Динамические системы, вып. 28 (2010), 3–10

УДК 517.925.51

Устойчивость решений дифференциальных уравнений при наличии импульсных воздействий

О. В. Анашкин*, **Т. В. Довжик****, **О. В. Митько***

*Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 95007. *E-mail: anashkin@crimea.edu*
**Рязанский государственный радиотехнический университет
РОССИЯ, Рязань 390005.

Аннотация. Рассматривается задача об устойчивости нулевого решения нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени. Предполагается, что система линейного приближения устойчива, но не обеспечивает устойчивости полной системы. На основе прямого метода Ляпунова получены достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения нелинейной системы. Приведен иллюстративный пример.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с импульсным воздействием, асимптотическая устойчивость, прямой метод Ляпунова.

1. Введение

Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием моделируют поведение эволюционирующих во времени процессов разнообразной природы, которые могут почти мгновенно изменять свое состояние. Такие уравнения имеют разрывные решения с разрывами первого рода в фиксированные или нефиксированные (зависящие от фазовых координат) моменты времени. Теория уравнений с импульсным воздействием во многом аналогична классической теории дифференциальных уравнений, но имеет специфические отличия. Итоги развития теории импульсных уравнений подведены в монографиях [1]–[3] и других. Количество публикаций, посвященных уравнениям с импульсным воздействием, постоянно возрастает. Одним из важнейших направлений исследований является теория устойчивости. Прямой метод Ляпунова оказался весьма эффективным инструментом исследования устойчивости решений уравнений с импульсным воздействием [1]–[7]. В упомянутых работах получены как аналоги классических теорем А. М. Ляпунова, так и принципиально новые результаты, существенно использующие специфику импульсного воздействия. Найти функцию Ляпунова для конкретной системы уравнений обычно очень непросто, поэтому вывод условий устойчивости, допускающих более широкий класс вспомогательных функций, всегда остается актуальным направлением исследований, имеющим важное практическое значение.

В настоящей работе на уравнения с импульсным воздействием распространяется метод обобщенных функций Ляпунова [8]–[10]. Обобщенные функции Ляпунова удовлетворяют менее ограничительным требованиям, чем классические функции Ляпунова и это облегчает подбор таких функций. Доказана теорема о достаточных условиях асимптотической устойчивости. Приведен иллюстративный пример.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени [1] следующего вида

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f(t,x) + R(t,x), \quad t \neq \tau_k, \\ &\Delta x|_{t=\tau_k} = J_k(x), \end{aligned} \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, система имеет нулевое решение: $f(t,0) = R(t,0) = J_k(0) = 0$, $\Delta x|_{t=\tau_k} = x(\tau_k + 0) - x(\tau_k - 0)$, $\tau_k < \tau_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$, $\tau_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Традиционно, следуя [1], предполагаем непрерывность решений системы (1) слева, т. е. $x(t) = x(t-0)$. Функции f, R непрерывны при $t \neq \tau_k$ и вместе с функциями J_k удовлетворяют условию Липшица по x в некоторой окрестности нуля в $\mathbb{R}^n$, что обеспечивает единственность решения $x(t; t_0, x^0)$ задачи Коши для системы (1) с начальными значениями $t_0 \geq 0$ и x^0 из некоторой окрестности нуля в $\mathbb{R}^n$.

Систему (1) будем называть *возмущенной* по отношению к *невозмущенной* системе, не подверженной импульсным воздействиям:

$$\dot{y} = f(t,y). \tag{2}$$

Цель настоящей работы — поиск достаточных условий, обеспечивающих устойчивость нулевого решения системы (1) при наличии двух возмущающих факторов: импульсного воздействия и возмущения правой части системы.

Определение. Нулевое решение системы (1) назовем

– *устойчивым*, если для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \geq 0$ найдется $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что для любого $x^0 \in B_\delta$ $x(t; t_0, x^0) \in B_\varepsilon$ при всех $t \geq t_0$;

– *равномерно устойчивым*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любых $t_0 \geq 0$ и $x^0 \in B_\delta$ $x(t; t_0, x^0) \in B_\varepsilon$ при всех $t \geq t_0$;

– *притягивающим*, если для любого $t_0 \geq 0$ существует $\eta > 0$ такое, что для любых $\varepsilon > 0$ и $x^0 \in B_\eta$ найдется $\sigma > 0$ такое, что $x(t; t_0, x^0) \in B_\varepsilon$ при всех $t \geq t_0 + \sigma$;

– *равномерно притягивающим*, если некоторого $\eta > 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\sigma(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $t_0 \geq 0$ и $x^0 \in B_\eta$ $x(t; t_0, x^0) \in B_\varepsilon$ при всех $t \geq t_0 + \sigma(\varepsilon)$;

– *асимптотически устойчивым*, если оно является устойчивым и притягивающим.

