

Для системы (1.1) выпишем соответствующую ей систему однородных квадратичных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \mathbf{x}^T(t)B_1\mathbf{x}(t), \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) = \mathbf{x}^T(t)B_n\mathbf{x}(t). \end{cases} \quad (1.2)$$

Заметим, что любую квадратичную форму в правой части системы (1.1) можно записать в виде [3, 5]:

$$\mathbf{x}^T B_i \mathbf{x} = (\mathbf{r}_{i1}, \dots, \mathbf{r}_{in}) \cdot (x_1 \mathbf{x}^T, \dots, x_n \mathbf{x}^T)^T,$$

где $\mathbf{r}_{i1}, \dots, \mathbf{r}_{in}$ – n -мерные вектор-строки матрицы $B_i, i = 1, \dots, n$. Таким образом, всю систему (1.1) можно представить в форме

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{T} \cdot (\mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{x}(t)), \quad (1.3)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{11} & \dots & \mathbf{r}_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{r}_{n1} & \dots & \mathbf{r}_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n^2},$$

соответственно, смешанный тензор ранга 2 (один раз контравалентный и один раз ковалентный) и смешанный тензор ранга 3 (один раз контравалентный и два раза ковалентный); $\mathbf{x} \otimes \mathbf{x} = (x_1 \mathbf{x}^T, \dots, x_n \mathbf{x}^T)^T$ – тензорное произведение вектора \mathbf{x} на себя. (Здесь тензор \mathbf{T} реализован как элемент пространства матриц размеров $n \times n^2$; само же пространство Ψ указанных тензоров имеет размерность $n^2(n+1)/2$.)

Очевидно, что тензор \mathbf{T} можно записать в виде

$$\mathbf{T} = T_1 \times \dots \times T_n,$$

где

$$T_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{11} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{n1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \dots, T_n = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{1n} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Введем функцию (инвариант группы $\mathbb{G}L(n, \mathbb{C})$ [5, 6]):

$$I(T_1, \dots, T_n) = \det \left(\sum_{1 \leq j_1, \dots, j_m \leq n} (-1)^\sigma T_{j_1} T_{j_2} \dots T_{j_m} \right),$$

где $\sigma = 0$, если перестановка (j_1, \dots, j_m) четная и $\sigma = 1$, если перестановка (j_1, \dots, j_m) нечетная.

Определение 1. Система (1.2) (или система (1.1)) называется общей, если $I(T_1, \dots, T_n) \neq 0$.

Пусть $n = 2$; тогда

$$T_1 = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & 0 \\ \gamma_{21} & 0 \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{12} \\ 0 & \gamma_{22} \end{pmatrix}$$

и $I(T_1, T_2) = \det(T_1 T_2 - T_2 T_1) = \gamma_{12} \gamma_{21} \det G$.

Пусть $n = 3$; тогда

$$T_1 = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & 0 & 0 \\ \gamma_{21} & 0 & 0 \\ \gamma_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{12} & 0 \\ 0 & \gamma_{22} & 0 \\ 0 & \gamma_{32} & 0 \end{pmatrix}, T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma_{13} \\ 0 & 0 & \gamma_{23} \\ 0 & 0 & \gamma_{33} \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{aligned} I(T_1, T_2, T_3) &= \det(T_1 T_2 T_3 + T_2 T_3 T_1 + T_3 T_1 T_2 - T_1 T_3 T_2 - T_3 T_2 T_1 - T_2 T_1 T_3) = \\ &= \left((\gamma_{12} \gamma_{23} \gamma_{31})^2 - (\gamma_{13} \gamma_{21} \gamma_{32})^2 \right) \det G. \end{aligned}$$

Таким образом, условие $I(T_1, \dots, T_n) \neq 0$ показывает, что система (1.5) является регулярной WIS-системой [3, 5].

Определение 2. Если существует вещественная матрица F , приводящая систему (1.2) к виду (1.5), то система (1.2) (также как и система (1.1)) будет называться \mathbb{R} -системой.

Приведем простое условие того, что система (1.2) будет \mathbb{R} -системой.

