

УДК 539.3

## О построении конформного отображения крестообразной области методом последовательных приближений

А. А. Кушнарёв, В. Н. Чехов

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского,  
Симферополь 95007. E-mail: mak@mak.crimea.ua, chekhov@crimea.edu

**Аннотация.** В статье исследуется численный метод решения задачи о кручении упругого призматического тела, а так же находится распределение напряжений на примере стержня с крестообразным сечением.

Как известно задача о кручении сводится к решению уравнения Пуассона. Метод, используемый при решении данного дифференциального уравнения, – метод конформных отображений. Использование данного подхода упрощает решение задачи о кручении. Решение выражается через конформное отображение, которое преобразует круг единичного радиуса ( $|\zeta| < 1$ ) в заданную область (в данном случае крестообразную). Но нахождение такого конформного преобразования само по себе является не простой задачей.

Исследования в области построения конформных отображений привели к развитию различных методов: численных, аналитических, экспериментальных. Однако большинство этих методов получены для частных форм областей. Для решения же прикладных задач важнейшее значение имеют методы, позволяющие получить численное решение по поставленным условиям – заданной форме границы и заданным граничным условиям. Именно такой численный метод и был исследован.

Исследования в области построения конформных отображений привели к развитию различных методов — аналитических, экспериментально-аналитических, численных, экспериментальных, и т. д.

Изложение основных положений этих методов можно найти в обзорных статьях: М. К. Говурин и Л. В. Канторович [2], а также в монографиях Л. В. Канторовича и В. И. Крылова [3], В. Коппенфельса и Ф. Штальмана [4], А. Г. Угодчикова, М. И. Длугача, А. Е. Степанова [5], П. Ф. Фильчакова [7] и др.

Рассмотрим призматический изотропный стержень — призматическое тело, ограниченное цилиндрической (боковой) поверхностью и двумя основаниями крестообразной формы с заданными размерами  $a$  и  $b$  (см. Рис. 1), перпендикулярными

к образующей; длина  $l$  (расстояние между основаниями) значительно больше размеров оснований. Отнесем стержень к правой системе координат  $xOyz_1$ , совместив плоскость  $xOy$  с одним из оснований, а ось  $z_1$  направим по оси стержня.

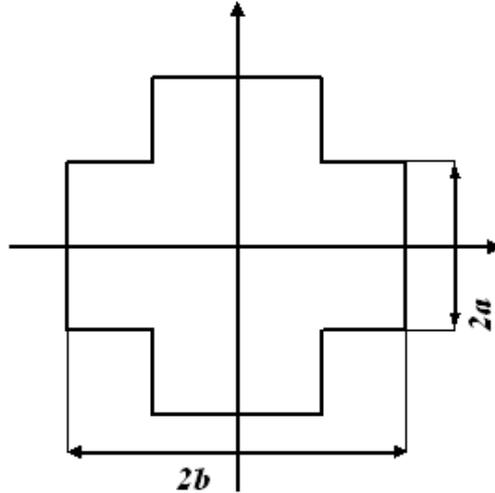


Рис. 1.

Допустим, что одно из оснований, например то, которое совпадает с плоскостью  $xOy$ , закреплено — исключены перемещения его как единого целого, но отнюдь не стеснены деформации; за центр приведения сил, действующих на второе основание, примем точку пересечения оси  $z$ , с этим основанием. Наиболее эффективно аналитическое решение краевой задачи для односвязной области  $S$  может быть построено, когда известна функция  $z = \omega(\zeta)$ , конформно отображающая круг (круговое кольцо) на заданную область  $S$ .

Представление приближенного выражения отображающей функции  $z = \omega(\zeta)$  в виде полинома

$$z = \omega(\zeta) = \sum_{k=1}^m C_k \zeta^k \quad (1)$$

существенно облегчает в большинстве случаев решение краевых задач. В работе А. Г. Угодчикова [5] был разработан метод построения интерполяционных полиномов для односвязных и двухсвязных областей с помощью интерполяционных полиномов Лагранжа и дана методика построения последовательных приближений с введением промежуточных узлов интерполяции.

Данный метод дает довольно хороший алгоритм для численного нахождения коэффициентов полинома, реализующего конформное отображение.

Отметим, что в угловых точках конформность нарушается и добиться точного воспроизведения угловых точек, когда отображающая функция интерполируется полиномом (1) конечной степени, естественно, нельзя. Поэтому кусочно-гладкую

кривую – границу области  $S$ , следует преобразовать в кривую  $L$ , которая имеет непрерывно изменяющуюся касательную. В большинстве случаев углы можно скруглить с помощью дуг постоянного радиуса, как это и имеет место в деталях машин и элементах конструкций. Для крестообразной области углы интерполируются четвертями окружностей. Зависимость напряжения в угловых точках от радиуса интерполирующих окружностей нами так же исследована.

