Динамические системы, том 1(29), №1 (2011), 5–14

УДК 517.925.51

Достаточные условия устойчивости для нелинейных систем с импульсным воздействием

О. В. Анашкин, О. В. Митько

Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 95007. *E-mail: anashkin@crimea.edu*

Аннотация. Рассматривается задача об устойчивости нулевого решения нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени. На основе прямого метода Ляпунова получены достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения нелинейной системы. Приведен иллюстративный пример.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с импульсным воздействием, асимптотическая устойчивость, прямой метод Ляпунова.

1. Введение

Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием моделируют поведение процессов разнообразной природы, которые в определенные моменты времени могут почти мгновенно изменять свое состояние. Такие уравнения имеют разрывные решения с разрывами первого рода в фиксированные или нефиксированные (зависящие от фазовых координат) моменты времени. Теория уравнений с импульсным воздействием во многом аналогична классической теории дифференциальных уравнений, но имеет существенные специфические отличия. Одним из важнейших направлений исследований является развитие теории устойчивости. Прямой метод Ляпунова оказался весьма эффективным инструментом исследования устойчивости решений уравнений с импульсным воздействием [2]–[8], [10], [11]. В упомянутых работах получены как аналоги классических теорем А. М. Ляпунова, так и принципиально новые результаты, существенно использующие специфику импульсного воздействия.

Настоящая работа продолжает исследования авторов [2]–[4], распространяющие на уравнения с импульсным воздействием подход, разработанный ранее первым автором для обыкновенных дифференциальных уравнений [1], [9, стр.103]. Теоремы о достаточных условиях асимптотической устойчивости и неустойчивости формулируются в терминах свойств кусочно-дифференцируемых функций Ляпунова. Дано детальное доказательство теоремы об асимптотической устойчивости. Приводится иллюстративный пример.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени [8]

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f(t,x), \quad t \neq \tau_k, \\ &\Delta x|_{t=\tau_k} = J_k(x), \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, система имеет нулевое решение: $f(t,0) = J_k(0) = 0$, $\Delta x|_{t=\tau_k} = x(\tau_k+0) - x(\tau_k-0)$, $\tau_k < \tau_{k+1}$, $k = 1,2,\ldots$, $\tau_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Функции $f(t,x)$ и $J_k(x)$ удовлетворяют условию Липшица по x в некоторой окрестности нуля $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ равномерно по $t \in \mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R}\colon t \geq 0\}$ и $k = 1,2,\ldots$. Следуя [11], будем предполагать, что правая часть f системы дифференциальных уравнений в (2.1) непрерывна на множестве $(\tau_k, \tau_{k+1}] \times \mathcal{D}$ и для каждого $x \in \mathcal{D}$ существует предел $\lim\limits_{(t,z)\to(\tau_k+0,x)} f(t,z)$, $k = 1,2,\ldots$. Иными словами, мы допускаем, что правая часть $f(t,x)$ дифференциального уравнения в (2.1) имеет по переменной t разрывы первого рода.

Как обычно, через $x(t) = x(t;t_0,x^0)$ будем обозначать решение задачи Коши для системы (2.1) с начальным условием $x(t_0+0) = x^0$ (таким образом учитывается возможность того, что начальный момент совпадает с моментом импульсного воздействия). Традиционно предполагаем непрерывность решений системы (2.1) слева, т. е. $x(t) = x(t-0)$.

Известно, что определения различных типов устойчивости по Ляпунову нулевого решения для систем уравнений с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени буквально совпадают с соответствующими определениями для обыкновенных дифференциальных уравнений и приведены, например, в [2]. Основная цель данной работы — доказательство теоремы о достаточных условиях устойчивости нулевого решения нелинейной системы (2.1).

В дальнейшем существенную роль играет *линеаризация* системы (2.1) в нуле

$$\begin{aligned} &\dot{y} = A(t)y, \quad t \neq \tau_k, \\ &\Delta y|_{t=\tau_k} = B_k y, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где $|f(t,y) - A(t)y| = o(|y|)$, $|J_k(y) - B_k y| = o(|y|)$ при $|y| \to 0$ равномерно по $t \geq 0$ и $k = 1,2,\ldots$. Здесь и далее $|\cdot|$ — норма в $\mathbb{R}^n$. Мы будем предполагать, что эта система устойчива по Ляпунову и матрицант системы ограничен вместе с обратным.