Пусть $m \geq 2$, $f(\lambda) = \lambda^m + b_1 \lambda^{m-1} + \dots + b_m$ — полином с вещественными коэффициентами и пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — его корни.

Введем степенные суммы

$$s_i = \lambda_1^i + \dots + \lambda_m^i; \quad i = 0, \dots, 2m - 2.$$

Построим матрицы

$$H_2 = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix}, H_3 = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{pmatrix}, \dots, H_m = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{m-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_m \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ s_{m-1} & s_m & \dots & s_{2m-2} \end{pmatrix}.$$

Известно, что с помощью формул Ньютона

$$b_0 s_k + b_1 s_{k-1} + \dots + b_{k-1} s_1 = -k b_k, \quad b_0 = 1, \quad k = 1, \dots, m,$$

можно установить формулы, выражающие степенные суммы через известные коэффициенты характеристического многочлена $f(\lambda)$. Для вычисления s_1, \dots, s_m запишем формулы Ньютона таким образом:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_1 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ b_2 & b_1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ b_{m-1} & \cdots & b_2 & b_1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} b_1 \\ 2b_2 \\ 3b_3 \\ \vdots \\ mb_m \end{pmatrix}.$$

Решая полученную линейную (относительно s_1, \dots, s_m) систему уравнений найдем неизвестные $s_i = h_i(b_1, \dots, b_m)$, где $h_i(\dots), i = 1, \dots, m$, – полиномиальные функции от b_1, \dots, b_m . (Суммы $s_i, i = m+1, \dots, 2m-2$, легко выражаются через b_1, \dots, b_m . Следовательно, элементы матриц H_2, \dots, H_m также будут полиномиальными функциями от b_1, \dots, b_m .)

В дальнейшем будет использован следующий классический результат: число пар комплексно сопряженных корней полинома $f(\lambda)$ равно числу отрицательных чисел в последовательности $\det H_2(b_1, \dots, b_m), \dots, \det H_m(b_1, \dots, b_m)$. Это число не превышает $m/2$, если m – четное, и $(m-1)/2$, если m – нечетное.

Пусть $n = 2$. Тогда система (1.4) состоит из одного однородного квадратного уравнения: $a_2(\rho_1, \rho_2) \equiv \rho_1^2 + b_1\rho_1\rho_2 + b_2\rho_2^2 = 0$. В этом случае $m = 2$ и для разрешимости указанного уравнения необходимо, чтобы $\det H_2(b_1, b_2) > 0$.

Пусть теперь $n = 3$. Тогда система (1.4) состоит из одного однородного квадратного уравнения $a_2(\rho_1, \rho_2, \rho_3) = 0$ и одного однородного кубического уравнения $a_3(\rho_1, \rho_2, \rho_3) = 0$. Исключая из этой системы с помощью результата [11], например, неизвестную ρ_3 , получим уравнение

$$\rho_1^6 + b_1\rho_1^5\rho_2 + \dots + b_6\rho_2^6 = 0. \tag{1.7}$$

В этом случае $m = 6$ и для того, чтобы найти вещественную матрицу F необходимо иметь не менее четырех вещественных решений уравнения (1.7). Для этого в ряду чисел

$$\det H_2(b_1, \dots, b_6), \dots, \det H_6(b_1, \dots, b_6),$$

должно быть не более одного отрицательного. (Заметим, что в указанном ряду может быть не более трех отрицательных чисел.)

2. Устойчивость однородных квадратичных систем

Вернемся к системе (1.5). Формально вычислим все первые производные по времени функций $z_1 = w_1/w_n, \dots, z_{n-1} = w_{n-1}/w_n$. Тогда получим

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1}(t) \\ \dot{w}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\dot{w}_1 w_n - w_1 \dot{w}_n}{w_n^2} \equiv G_1(z_1(t), \dots, z_{n-1}(t)) w_n(t) \\ \dots \\ \frac{\dot{w}_{n-1} w_n - w_{n-1} \dot{w}_n}{w_n^2} \equiv G_{n-1}(z_1(t), \dots, z_{n-1}(t)) w_n(t) \\ G_n(z_1(t), \dots, z_{n-1}(t)) w_n^2(t) \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

где

$$G_i(z_1, \dots, z_{n-1}) = z_i(\gamma_{n1} z_1 + \dots + \gamma_{n,n-1} z_{n-1} + \gamma_{nn})^2 - (\gamma_{i1} z_1 + \dots + \gamma_{i,n-1} z_{n-1} + \gamma_{in})^2$$

– неоднородные кубичные функции, а

$$G_n(z_1, \dots, z_{n-1}) = -(\gamma_{n1} z_1 + \dots + \gamma_{n,n-1} z_{n-1} + \gamma_{nn})^2$$

– неоднородная квадратичная функция переменных z_1, \dots, z_{n-1} ; $i = 1, \dots, n-1$.