Полином по положительным степеням (1) является функцией, регулярной в круге  $|\zeta| \leq 1$ . Поэтому, необходимо найти такие значения коэффициентов  $C_k = \alpha_k + i\beta_k (k = 1, \dots, m)$ , при которых кривая  $L'$ , имеющая параметрическое уравнение  $z = \omega(e^{i\theta})$ , во-первых, не имела бы двойных точек и точек возврата, во-вторых, имела бы с заданной кривой ряд общих точек и, в-третьих, отклонения кривой  $L'$  от заданной границы  $L$  области  $S$  лежали бы в допустимых пределах. Кривая  $L$  – кусочно-гладкая кривая, у которой углы области интерполируются дугами.

При решении конкретных задач часто приходится встречаться с областями, которые имеют одну или несколько –  $q$  осей симметрии. Если выбрать начало координат в точке пересечения осей симметрии, а ось направить по одной из этих осей, то интерполяционный полином, совпадающий в интервале  $0 \leq \theta \leq \pi/q$  со значением отображающей функции в  $m_1$  узлах интерполяции  $\zeta = \zeta_j = e^{i\theta_j}$ , где  $\theta_j = \frac{\pi}{qm_1}j (j = 0 \dots m_1)$ , будет иметь вид

$$z = \omega_{m_1}(\zeta) = \sum_{k_1=1}^{2m_1-1} d_{qk_1+1} \zeta^{qk_1+1} \quad (2)$$

Здесь коэффициенты  $d_k = d_{qk_1+1}$  являются действительными и вычисляются согласно выражениям:

$$d_k = \frac{1}{m_1} \left\{ \frac{1}{2} \left[ |z_0| + (-1)^{\frac{k-1}{q}} |z_{m_1}| \right] + \sum_{j=1}^{m_1-1} \left( x_j \cos \frac{\pi}{qm_1}kj + y_j \sin \frac{\pi}{qm_1}kj \right) \right\} \quad (3)$$

где  $z_j = x_j + iy_j$  – координаты точек  $M_j$  границы  $L$  области  $S$ , в которые переходят при конформном отображении точки  $\zeta_j (j = 0 \dots m_1)$  границы единичного круга – значения отображающей функции в узлах интерполяции.

Через коэффициенты полинома, реализующего конформное отображение, выражаются касательные напряжения в граничных точках области  $S$ . Пусть:

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{-k} = \sum_{r=1}^{m-k} r C_r \bar{C}_{r+k} (k = 0 \dots m-1) \\ B_k = k D_k + \bar{B}_{-k} (k = 1 \dots m-1) \end{array} \right\} \quad (4)$$

Тогда касательное напряжение может быть представлено формулой:

$$\tau_\theta = \frac{\mu\tau}{|\omega'(\sigma)|} \left\{ B_0 + 2Re \sum_{k=1}^{m-1} \bar{B}_{-k} \sigma^k \right\} \quad (5)$$

Есть одна особенность, описанная в [6] – это выбор способа сноса точек. Для крестообразного профиля, в котором углы заменяются четвертями окружностей, снос производится перпендикулярно касательной.

Единственная трудность, с которой может столкнуться программист при реализации данного алгоритма на компьютере – выбор начальных значений для алгоритма последовательных приближений ( $M_j^{(0)}$ ).

В работе Угодчикова [5] был предложен метод выбора начального приближения с помощью прибора ЭГДА (электрогидродинамических аналогий). Имея такой прибор можно выбрать наилучшее начальное приближение.

Но применение данного прибора составляет некоторые трудности. Нами же при реализации алгоритма были опробованы различные способы задания начальных значений  $M_j^{(0)}$  без применения ЭГДА и иных приборов. В частности, было рассмотрено равномерное распределение точек  $M_j^{(0)}$  на окружности для различных радиусов, но данный подход не дал хорошей сходимости алгоритма. Был предложен вариант задания начальных точек  $M_j^{(0)}$  – равномерное распределение (равноотстоящие точки) на сторонах четверти профиля для промежутка  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{q}$  (в случае крестообразного профиля, число осей симметрии  $q = 4$ ). Именно этот подход и дал хорошие результаты.

В таблице 1 приведены ненулевые коэффициенты полинома, реализующего конформное отображение указанной четверти единичной окружности на соответствующую четверть крестообразного профиля, для различных степеней полинома  $m$ , где  $k$  – номер коэффициента: Заметим что, как и говорилось ранее, в силу симметрии области, только каждый 4-ый коэффициент отличен от нуля.