Введем в рассмотрение множества

$$\mathcal{T} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\tau_k, \tau_{k+1}), \quad G = \mathbb{R}_+ \times \mathcal{D}, \quad \mathcal{G} = \mathcal{T} \times \mathcal{D}.$$

Предположим также, что $0 < \theta_{min} \leq \tau_{k+1} - \tau_k$. Это условие гарантирует, что целое число $i(t_0, t_0+T)$ — количество моментов импульсного воздействия на отрезке $[t_0, t_0+T]$ ограничено сверху величиной T/θ_{min}, зависящей только от длины отрезка T.

Совершенно естественно, что прямой метод Ляпунова для систем с импульсным воздействием допускает использование разрывных по времени t функций Ляпунова. Следующий класс $\mathcal{V}_1$ кусочно-дифференцируемых функций Ляпунова нередко используется в работах, посвященных устойчивости импульсных систем.

Определение. Будем говорить, что функция $V\colon G \to \mathbb{R}$, $(t,x) \mapsto V(t,x)$, принадлежит классу $\mathcal{V}_1$, если (1) $V(t,0) \equiv 0$ для любого $t \in \mathbb{R}$; (2) функция V непрерывно дифференцируема на множестве $\mathcal{G}$; (3) для всякого x из $\mathcal{D}$ и $k = 1,2,\ldots$ $\lim_{t\to\tau_k-0} V(t,x) = V(\tau_k,x)$ и существует конечный предел

$$\lim_{(t,z)\to(\tau_k+0,x)} V(t,z) = V(\tau_k+0,x). \tag{2.3}$$

3. Теоремы об устойчивости

Введем следующие обозначения: $B_h \subset \mathbb{R}^n$ — открытый шар радиуса $h > 0$ с центром в начале координат (h-окрестность нуля); $\mathcal{K}$ — множество всех непрерывных строго возрастающих функций $a\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $a(0) = 0$ («класс Хана»).

Теорема 1. *Предположим, что для некоторого $h > 0$ в области $G_h = \mathbb{R}\times B_h \subset G$ существуют функции $V \in \mathcal{V}_1$ и $\Phi\colon G_h \to \mathbb{R}$ такие, что:*

(i) $a(|x|) \le V(t,x)$ *для некоторой функции $a \in \mathcal{K}$ и любых $(t,x) \in G_h$;*

(ii) $\dot V\Big|_{(2.1)} \le \Phi(t,x)$ *для $(t,x) \in \mathcal{T}\times B_h$;*

(iii) *существуют постоянные $d > 1$ и $M > 0$ такие,что*

$$|\Phi(t,x)| \le M|x|^d, \quad |\Phi(t,x') - \Phi(t,x'')| \le M r^{d-1}|x'-x''|$$

для $(t,x'),(t,x'') \in \mathcal{T}\times B_r$ при всяком $r \in (0,h)$;

(iv) *система линейного приближения (2.2) устойчива и существуют константы $0 < \nu_1 \le \nu_2$ такие, что для любых $t_0 \ge 0$ и $x^0 \in B_h$ решение $y(t;t_0,x^0)$ системы (2.2) при $t \ge 0$ удовлетворяет двойному неравенству*

$$\nu_1|x^0| \le |y(t;t_0,x^0)| \le \nu_2|x^0|;$$

(v) *существуют постоянные $T_0 > 0$ и $\delta_0 > 0$ такие,что для всех (t_0,x^0) из G_h при $\Delta t \ge T_0$*

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t} \Phi(t,y(t;t_0,x^0))\,dt \le -2\delta_0|x^0|^d\Delta t,$$

где $y(t;t_0,x^0)$ — решение линеаризации (2.2);