Рассмотрим уравнения

$$G_1(z_1, \dots, z_{n-1}) = 0, \dots, G_{n-1}(z_1, \dots, z_{n-1}) = 0. \quad (2.2)$$

Обозначим через $\mathbf{z}_1^*, \dots, \mathbf{z}_l^* \in \mathbb{R}^{n-1}$; $1 \leq l \leq 2^n - 1$ – все вещественные решения системы (2.2). (Напомним, что в общем случае имеется ровно $2^n - 1$ комплексных решений; таким образом, в силу нечетности числа $2^n - 1$ вещественные решения системы (2.2) всегда существуют [3, 5].)

Обозначим через $\bar{\Sigma}_1 = \Sigma_1 + \mathbb{S}_1, \dots, \bar{\Sigma}_p = \Sigma_p + \mathbb{S}_p$ замкнутые области в \mathbb{R}^{n-1} одинаковой размерности $n-1$, границами которых являются поверхности $\mathbb{S}_1, \dots, \mathbb{S}_p$, описываемые уравнениями (2.2). (Таким образом, здесь поверхности \mathbb{S}_i являются $(n-2)$ -мерными многообразиями, $i = 1, \dots, p$. Отметим, что число p этих поверхностей, вообще говоря, больше, чем число $n-1$ уравнений (2.2); это означает, что каждое из уравнений (2.2) может задавать несколько поверхностей.)

Без потери общности можно считать, что

$$\mathbb{R}^{n-1} = \bar{\Sigma}_1 \cup \dots \cup \bar{\Sigma}_p \text{ и если } i \neq j, \text{ то } \Sigma_i \cap \Sigma_j = 0.$$

Предположим, что существует такое вещественное решение $\mathbf{z}_k^*, k \in \{1, \dots, l\}$ системы (2.2), для которого выполняется следующее условие: существует ровно $r = 2^{n-1} \leq p$ таких областей $\bar{\Sigma}_{j_1}, \dots, \bar{\Sigma}_{j_r}, j_1, \dots, j_r \in \{1, \dots, p\}$, что

$$\mathbf{z}_k^* \in \bar{\Sigma}_{j_1} \cap \dots \cap \bar{\Sigma}_{j_r}.$$

Введем обозначение

$$\bar{\Sigma} = \bar{\Sigma}_{j_1} \cup \dots \cup \bar{\Sigma}_{j_r}.$$

Основной результат настоящей работы содержится в следующей теореме.

Теорема 1. *Предположим, что (1.2) является общей \mathbb{R} -системой. Пусть также область $\bar{\Sigma}$ ограничена. Тогда множество $\Omega = \{x\bar{\Sigma}, x\} \subset \mathbb{R}^n$, где x пробегает все множество неотрицательных чисел, является конусом асимптотической устойчивости системы (1.5).*

Доказательство. Покажем, что область $\bar{\Sigma}$ обладает свойством инвариантности: если $\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}(0) \in \bar{\Sigma}$, то $\forall t > 0 \mathbf{z}(t) \in \bar{\Sigma}$.

Воспользуемся для исследования системы (1.5) простейшим итерационным методом – методом Эйлера:

$$\mathbf{w}_{j+1} = \mathbf{w}_j - \begin{pmatrix} (\gamma_{11}w_{1j} + \dots + \gamma_{1n}w_{nj})^2 \\ \vdots \\ (\gamma_{n1}w_{1j} + \dots + \gamma_{nn}w_{nj})^2 \end{pmatrix} \Delta t, j = 0, 1, \dots, \quad (2.3)$$

где $\mathbf{w}_0 = (w_{10}, \dots, w_{n0})^T$ и $\Delta t > 0$ – шаг интегрирования, который может быть выбран сколь-угодно малым.