– *равномерно асимптотически устойчивым*, если оно является равномерно устойчивым и равномерно притягивающим.

Решение, не являющееся устойчивым, называется *неустойчивым.*

Будем предполагать, что невозмущенная система (2) критическая, точнее, ее линеаризация

$$\dot{z} = \frac{\partial f}{\partial z}(t,0)z \tag{3}$$

устойчива, но не гарантирует устойчивость нулевого решения системы (2). Пусть существует функция Ляпунова $V(t,x)$ системы (2), удовлетворяющая теореме об устойчивости, т.е. $V(t,x)$ положительно определена в некоторой окрестности нуля и не возрастает вдоль решений:

$$\left.\frac{dV}{dx}\right|_{(2)} = \frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial V}{\partial x}(t,x) f(t,x) \le 0. \tag{4}$$

Обозначим $x^k = x(\tau_k)$, $k = 1, 2, \ldots$. Как известно [1, стр. 20], значение $x(t; t_0, x^0)$ решения задачи Коши для системы (1) с начальными данными t_0 и x^0 можно представить в виде

$$x(t; t_0, x^0) = x^0 + \sum_{t_0 \le \tau_k < t} J_k(x^k) + \int_{t_0}^{t} \left[f(s, x(s)) + R(s, x(s)) \right] ds. \tag{5}$$

Функция $V(t,x)$ является непрерывной и вдоль решения $x(t)$ системы (1) также будет претерпевать разрывы первого рода в моменты импульсных воздействий τ_k. Для значения $V(t, x(t))$ получим представление, аналогичное (5):

$$V(t, x(t)) = V(t_0, x^0) + \sum_{t_0 \le \tau_k < t} \left[V(\tau_k, x^k + J_k(x^k)) - V(\tau_k, x^k) \right] + \int_{t_0}^{t} \left.\frac{dV}{dt}\right|_{(1)} (s, x(s))\, ds.$$

Разность под знаком суммы представим в виде

$$V(\tau_k, x^k + J_k(x^k)) - V(\tau_k, x^k) = J_k(x^k) \int_0^1 \frac{\partial V}{\partial x}(\tau_k, x^k + \lambda J_k(x^k))\, d\lambda. \tag{6}$$

Обозначая

$$W_k(x) = J_k(x) \int_0^1 \frac{\partial V}{\partial x}(\tau_k, x + \lambda J_k(x))\, d\lambda \tag{7}$$

и учитывая (4), окончательно получим

$$V(t, x(t)) \le V(t_0, x^0) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial V}{\partial x}(t,x) R(t,x)\, ds + \sum_{t_0 \le \tau_k < t} W_k(x^k). \tag{8}$$

3. Теорема об асимптотической устойчивости

Введем следующие обозначения: $B_h \subset \mathbb{R}^n$ — открытый шар радиуса $h > 0$ с центром в начале координат (h-окрестность нуля); $\mathbb{R}_+$ — множество неотрицательных действительных чисел; $\mathcal{T} = \{t \in \mathbb{R}_+ \colon t \neq \tau_k\}$; $\mathcal{K}$ — множество всех непрерывных строго возрастающих функций $a \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $a(0) = 0$; $\Phi(t,x) = \dfrac{\partial V}{\partial x}(t,x)R(t,x)$. Будем писать:

$$F(t,x) = o(\|x\|) \text{ при } \|x\| \to 0,$$

если $\dfrac{F(t,x)}{\|x\|} \to 0$ при $\|x\| \to 0$ равномерно по $t \geq 0$.

В дальнейшем будем считать, что моменты импульсного воздействия τ_k распределены более или менее равномерно, а именно,

$$0 < \theta_1 \leq \tau_{k+1} - \tau_k \leq \theta_2, \tag{9}$$

для некоторых положительных постоянных $\theta_1 \leq \theta_2$.