(vi) $V(\tau_k + 0, x + J_k(x)) - V(\tau_k, x) \le 0, \quad k = 1, 2, \ldots.$

Тогда нулевое решение системы (2.1) *асимптотически устойчиво.*

Если, кроме того, найдется функция $b \in \mathcal{K}$ *такая, что* $V(t,x) \le b(|x|)$ *в* G_h, *то нулевое решение системы* (2.1) *равномерно асимптотически устойчиво.*

Областью положительности функции $V\colon G \to \mathbb{R}$, $V(t,0) \equiv 0$, назовем множество $\{V > 0\} = \{(t,x) \in G\colon V(t,x) > 0\}$. Будем говорить, что область $\{V > 0\}$ *примыкает к нулю*, если при всяком $t \ge 0$ и сколь угодно малом $\rho > 0$ множество $\{V > 0\}_t = \{x \in \mathcal{D}\colon V(t,x) > 0\}$ имеет открытое пересечение со сферой $\{|x| = \rho\}$.

Достаточные условия неустойчивости нулевого решения уравнения (2.1) мы также будем формулировать в терминах свойств разрывной вспомогательной функции V из класса $\mathcal{V}_1$.

Теорема 2 ([4]). *Пусть существуют постоянные* $\tau \ge 0$, $h > 0$ *и функции* $V \in \mathcal{V}_1$, $\Phi\colon [\tau,\infty) \times B_h \to \mathbb{R}$, $b \in \mathcal{K}$ *такие, что:* (i) *функция* V *обладает примыкающей к нулю областью положительности* $\{V > 0\}$ *и* $V(t,x) \le b(|x|)$ *в области* $\{V > 0\}$; (ii) $\dot V\Big|_{(2.1)}(t,x) \ge \Phi(t,x)$ *в области* $\mathcal{T} \times B_h$; (iii) *выполнены условия* (iii) *и* (iv) *теоремы 1;* (iv) *существуют постоянные* $T_0 > 0$ *и* $\delta_0 > 0$ *такие,что для всех* (t_0, x^0) *из области положительности* $\{V > 0\}$ *при* $\Delta t \ge T_0$ $\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t} \Phi(t, y(t;t_0,x^0))\,dt \ge 2\delta_0 |x^0|^d \Delta t$, *где* $y(t;t_0,x^0)$ *— решение линеаризации* (2.2)*;* (v) $V(\tau_k + 0, x + J_k(x)) - V(\tau_k, x) \ge 0, \quad k = 1, 2, \ldots.$

Тогда нулевое решение системы (2.1) *неустойчиво.*

Теорема о неустойчивости доказана в статье авторов [4]. Детальному доказательству теоремы об асимптотической устойчивости посвящен следующий раздел.

4. Доказательство теоремы об асимптотической устойчивости

Доказательство теоремы 1. Сначала докажем, что нулевое решение системы (2.1) устойчиво по Ляпунову. Фиксируем произвольно малое $\varepsilon > 0$ и некоторое $\sigma \in \mathcal{T}$. Положим $\varepsilon_1 = \varepsilon/(2\nu_2)$, где $\nu_2 \ge 1$ — константа из условия (iv) теоремы, и введем в рассмотрение область фазового пространства — окрестность нуля (в общем случае подвижную, зависящую от значения t), определенную следующим образом:

$$\Omega_t = \{x \in B_h\colon V(t,x) \le a(\varepsilon_1)\}. \tag{4.1}$$

В силу условия (i) теоремы Ω_t содержится в B_{ε_1}. Поскольку функция V положительно определена, $V(\sigma, 0) = 0$ и $V(\sigma, x)$ непрерывна по x, то существует число $\eta > 0$ такое, что $B_\eta \subset \Omega_\sigma$. Пусть x_σ — произвольная точка из B_η и $x(t) = x(t;\sigma,x_\sigma)$ — траектория системы (2.1), выходящая из точки x_σ в начальный момент σ. Пусть при некотором $t_0 > \sigma$ траектория $x(t)$ покидает область Ω_t при

$t > \tau$, т. е. $V(t_0, x(t_0)) = a(\varepsilon_1)$, но $V(t, x(t)) > a(\varepsilon_1)$ при $t > \tau$ и достаточно близких к τ.