Предположим, что $w_{n0} \neq 0$ (тогда корректно определяется вектор $\mathbf{z}_0 = (z_{10}, \dots, z_{n-1,0})^T$, где $z_{10} = w_{10}/w_{n0}, \dots, z_{n-1,0} = w_{n-1,0}/w_{n0}$, и одновременно с системой (1.5) применим метод Эйлера также и к системе (2.1):

$$\begin{cases} \mathbf{z}_{j+1} = \mathbf{z}_j + \begin{pmatrix} G_1(z_{1j}, \dots, z_{n-1,j})w_{nj} \\ \vdots \\ G_{n-1}(z_{1j}, \dots, z_{n-1,j})w_{nj} \end{pmatrix} \Delta t, \\ w_{n,j+1} = w_{nj} - (\gamma_{n1}w_{1j} + \dots + \gamma_{nn}w_{nj})^2 \Delta t, j = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (2.4)$$

Вначале заметим, что для асимптотической устойчивости тривиального решения системы (1.5) необходимо должно выполняться условие: $\forall i w_{i0} > 0$.

Действительно, если, например, $w_{n0} < 0$, то из (2.3) (или (2.4)) вытекает, что $\lim_{j \rightarrow \infty} w_{nj} = -\infty$. Если же $w_{n0} = 0$, то возможны две ситуации:

a1)

$$-(\gamma_{n1}w_{10} + \dots + \gamma_{nn}w_{n0})^2 < 0$$

и

a2)

$$\forall i w_{ni} = w_{n0} = 0 \text{ и } (\gamma_{n1}w_{1i} + \dots + \gamma_{n,n-1}w_{n-1,i} + \gamma_{nn}w_{n0})^2 = 0.$$

Ясно, что для некоторой итерации под номером $k > 0$ первая ситуация сведется к случаю $w_{nk} < 0$ и потому опять $\lim_{i \rightarrow \infty} w_{ni} = -\infty$. Вторая ситуация означает, что вектор решений $\mathbf{w}(t) = (w_1(t), \dots, w_n(t) \equiv 0)^T$ должен принадлежать некоторой $(n-1)$ -мерной гиперплоскости в \mathbb{R}^n , определяемой уравнением $\gamma_{n1}w_1 + \dots + \gamma_{n,n-1}w_{n-1} = 0$. Отсюда вытекает, что $\forall i \gamma_{n1}w_1^{(i)}(t) + \dots + \gamma_{n,n-1}w_{n-1}^{(i)}(t) \equiv 0$ (линейная комбинация производных) или

$$\begin{pmatrix} w_1 & \dots & w_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_1^{(n-2)} & \dots & w_{n-1}^{(n-2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{n1} \\ \vdots \\ \gamma_{n,n-1} \end{pmatrix} \equiv 0$$

и потому $\gamma_{n1} = 0, \dots, \gamma_{n,n-1} = 0$. Это означает, что в системе (1.5) присутствуют инвариантные подпространства (последнее уравнение системы имеет вид $\dot{w}_n(t) = -\gamma_{nn}w_n^2$) и, значит, $I(T_1, \dots, T_n) = 0$. Это противоречит условию общности этой системы.

Итак, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $w_{i0} > 0$. Тогда можно построить вектор

$$\mathbf{z}_0 = (w_{10}/w_{n0}, \dots, w_{n-1,0}/w_{n0})^T \in \mathbb{R}^{n-1},$$

все координаты которого положительны.

Пусть, например, $\mathbf{z}_0 \in \bar{\Sigma}_{j_1} \in \bar{\Sigma}$. Согласно (2.4) определим векторы

$$\mathbf{G}(\mathbf{z}_i) = (G_1(z_{1i}, \dots, z_{n-1,i}), \dots, G_{n-1}(z_{1i}, \dots, z_{n-1,i}))^T \in \mathbb{R}^{n-1}, i = 0, 1, \dots$$

б) Предположим, что для всех точек $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_{n-1})^T \in \bar{\Sigma}_{j_1}$ выполняется условие:

$$G_1(z_1, \dots, z_{n-1}) \geq 0. \quad (2.5)$$

Пусть также точка $\mathbf{z}_0 \in \bar{\Sigma}_{j_1}$ будет началом итерационного процесса $\mathbf{z}_0, \dots, \mathbf{z}_i, \dots$, генерируемого алгоритмом (2.4).