Ниже, на рисунке 2 приведена работа алгоритма последовательных приближений. Видно, как с каждым шагом кривая, описываемая полиномом, приближается к заданному крестообразному профилю. Так же можно увидеть как меняется кривизна  $K$  во внутреннем углу. В данном случае углы были заменены четвертями окружностей с радиусом  $r = 10^{-3}$ .

Построены графики (Рис. 3) зависимости напряжений во внутренних углах области от радиуса закругления четвертей окружностей, с помощью которых сглаживались углы. На данном рисунке можно увидеть такую зависимость для профиля с размерами (согласно рис. 1)  $d = 2a$  и отношением  $\frac{a}{b} = 4$ .

Таблица 1.

$k$	$m = 61$	$m = 101$	$m = 141$
1	0.78028922	0.82116796	0.82502531
5	0.20028495	0.20394083	0.20233385
9	0.08703809	0.06124697	0.05594937
13	0.04376615	0.01305433	0.00854616
17	0.01795330	-0.01342030	-0.01617459
21	0.00644890	-0.01969286	-0.02072407
25	-0.00046611	-0.01488543	-0.01468342
29	-0.00045355	-0.00674391	-0.00588337
33	-0.00007269	0.00165330	0.00259883
37	0.00092887	0.00649329	0.00728612
41	0.00366730	0.00782729	0.00806050
45	0.00309507	0.00605093	0.00572830
49	0.00374463	0.00319787	0.00243482
53	0.00308319	0.00062175	-0.00073088
57	0.00130216	-0.00095103	-0.00204847
61	0.00000000	-0.00107050	-0.00216062
65		-0.00066082	-0.00098611
69		0.00000344	0.00027310
73		0.00061410	0.00117192
77		0.00062466	0.00150011
81		0.00087378	0.00117126
85		0.00084109	0.00089109
89		0.00084264	0.00042567
93		0.00099720	0.00050643
97		0.00050527	0.00042408
101		0.00000000	0.00052822
105			0.00042835
109			0.00007825
113			-0.00000217
117			-0.00026954
121			-0.00000181
125			0.00026384
129			0.00048342
133			0.00072843
137			0.00037061
141			0.00000000

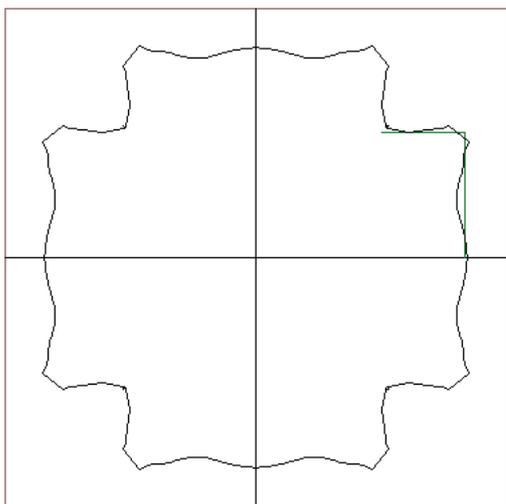
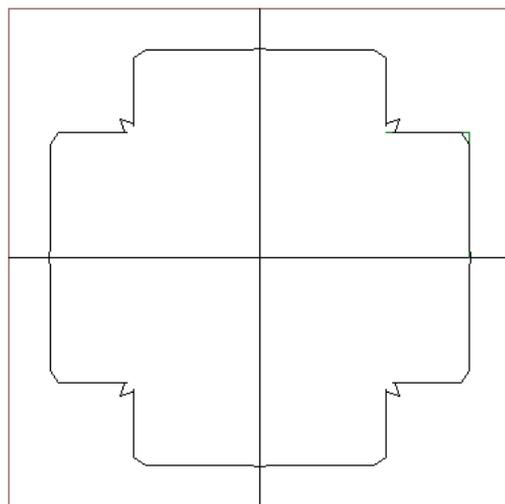
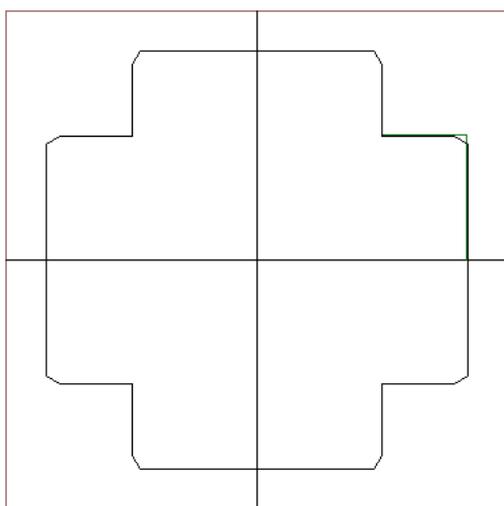
(a) 1,  $K = 8.4194$ (b) 7,  $K = 29.0221$ (c) 14,  $K = -936.7236$ 