Если t_0 есть момент импульсного воздействия, то $V(t_0+0, x(t_0+0)) = a(\varepsilon_1)$. Действительно, согласно условию (vi) теоремы $V(t_0+0, x(t_0+0)) \le V(t_0, x(t_0)) = a(\varepsilon_1)$, но $V(t, x(t)) \to V(t_0+0, x(t_0+0))$ при $t \to t_0+0$ в силу (2.3).

Покажем, что траектория $x(t)$ возвратится обратно в область Ω_t за конечное время, не превосходящее T_0, и все это время будет оставаться в ε-окрестности нуля B_ε.

Положим $x^0 = x(t_0)$. Пусть $y(t) = y(t; t_0, x^0)$ — траектория линейной системы (2.2), выпущенная из точки x^0. Оценку нормы разности решений систем (2.1) и (2.2) на отрезке $[t_0, t_0+T]$ при наших предположениях относительно свойств этих систем получим при помощи теоремы 2.5 из [8, стр. 19] (теорема 4 в [7, стр. 25]):

$$|x(t; t_0, x^0) - y(t; t_0, x^0)| \le a_0(|x^0|)\left[(1+L)^{i(t-t_0)} e^{L(t-t_0)} - 1\right], \tag{4.2}$$

где a_0 — функция из класса $\mathcal{K}$ такая, что

$$|f(t,x) - A(t)x| \le a_0(|x|), \quad |J_k(x) - B_k x| \le a_0(|x|) \quad \text{при } \ t \ge 0 \ \ x \in B_h, \ k = 1, 2, \ldots,$$

причем $a_0(|x|) = o(|x|)$ при $|x| \to 0$ равномерно относительно $t \ge 0$ и $k = 1, 2, \ldots$. Из (4.2) следует, что найдется функция $c_T \in \mathcal{K}$, удовлетворяющая равномерно относительно $t \ge 0$ условию

$$\lim_{\alpha \to 0} c_T(\alpha)/\alpha = 0, \tag{4.3}$$

и такая, что для $t_0 \ge 0$ и $x^0 \in B_h$ при $t \in [t_0, t_0+T]$ выполняется неравенство

$$|x(t; t_0, x^0) - y(t; t_0, x^0)| \le \sup_{t \in [t_0, t_0+T]} |x(t; t_0, x^0) - y(t; t_0, x^0)| \le c_T(|x^0|). \tag{4.4}$$

Оценим изменение функции $V(t, x(t))$ на отрезке $[t_0, t_0+T_0]$. Учитывая неравенство (4.4) и условия теоремы, получим

$$\begin{aligned} V(t_0+T_0, x(t)) &\le V(t_0, x^0) + \int\limits_{t_0}^{t_0+T_0} \Phi(s, x(s))\,ds \le \\ &\le V(t_0, x^0) + \int\limits_{t_0}^{t_0+T_0} \Phi(s, y(s))\,ds + \int\limits_{t_0}^{t_0+T_0} |\Phi(s, x(s)) - \Phi(s, y(s))|\,ds \le \\ &\le V(t_0, x^0) + \int\limits_{t_0}^{t_0+T_0} \Phi(s, y(s))\,ds + T_0 M (2\nu_2 |x^0|)^{d-1} c_{T_0}(|x^0|) \le \\ &\le V(t_0, x^0) + |x^0|^d T_0 \left[-2\delta_0 + M(2\nu_2)^{d-1} \frac{c_{T_0}(|x^0|)}{|x^0|}\right], \end{aligned} \tag{4.5}$$

где $y(s) = y(s, t_0, x^0)$ — решение линеаризации (2.2).

Отсюда следует, что найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ будет выполнено неравенство

$$V(t_0 + T_0, x(t_0 + T_0)) \le V(t_0, x^0) - \delta_0 |x^0|^d T_0 < V(t_0, x^0). \tag{4.6}$$

Кроме того, при достаточно малом $\varepsilon_0 > 0$ траектория решения возмущенного уравнения будет оставаться в ε-окрестности начала при $t_0 \le t \le t_0 + T_0$.