Выше было показано, что для сходимости такого процесса необходимо, чтобы $w_{ni} > 0$. Будем считать, что последнее условие имеет место. Тогда для первой координаты вектора \mathbf{z}_i имеем $z_{1i} - z_{1,i-1} > 0$. Пусть в итерационном процессе (2.3) на m -м шаге $w_{1m} > 0$, но $w_{1,m+1} < 0$. Тогда $z_{1m} > 0$, но $z_{1,m+1} < 0$. Следовательно, $z_{1,m+1} - z_{1m} < 0$, что противоречит условию (2.5). Таким образом, получаем монотонную возрастающую последовательность $z_{10} < z_{11} < \dots < z_{1m} < \dots$. Но непрерывная функция $h = G_1(z_1, \dots, z_{n-1})$ достигает своего наибольшего и наименьшего значения (которое достигается на границе) в замкнутой ограниченной области $\bar{\Sigma}_{j_1}$. Поэтому последовательность $\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \dots \subset \bar{\Sigma}_{j_1}$ и имеет предел $\lim_{m \rightarrow \infty} z_{1m} = a_{11}^* < \infty$.

с) Пусть, теперь, для всех точек $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_{n-1})^T \in \bar{\Sigma}_{j_2}$ выполняется

$$G_1(z_1, \dots, z_{n-1}) \leq 0. \quad (2.6)$$

Предположим, что точка $\mathbf{z}_0 \in \bar{\Sigma}_{j_2}$ будет началом итерационного процесса (2.4): $\mathbf{z}_0, \dots, \mathbf{z}_i, \dots$. Тогда для первой координаты вектора \mathbf{z}_i имеем $z_{1i} - z_{1,i-1} < 0$. Таким образом, получаем монотонную убывающую последовательность $z_{10} > z_{11} > \dots > z_{1m} > \dots$. Пусть в итерационном процессе (2.4) на m -м шаге $z_{1,m} > 0$, но $z_{1,m+1} < 0$. Это означает, что, с одной стороны, на каком-то шаге с номером m мы получим $G_1(z_{1m}, \dots, z_{n-1,m}) \geq 0$ (последовательность покинет область $\bar{\Sigma}_{j_2}$ и перейдет в область $\bar{\Sigma}_{j_1} \subset \bar{\Sigma}$). Тогда с другой стороны, из итерационного процесса (2.4) следует, что $z_{1,m+1} > 0$ и повторяется ситуация пункта б). Но опять же непрерывная функция $h = G_1(z_1, \dots, z_{n-1})$ достигает своего наименьшего и наибольшего значения (которое достигается на границе) в замкнутой ограниченной области $\bar{\Sigma}_{j_2}$. Таким образом, мы приходим к противоречию и потому последовательность $\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \dots \subset \bar{\Sigma}_{j_2}$ и $\lim_{m \rightarrow \infty} z_{1m} = a_{12}^* < \infty$.

Так как области $\bar{\Sigma}_{j_1}$ и $\bar{\Sigma}_{j_2}$ определяются неравенствами (2.5) и (2.6), то аналогично, неравенства вида

$$G_i(z_1, \dots, z_{n-1}) \leq 0 \quad (G_i(z_1, \dots, z_{n-1}) \geq 0),$$

определяют области $\bar{\Sigma}_{j_i} \subset \bar{\Sigma}$ и $\bar{\Sigma}_{j_{i+1}} \subset \bar{\Sigma}$. Поэтому, также как и в пунктах б) и с), убеждаемся в том, что $\forall q \in \{1, \dots, n-1\}$ последовательность $z_{q0}, z_{q1}, \dots, z_{qi}, \dots$ координат с номером q векторов $\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_i, \dots$ является монотонной и ограниченной. Отсюда следует, что $\forall i$ все координаты вектора \mathbf{z}_i положительны и последовательность $\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_i, \dots \in \bar{\Sigma}$ и потому множество $\bar{\Sigma}$ является инвариантным.