Теорема. *Пусть для некоторого $h > 0$ в области $G_h = \mathbb{R}_+ \times B_h$ выполнены условия:*

1) *$R(t,x) = o(\|x\|)$, $J_k(x) = o(\|x\|)$ при $\|x\| \to 0$ равномерно относительно $k = 1, 2, \ldots$ и $t \geq 0$;*

2) *существует непрерывно дифференцируемая функция $V \colon G_h \to \mathbb{R}$, $(t,x) \mapsto V(t,x)$, и функция $a \in \mathcal{K}$ такие, что*

   a) $a(\|x\|) \leq V(t,x)$, $V(t,0) = 0$, b) $\left.\dfrac{dV}{dx}\right|_{(2)} = \dfrac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \dfrac{\partial V}{\partial x}(t,x) f(t,x) \leq 0$;

3) *существуют константы $M > 0$, $d_1 > 1$, $d_2 > 1$ такие, что*

$$|\Phi(t,x)| \leq M\|x\|^{d_1}, \quad |W_k(x)| \leq M\|x\|^{d_2}, \forall (t,x) \in G_h,$$
$$|\Phi(t,x) - \Phi(t,y)| \leq M r^{d_1 - 1}\|x - y\|, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+,\ x, y \in B_r, \quad 0 < r < h,$$
$$|W_k(x) - W_k(y)| \leq M r^{d_2 - 1}\|x - y\|, \quad \forall x, y \in B_r, \quad 0 < r < h, \quad k = 1, 2, \ldots;$$

4) *существуют константы $T_0 > 0$, $h_0 \in (0, h]$ и $\delta > 0$ такие, что для любых $t_0 \geq 0$, $x^0 \in B_{h_0}$, $T > T_0$ верно неравенство*

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+T} \Phi(t, z(t; t_0, x^0))\, dt + \sum_{t_0 \leq \tau_k < t_0 + T} W_k(z(\tau_k; t_0, x^0)) \leq -\delta \|x^0\|^d T,$$

   где $d = \min\{d_1, d_2\} > 1$, $z(t; t_0, x^0)$ — решение системы (3) с начальным условием $z(t_0) = x^0$.

Тогда нулевое решение системы (1) *асимптотически устойчиво.*

Если дополнительно к условию 2 *функция* $V(t,x)$ *допускает бесконечно малый высший предел:* $V(t,x) \le b(\|x\|)$ *для некоторой функции* $b \in \mathcal{K}$, *то нулевое решение системы* (1) *равномерно асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Покажем сначала, что нулевое решение системы (1) устойчиво по Ляпунову. Фиксируем произвольно малое $\varepsilon > 0$ и некоторое $\tau \ge 0$. Введем в рассмотрение область фазового пространства

$$\Omega_t = \{x \in B_{h_0} \colon V(t,x) \le a(\varepsilon/2)\}.$$

В силу условия 2а теоремы Ω_τ содержится в $B_{\varepsilon/2}$. Поскольку $V(\tau,0) = 0$, то существует число $\eta > 0$ такое, что $B_\eta \subset \Omega_\tau$. Пусть x_τ — произвольная точка из B_η и $x(t) = x(t;\tau,x_\tau)$ — траектория возмущенной системы, выходящая из точки x_τ в начальный момент τ. Пусть при некотором $t_0 > \tau$ траектория $x(t)$ покидает область Ω_t при $t > \tau$. Сначала предпложим, что t_0 есть точка непрерывности $x(t;\tau,x_\tau)$. Покажем, что траектория $x(t)$ возвратится обратно в область Ω_t за конечное время $T \ge T_0$ и при этом все время будет оставаться в ε-окрестности нуля B_ε. Положим $x^0 = x(t_0)$.