В самом деле, в силу (4.3) можно выбрать $\varepsilon_0 > 0$ так, чтобы при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ выполнялось неравенство

$$\frac{c_{T_0}(\varepsilon/(2\nu_2))}{\varepsilon} \le \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\delta_0 (2\nu_2)^{2-d}}{M}\right\}. \tag{4.7}$$

Тогда из (4.5) следует (4.6). Это означает, что траектория $x(t) = x(t, \sigma, x_\sigma)$ в некоторый момент времени $t = t_0^* \in (t_0, t_0 + T_0)$ возвращается в область Ω_t и остается там при $t_0^* < t \le t_0 + T_0$. При этом траектория на всем промежутке $t_0 \le t \le t_0 + T_0$ не покидает ε-окрестность начала, поскольку в силу (4.1) и (4.7) при $t_0 \le t \le t_0 + T_0$

$$|x(t)| \le |y(t)| + |x(t) - y(t)| \le \nu_2 |x^0| + c_{T_0}(|x^0|) \le \varepsilon/2 + c_{T_0}(\varepsilon/(2\nu_2)) \le \varepsilon. \tag{4.8}$$

Оценки, на основании которых получены неравенства (4.6) и (4.8), равномерны относительно $t_0 \ge 0$ и $x^0 \in B_\varepsilon$, поэтому траектория $x(t) = x(t, \sigma, x_\sigma)$ может сколько угодно раз покидать область Ω_t, но всегда будет в нее возвращаться на промежутке времени, не превосходящем фиксированной длины T_0. Это доказывает, что нулевое решение системы (2.1) устойчиво по Ляпунову.

Если функция V допускает бесконечно малый высший предел, то величина η, обеспечивающая вложение $B_\eta \subset \Omega_\sigma$, не зависит от σ, а именно, достаточно положить $\eta = b^{-1}(a(\varepsilon_1))$. Это обеспечивает равномерную устойчивость нулевого решения системы (2.1).

Теперь докажем притяжение. Поскольку устойчивость уже доказана, то траектория $x(t)$ будет оставаться в сколь угодно малой окрестности начала вечно и решение системы будет оставаться все время в области, в которой выполняются условия теоремы. Обозначим $t_p = t_0 + pT_0$, $p = 1, 2, \ldots$. Благодаря равномерности всех полученных выше оценок относительно $t_0 \in \mathbb{R}_+$ и $x^0 \in B_{\varepsilon_0}$ для произвольного p имеет место неравенство

$$V(t_{p+1}, x(t_{p+1})) \le V(t_p, x(t_p)) - \delta_0 |x(t_p)|^d T_0 < V(t_p, x(t_p)).$$

Следовательно

$$0 < V(t_{p+1}, x(t_{p+1})) \le V(t_0, x(t_0)) - \delta_0 T_0 \sum_{l=0}^{p} |x(t_l)|^d < V(t_0, x(t_0)). \tag{4.9}$$

Отсюда следует, что $|x(t_l)| \to 0$ при $l \to \infty$. А это означает, что $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$. В самом деле, из (4.4) и (4.3) следует, что

$$|x(t; t_l, x(t_l)) - x(t_l)| \le |x(t; t_l, x(t_l)) - y(t; t_l, x(t_l)) + y(t; t_l, x(t_l)) - x(t_l)| < (\nu_2 + 2)|x(t_l)|$$

на отрезке $t_l \le t \le t_l + T_0$ для всех $t_l \ge 0$ и $x(t_l)$ из фиксированой окрестности нуля B_{ε_0}. Теорема полностью доказана. $\square$

5. Иллюстративный пример

Рассмотрим систему уравнений второго порядка с импульсным воздействием, предполагая, что интервалы $\theta_k = \tau_{k+1} - \tau_k$ между моментами импульсного воздействия образуют периодическую последовательность периода p.