Из предыдущего ясно, что последовательность $\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_i, \dots$ сходится к точке $(a_1^*, \dots, a_{n-1}^*)^T$, где $a_s^* = a_{s1}^*$ или $a_s^* = a_{s2}^*$; $s = 1, \dots, n-1$. Но области $\bar{\Sigma}_{j_1}, \dots, \bar{\Sigma}_{j_r}$ имеют единственную точку пересечения \mathbf{z}_k^* . Следовательно, должно быть $\mathbf{z}_k^* = (a_1^*, \dots, a_{n-1}^*)^T$. Это и завершает доказательство. \square

Пусть, например, $n = 2$. Тогда первое уравнение системы (2.1) выглядит так:

$$\dot{z}_1 = (\gamma_{21}^2 z_1^3 + (2\gamma_{21}\gamma_{22} - \gamma_{11}^2)z_1^2 + (\gamma_{22}^2 - 2\gamma_{11}\gamma_{12})z_1 - \gamma_{12}^2)w_2;$$

следовательно, только одно уравнение

$$G(z_1) = \gamma_{21}^2 z_1^3 + (2\gamma_{21}\gamma_{22} - \gamma_{11}^2)z_1^2 + (\gamma_{22}^2 - 2\gamma_{11}\gamma_{12})z_1 - \gamma_{12}^2 = 0. \quad (2.7)$$

представляет собой систему (2.2).

Предположим, что дискриминант [11] последнего уравнения положителен. Тогда это уравнение имеет три различных положительных корня: $0 < z_1^* < z_2^* < z_3^*$. Следовательно, $\mathbb{S}_1 = z_1^*$, $\Sigma_1 = (-\infty, z_1^*)$; $\mathbb{S}_2 = z_1^* \cup z_2^*$, $\Sigma_2 = (z_1^*, z_2^*)$; $\mathbb{S}_3 = (z_2^* \cup z_3^*)$, $\Sigma_3 = (z_2^*, z_3^*)$; $\mathbb{S}_4 = z_3^*$, $\Sigma_4 = (z_3^*, \infty)$ и потому $p = 4$.

Таким образом, в приведенном выше примере $\mathbf{z}_k^* = z_2^*$, $r = 2$ и $\bar{\Sigma}_{j_1} = \bar{\Sigma}_2$, $\bar{\Sigma}_{j_2} = \bar{\Sigma}_3$ и, следовательно,

$$\bar{\Sigma} = [z_1^*, z_3^*].$$

Осталось только вывести явные условия для положительности дискриминанта кубического уравнения и того, что система (1.2) является \mathbb{R} -системой. Проще всего это сделать в терминах теории инвариантов.

Пусть $n = 2$. Обозначим через trF след квадратной матрицы F . Введем инварианты [5, 6]:

$$I_1 = \det \begin{pmatrix} (trT_1, trT_2) \cdot T_1 \\ (trT_1, trT_2) \cdot T_2 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \det(T_1T_2 - T_2T_1),$$

$$K_3 = \det \begin{pmatrix} trT_1, trT_2 \\ (trT_1, trT_2) \cdot (T_1T_2 - T_2T_1) \end{pmatrix},$$

а также инварианты

$$L = I_1 - J_2 - K_3 \quad \text{и} \quad D = I_1 + 27J_2 - 5K_3.$$

Тогда, воспользовавшись результатами работы [5] можно показать, что если $L > 0$, то система (1.2) является \mathbb{R} -системой и если $D > 0$, то уравнение (2.7) имеет три положительных корня.

Следствие 1. Пусть $n = 2$. Тогда условия $I \neq 0$ и $L > 0$, $D > 0$ эквивалентны условиям Теоремы 1 и потому система (1.2) имеет нетривиальный конус асимптотической устойчивости. Если, к тому же, система (1.2) приведена к виду (1.5), то этот конус расположен в первом ортанте и заключен между лучами $w_1 = z_1^* w_2$ и $w_1 = z_3^* w_2$.