Пусть $z(t) = z(t;t_0,x^0)$ — траектория линейной системы (3). Используя лемму Гроноулла и условия теоремы, нетрудно показать, что найдется функция $c_T \in \mathcal{K}$ такая, что для $t \in [t_0, t_0+T]$ равномерно по $t_0 \ge 0$ выполняются неравенства

$$\|x(t;t_0,x^0) - z(t;t_0,x^0)\| \le c_T(\|x^0\|) \text{ при } \|x^0\| \to 0, \tag{10}$$

$$\|x(t;t_0,x^0) - y(t;t_0,x^0)\| \le c_T(\|x^0\|) \text{ при } \|x^0\| \to 0. \tag{11}$$

Оценим изменение функции $V(t,x(t))$ на отрезке $[t_0,t_0+T]$. Предполагая, что $t \in [t_0,t_0+T]$, из (8) получим

$$\begin{aligned} V(t,x(t)) \le V(t_0,x^0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(s,x(s))\,ds + \sum_{t_0<\tau_k<t} W_k(x^k) \le \\ \le V(t_0,x^0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(s,z(s))\,ds + \sum_{t_0\le\tau_k<t} W_k(z^k) + \\ + \int_{t_0}^{t} |\Phi(s,x(s)) - \Phi(s,z(s))|\,ds + \sum_{t_0\le\tau_k<t} \left|W_k(x^k) - W_k(z^k)\right|. \end{aligned} \tag{12}$$

Используя условия теоремы, из (10) на основании неравенства (12) нетрудно вывести следующий результат: найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при условии $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ в момент $t_1 = t_0 + T$ будет выполнено неравенство

$$V(t_1,x(t_1)) \le V(t_0,x^0) - \delta\|x^0\|^d T < V(t_0,x^0). \tag{13}$$

Кроме того, благодаря условию 2b теоремы и (11) при достаточно малом $\varepsilon_0 > 0$ траектория решения возмущенного уравнения будет оставаться в ε-окрестности начала при $t_0 \le t \le t_0 + T$.

Мы рассмотрели случай, когда $t_0 \in \mathcal{T}$. Если t_0 совпадает с моментом импульсного воздействия, т.е. $V(t_0, x(t_0)) \le a(\varepsilon/2)$, а $V(t_0 + 0, x(t_0 + 0)) > a(\varepsilon/2)$, то оценки (10)–(11) сохранятся, может быть, с другой функцией $\widetilde{c}_T \in \mathcal{K}$, поскольку $|J_k(x)| = o(\|x\|)$ равномерно по k при $\|x\| \to 0$, и все выводы останутся в силе.

Таким образом, траектория может сколько угодно раз покидать область Ω_t, но всегда будет в нее возвращаться, постоянно оставаясь в ε-окрестности. Устойчивость доказана.

Обозначим $t_p = t_0 + pT$, $p = 1, 2, \ldots$. Благодаря равномерности всех полученных выше оценок относительно $t_0 \in \mathbb{R}_+$ и $x^0 \in B_{\varepsilon_0}$ для произвольного p имеет место неравенство

$$V(t_{p+1}, x(t_{p+1})) \le V(t_p, x(t_p)) - \delta \|x(t_p)\|^d T < V(t_p, x(t_p)).$$

Следовательно

$$0 < V(t_{p+1}, x(t_{p+1})) \le V(t_0, x(t_0)) - \delta T \sum_{l=0}^{p} \|x(t_l)\|^d < V(t_0, x(t_0)). \tag{14}$$

Тогда $\|x(t_l)\| \to 0$ при $l \to \infty$. Это означает, что $x(t) \to 0$. В самом деле, из представления (5) и свойств системы (1) следует оценка

$$\|x(t; t_l, x(t_l)) - x(t_l)\| \le Const(T)(\|x(t_l)\|),$$

на отрезке $t_l \le t \le t_l + T$, причем константа $Const(T)$ зависит только от T для всех $t_l \ge 0$ и $x(t_l)$ из фиксированой окрестности нуля.

Равномерность устойчивости при дополнительном условии существования бесконечно малого высшего предела функции Ляпунова $V(t, x)$ следует из того, что тогда величина $\eta = b^{-1}(a(\varepsilon/2))$ и не зависит от начального момента τ. $\square$

4. Иллюстративный пример

Рассмотрим в качестве иллюстративного примера скалярное уравнение

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(t)x^3, \quad t \ne \tau_k, \\ \Delta x|_{t=\tau_k} &= J_k(x), \end{aligned} \tag{15}$$

где $a(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos t$, $J_k(x) = (\beta_0 + \beta_1 \sin \tau_k)x^3$, α_0, α_1, β_0, β_1 — вещественные постоянные, $\tau_k = k$, $k - 1, 2, \ldots$. Невозмущенное уравнение в данном примере тривиальное, $\dot{y} = 0$, и совпадает с линеаризацией.