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = \lambda_k x_1 + X_k(x), \quad \dot{x}_2 = \bar{\lambda}_k x_2 + \bar{X}_k(x), \quad \tau_k < t < \tau_{k+1},\\
&x_1(\tau_k + 0) = x_1(\tau_k)\exp(-\alpha_{k-1}\theta_{k-1}),\\
&x_2(\tau_k + 0) = x_2(\tau_k)\exp(-\alpha_{k-1}\theta_{k-1}), \quad k \in \mathbb{Z},
\end{aligned} \tag{5.1}$$

где $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k \in \mathbb{C}$, α_k, $\beta_k \in \mathbb{R}$, $X_k(x) = \sum_{|\nu|=3} a_{k,\nu} x^\nu$, ν — мультииндекс, $a_{k,\nu} \in \mathbb{C}$, черта над символом обозначает комплексное сопряжение, $\tau_k = \tau_{k-1} + \theta_{k-1}$, $\theta_k \ge const > 0$, $k \in \mathbb{Z}$. Последовательности $\{\lambda_k\}$, $\{\theta_k\}$, $\{a_{k,\nu}\}$ являются p-периодическими по $k \in \mathbb{Z}$ для некоторого натурального p. Предполагается, что рассматриваемая система эквивалентна вещественной системе дифференциальных уравнений, переменные x_1 и x_2 комплексно сопряжены. Нашей целью является получение коэффициентного критерия устойчивости нулевого решения нелинейной системы (5.1) с кусочно-постоянными коэффициентами.

Система линейного приближения для (5.1) имеет вид

$$\begin{aligned}
&\dot{y}_1 = \lambda_k y_1, \quad \dot{y}_2 = \bar{\lambda}_k y_2, \quad \tau_k < t < \tau_{k+1},\\
&y_1(\tau_k + 0) = y_1(\tau_k)\exp(-\alpha_{k-1}\theta_{k-1}),\\
&y_2(\tau_k + 0) = y_2(\tau_k)\exp(-\alpha_{k-1}\theta_{k-1}), \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Легко видеть, что эта система является устойчивой при любых λ_k, но не асимптотически. Таким образом, можно сказать, что в системе (5.1) наблюдается критичекий случай теории устойчивости.

Пусть $\tau_{k_0-1} < t_0 \le \tau_{k_0}$. Следующие свойства решения $y(t) = y(t; t_0, y^0)$ задачи Коши для линейного приближения (5.2) с начальным условием $y(t_0 + 0) = y^0$ проверяются непосредственным вычислением. Выпишем только выражения для первой проекции y_1, так как вторая проекция y_2 комплексно сопряжена.

Для любых $k \ge k_0$ и $s = 0, 1, \ldots$ справедливы равенства

$$|y_1(\tau_k + 0)| = |y_1(\tau_{k-1} + 0)| = \cdots = |y_1(\tau_{k_0} + 0)| = |y_1(t_0)|Const, \tag{5.3}$$

$$y_1(\tau_{k+ps} + 0) = y_1(\tau_k + 0)\exp(is\Theta), \tag{5.4}$$

где $\Theta = \beta_1\theta_1 + \beta_2\theta_2 + \cdots + \beta_p\theta_p$.

В качестве подходящей функции Ляпунова возьмем первый интеграл системы линейного приближения (5.2). На каждом интервале (τ_k, τ_{k+1}) система (5.1) имеет постоянные коэффициенты, но они могут изменяться в моменты τ_k. Поэтому функция Ляпунова будет зависеть от времени и иметь в моменты импульсного воздействия разрывы первого рода. Возьмем искомый первый интеграл в следующей форме:

$$V(t,x) = x_1 x_2 \exp[-2\alpha_k (t-\tau_k)] \quad \text{при} \quad \tau_k < t \le \tau_{k+1}.$$

Как легко видеть, функция $V(t,x)$ положительно определена и допускает бесконечно малый высший предел в области G, непрерывно дифференцируема в области $\mathcal{G}$ и имеет разрывы первого рода в точках $t = \tau_k$, точнее,

$$V(\tau_k+0,x) = x_1 x_2 = |x_1|^2, \quad V(\tau_k,x) = |x_1|^2 \exp(-2\alpha_{k-1}\theta_{k-1}).$$

Таким образом, функция V принадлежит описанному выше классу функций $\mathcal{V}_1$. Более того, для любого k

$$\Delta V|_{t=\tau_k} = V(\tau_k+0, x\exp(-\alpha_{k-1}\theta_{k-1})) - V(\tau_k,x) = \\ = |x_1|^2 \exp(-2\alpha_{k-1}\theta_{k-1}) - |x_1|^2 \exp(-2\alpha_{k-1}\theta_{k-1}) = 0. \quad (5.5)$$

Это означает, что функция V удовлетворяет как условию (vi) теоремы 1, так и условию (v) теоремы 2.

