вращающиеся волны феноменологического уравнения спинового горения / А.М. Самойленко, Е.П. Белан // ДАН. — 2008. — **421**. — N 6. — С. 749-753.
15. *Симоненко Н.Б.* Обоснование метода осреднения для абстрактного параболического уравнения. / Н.Б. Симоненко // Мат. сб. — 1970. — Т. 81(123). — №1. — С. 53 — 61.
16. Структуры и хаос в нелинейных средах. / Т.С. Ахромеева , С.П. Курдюмов , Г.Г. Малинецкий, А.А. Самарский. — М.: Наука. — 2007. — 484 с.
17. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. / Д. Хенри. — М.: Мир. — 1985. — 376 с.

Получена 30.09.2009