Найдем достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (15). В качестве функции Ляпунова возьмем функцию $V(x) = x^2/2$. Проверим условия теоремы. Для данного примера имеем:

$$\Phi(t,x) = (\alpha_0 + \alpha_1 \cos t)x^4, \quad W_k(x) = J_k(x)x + 0.5J_k^2(x), \quad d_1 = d_2 = d = 4.$$

Основное условие теоремы (условие 4) проверяется для $z(t;t_0,x_0) \equiv x_0$:

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+T} \Phi(t,x_0)\,dt = x_0^4 \left\{ \alpha_0 + \frac{\alpha_1[\sin(t_0+T) - \sin(t_0)]}{T} \right\} T, \tag{16}$$

$$\sum_{t_0 \le k < t_0+T} W_k(x_0) = x_0^4 \left(\beta_0 + \beta_1 \frac{1}{[T]} \sum_{t_0 \le k < t_0+T} \sin k \right) [T] + o(|x_0|^4)[T], \tag{17}$$

где $[T]$ — целая часть числа T. Из формул (16)– (17) на основании доказанной теоремы делаем вывод, что нулевое решение уравнения (15) равномерно асимптотически устойчиво при любых значениях постоянных α_1, β_1, если выполнено неравенство

$$\alpha_0 + \beta_0 < 0.$$

Вместе с тем необходимо отметить, что величины α_1, β_1 влияют на размер области притяжения. С ростом $|\alpha_1| + |\beta_1|$ область притяжения уменьшается.

Очевидно, функция V не удовлетворяет условиям опубликованных ранее теорем второго метода Ляпунова для импульсных систем [1]–[6]. Вместе с тем, многие известные результаты являются следствием доказанной в настоящей работе теоремы об асимптотической устойчивости.

5. Заключение

В статье представлены достаточные условия асимптотической устойчивости и равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения нелинейной системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени. Результат получен в рамках прямого метода Ляпунова и допускает более широкий клас подходящих функций, чем известные в литературе теоремы.

Список цитируемых источников

1. *Самойленко А. М.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк. — Киев, Вища школа, 1987. — 288 с.
2. *Bainov D. D.* Systems with impulse effect: stability, theory and applications / D. D Bainov, P. S. Simeonov. — N.-Y., Halsted Press, 1989.
3. *И*мпульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью / [Н. А. Перестюк, В. И. Плотников, А. М. Самойленко, Н. В. Скрипник]. — К.: Ин-т математики НАН Украины, 2007. — 428 с.

4. *Игнатьев А. О.* Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости решений систем диффернциальных уравнений с импульсным воздействием / А. О. Игнатьев // Матем. сборник. — 2003. — Т.194, №.10. — С.117-132.
5. *Гладилина Р. И.* О необходимых и достаточных условиях устойчивости импульсных систем / Р. И.Гладилина, А. О. Игнатьев // Укр. матем. журнал. — 2003. — Т.55, No.8. — С. 1035-1043.
6. *Гладилина Р. И.* Об устойчивости периодических импульсных систем / Р. И.Гладилина, А. О. Игнатьев // Матем. заметки. — 2004. — Т.76, no.1. — Р.44-51.
7. *Perestyuk M. O.* Some modern aspects of the theory of impulsive differential equations / M. O.Perestyuk, O. S. Chernikova // Ukrainian Mathematical Journal. — 2008. — Vol.60, no.1. — P. 91-107.
8. *Хапаев М. М.* Усреднение в теории устойчивости: Исследование резонансных многочастотных систем / М. М.Хапаев. — М.: Наука, 1986. — 192 с.
9. *Хапаев М. М.* Асимптотические методы и устойчивость в теории нелинейных колебаний / М. М.Хапаев. — М.: Высшая школа, 1988. — 184 с.
10. *Анашкин О. В.* Об устойчивости в системах с импульсными воздействиями, содержащих возмущения // Тез. конф. "Моделирование и исследование устойчивости физич. процессов". — К.: Об-во "Знание". — 1990. — С.3-4.

Получена 12.06.2010