На интервале $\tau_k < t < \tau_{k+1}$

$$\dot{V}\Big|_{(5.1)}(t,x) = \exp[-2\alpha_k(t-\tau_k)] \sum_{|\nu|=3} a_{k,\nu} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2+1} + K.C. = \Phi_4(t,x), \quad (5.6)$$

где $K.C.$ — комплексно сопряженная часть выражения.

Пусть $x(t) = x(t;t_0,x^0)$ — решение системы (5.1). С учетом равенства (5.5) получим следующее выражение для значения функции Ляпунова на решении нелинейной системы (5.1):

$$V(t,x(t)) = V(t_0,x^0) + \int_{t_0}^{t} \Phi_4(t,x(t))\,dt. \quad (5.7)$$

Оценим среднее значение функции Φ_4 вдоль решения линейного приближения $y(t) = y(t;t_0,x^0)$. Для этого интеграл $\int_{t_0}^{t} \Phi_4(t,y(t))\,dt$ представим в виде:

$$\int_{t_0}^{t} \Phi_4(t,y(t))\,dt = \int_{t_0}^{\tau_{k_0}} \Phi_4(t,y(t))\,dt + \sum_{s=0}^{N} \left[\int_{\tau_{k_0+ps}}^{\tau_{k_0+1+ps}} \Phi_4(t,y(t))\,dt + \right. \\ \left. + \int_{\tau_{k_0+1+ps}}^{\tau_{k_0+2+ps}} \Phi_4(t,y(t))\,dt + \ldots + \int_{\tau_{k_0+p-1+ps}}^{\tau_{k_0+p+ps}} \Phi_4(t,y(t))\,dt \right] + \int_{\tau_{k_0+p+pN}}^{t} \Phi_4(t,y(t))\,dt. \quad (5.8)$$

Учитывая представление (5.6) для Φ_4, оценим интеграл от одночлена

$$\int_{\tau_{k+ps}}^{\tau_{k+1+ps}} y_1^{\nu_1}(t) y_2^{\nu_2+1}(t) \exp[-2\alpha_k(t-\tau_{k+ps})]\,dt.$$

На данном интервале $(\tau_{k+ps}, \tau_{k+1+ps})$ с учетом (5.4) имеем:

$$y_1(t) = y_1(\tau_{k+ps}+0)\exp[\lambda_k(t-\tau_{k+ps})] = y_1(\tau_k+0)\exp(is\Theta)\exp[\lambda_k(t-\tau_{k+ps})], \quad (5.9)$$

Ключевую роль играет множитель $\exp(is\Theta)$ (предполагается, что $\Theta \neq 0$), зависящий от s. Легко проверить, что

$$\int_{\tau_{k+ps}}^{\tau_{k+1+ps}} y_1^{\nu_1}(t)y_2^{\nu_2+1}(t)\exp[-2\alpha_k(t-\tau_{k+ps})]\,dt = \\ = y_1^{\nu_1}(\tau_k+0)y_2^{\nu_2+1}(\tau_k+0)C\exp[is(\nu_1-\nu_2-1)\Theta],$$

где постоянная C не зависит от s. Поскольку $\sup_{N>0}\sum_{s=0}^{N}\exp(is\gamma) < \infty$ при $\gamma \neq 0$, то ненулевой вклад в среднее значение функции $\Phi_4(t, y(t))$ на полуоси $[t_0, \infty)$ могут внести только одночлены вида $y_1^2(t)y_2^2(t)$. При этом в силу (5.9) и с учетом (5.3) имеем равенство

$$\int_{\tau_{k+ps}}^{\tau_{k+1+ps}} y_1^2(t)y_2^2(t)\exp[-2\alpha_k(t-\tau_{k+ps})]\,dt = \\ = |y_1(\tau_k+0)|^4\int_{\tau_{k+ps}}^{\tau_{k+1+ps}}\exp[2\alpha_k(t-\tau_{k+ps})]\,dt = |y_1(\tau_k+0)|^4\frac{e^{2\alpha_k\theta_k}-1}{2\alpha_k}, \quad (5.10)$$

если $\alpha_k \neq 0$.