Рис. 2. Номер шага, кривизна во внутреннем углу

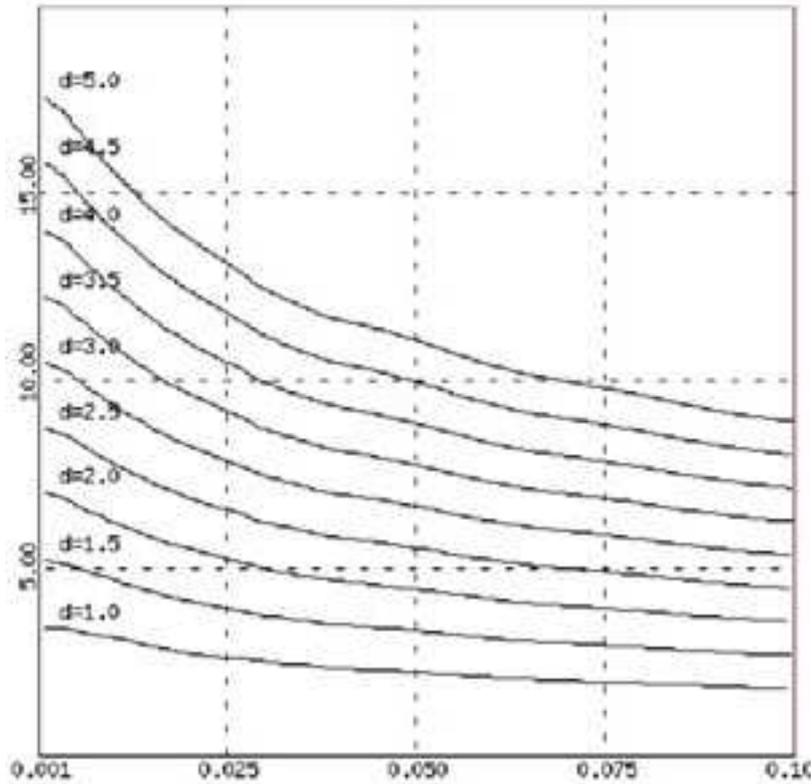


Рис. 3.

Решение, полученное с помощью данного численного метода конформных отображений, можно сравнить с решением, полученным с помощью метода Арутюняна-Абрамяна [1]. Далее приведены значения жесткости крестообразного стержня на кручении, полученные методом конформных отображений и методом Арутюняна-Абрамяна (таблица 2).

Жесткость на кручении определяется как

$$C = 2G \iint_{(\Omega)} u d\Omega \quad (6)$$

где  $G$  – модуль сдвига. Для удобства будем сравнивать величину  $C/Ga^4$ :

Таблица 2.

$\frac{b}{a}$	1.5	2.0	2.5	3.0	4.0
Метод Арутюняна-Абрамяна	0.580	1.050	1.467	1.844	2.542
Метод конформных отображений	0.586	1.050	1.470	1.842	2.539

В заключение отметим, что представленный метод имеет много преимуществ, одним из которых является несложная программная реализация. Одно из удобств в его программировании состоит в том, что модули (библиотеки с набором функций), написанные для конкретной области, легко расширяются и адаптируются для других более сложных областей. Для таких областей нахождение конформного отображения в аналитической форме, удобной для практического применения, невозможно, но приближенно посчитать с помощью этого метода не составляет труда.

### Список цитируемых источников

1. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* Кручение упругих тел. — М. : Физматгиз, 1963.
2. *Говурин М.К., Кантарович Л.В.* Приближенные и численные методы. //Математика в СССР за сорок лет — М.: Физматгиз, 1959, стр. 846-848
3. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. — М.-Л.: Физматгиз, 1962.
4. *Коппенфельс В., Штальман Ф.* Практика конформных отображений. — М.: ИЛ, 1963.
5. *Угодчиков А.Г., Длугач М.И., Степанов А.Е.* Решение краевых задач плоской теории упругости на цифровых и аналоговых машинах. Учеб. пособие для вузов. — М. : Высш. школа 1970.
6. *Угодчиков А.Г., Швецов А.В., Ботов В.А.* О новой методике сноса внеконтурных точек при конформном отображении // Прикладная механика. — 1973. — Т. 9, № 11. — С. 81–84.
7. *Фильчаков П.Ф.* Приложенные методы конформных отображений. — Киев.: УССР, 1964.

*Получена 18.02.2007*