Представим комплексный коэффициент $a_{k,21}$ в экспоненциальной форме, $a_{k,21} = \rho_{k,21}\exp[i\phi_{k,21}]$, и получим из (5.6)–(5.10), что знак интеграла (5.8) при достаточно большом значении $t-t_0$ определяется выражением

$$\mathcal{I} = \sum_{\alpha_k\neq 0}\frac{e^{2\alpha_k\theta_k}-1}{\alpha_k}\rho_{k,21}\cos\phi_{k,21} + 2\sum_{\alpha_k=0}\theta_k\rho_{k,21}\cos\phi_{k,21}.$$

На основании теорем 1 и 2 заключаем, что нулевое решение системы (5.1) равномерно асимптотически устойчиво при $\mathcal{I} < 0$ и неустойчиво при $\mathcal{I} > 0$.

6. Заключение

В статье представлены теоремы прямого метода Ляпунова о достаточных условиях асимптотической устойчивости, равномерной асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения нелинейной системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени. Результаты формулируются в терминах свойств разрывных по времени функций Ляпунова. Дано детальное доказательство теоремы об асимптотической устойчивости. В качестве примера получен критерий устойчивости одной нелинейной импульсной системы второго порядка с кусочно-постоянными коэффициентами в широком диапазоне критических случаев.

Список цитируемых источников

1. *Анашкин О. В.* Об асимптотической устойчивости в нелинейных системах / О. В. Анашкин // Дифференц. уравнения. – 1978. – Т. 14, No. 8. – С. 1490 – 1493.
2. *Анашкин О. В.* Устойчивость решений систем дифференциальных уравнений при наличии импульсных воздействий / О. В. Анашкин, Т. В. Довжик, О. В. Митько // Динамические системы. — 2010. — Вып. 28. — С. 3-8.
3. *Анашкин О. В.* Второй метод Ляпунова в теории устойчивости систем с импульсным воздействием / О. В. Анашкин, Т. В. Довжик, О. В. Митько // Таврический вестник информатики и математики. — 2010. — № 2. — С. 9-16.
4. *Анашкин О. В.* Неустойчивость в системах с импульсным воздействием/ О. В. Анашкин, О. В. Митько // Ученые записки ТНУ, серия физ.-мат. науки. — 2011. — Т. 24(63), №1. — С. 101-106.
5. *Гладилина Р. И.* О необходимых и достаточных условиях устойчивости импульсных систем / Р. И.Гладилина, А. О. Игнатьев // Укр. матем. журнал. — 2003. — Т.55, №8. — С. 1035-1043.
6. *Игнатьев А. О.* Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости решений систем диффернциальных уравнений с импульсным воздействием / А. О. Игнатьев // Матем. сборник. — 2003. — Т.194, №.10. — С.117-132.
7. *Перестюк Н. А.* Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью / [Н. А. Перестюк, В. И. Плотников, А. М. Самойленко, Н. В. Скрипник]. — К.: Ин-т математики НАН Украины, 2007. — 428 с.
8. *Самойленко А. М.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк. — Киев, Вища школа, 1987. — 288 с.
9. *Хапаев М. М.* Асимптотические методы и устойчивость в теории нелинейных колебаний / М. М. Хапаев. — М.: Высшая школа, 1988. — 184 с.
10. *Bainov D. D.* Systems with impulse effect: stability, theory and applications / D. D Bainov, P. S. Simeonov. — N.-Y., Halsted Press, 1989.
11. *Lakshmikantham V.* Theory of impulsive differential equations / V. Lakshmikantham, D. D. Bainov, P. S. Simeonov // World Scientific, Singapure – New Jersey – London, 1989.

Получена 11.03.2011