Отметим, что Следствие 1 является частным случаем более общего результата, полученного в [6]. Однако важной особенностью Следствия 1 является то, что в отличие от [6], оно получено без нахождения решений системы (1.5).

3. Условия устойчивости для однородной квадратичной системы третьего порядка

Предположим, что $n = 3$ и система (1.2) имеет вид (1.5).

Для того, чтобы воспользоваться Теоремой 1 представим наглядно процесс (2.4) (см. рис. 1). Здесь $v = w_1/w_3$, $u = w_2/w_3$ и точка A_3 играет роль точки z_k^* .

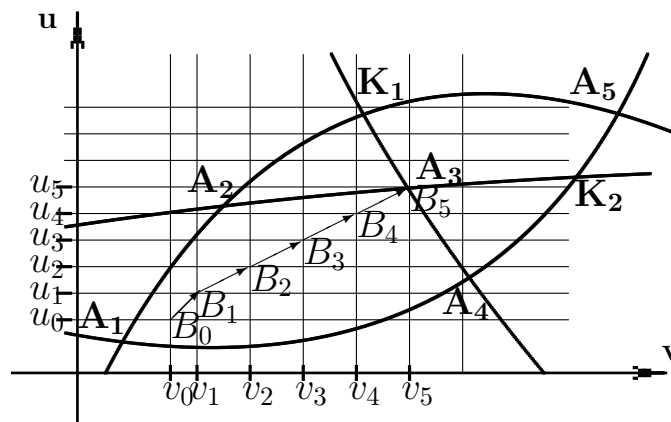


Рис.1. Графическая интерпретация итерационного процесса (2.4)

Далее, строим область

$$\bar{\Sigma} = \bar{\Sigma}_1 \cup \dots \cup \bar{\Sigma}_4,$$

где

$\bar{\Sigma}_1$ - область ограниченная кривыми, проходящими через точки A_1, A_2, A_3 и A_4 ;

$\bar{\Sigma}_2$ - область ограниченная кривыми, проходящими через точки A_2, A_3 и K_1 ;

$\bar{\Sigma}_3$ - область ограниченная кривыми, проходящими через точки A_3, K_1, A_5 и K_2 ;

$\bar{\Sigma}_4$ - область ограниченная кривыми, проходящими через точки A_3, K_2 и A_4 .

Итерационный процесс начинается из точки $B_0 \in \bar{\Sigma}_1$ и заканчивается в точке $B_5 = A_3 \in \bar{\Sigma}_1$. (Различие между точками A_1, \dots, A_5 и K_1, K_2 заключается в том, что A_1, \dots, A_5 – точки пересечения двух различных кривых, в то время как K_1, K_2 – точки самопересечения.)

Пусть

$$F(x, y) = x(\alpha x + \beta y + \gamma)^2 - (\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1)^2 = 0 \quad (3.1)$$

- неявно заданная функция.

Предположим также, что $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta \neq 0$ и пусть точка $K_F(x_{0F}, y_{0F})$ – единственное решение системы линейных уравнений

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0, \quad \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0.$$

Составим функции

$$F'_x(x, y) = (\alpha x + \beta y + \gamma)^2 + 2\alpha x(\alpha x + \beta y + \gamma) - 2\alpha_1(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1),$$

$$F'_y(x, y) = 2\beta x(\alpha x + \beta y + \gamma) - 2\beta_1(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1),$$

$$F''_{xx}(x, y) = 4\alpha(\alpha x + \beta y + \gamma) + 2\alpha^2 x - 2\alpha_1^2, \quad F''_{yy}(x, y) = 2\beta^2 x - 2\beta_1^2,$$

$$F''_{xy}(x, y) = 2\beta(\alpha x + \beta y + \gamma) + 2\beta\alpha x - 2\beta_1\alpha_1.$$

Определим дискриминант

$$\Delta_F(x, y) = F''_{xx}(x, y)F''_{yy}(x, y) - (F''_{xy}(x, y))^2.$$

Тогда в точке K_F с координатами

$$x_{0F} = \frac{\gamma_1\beta - \gamma\beta_1}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta}, \quad y_{0F} = \frac{\alpha_1\gamma - \alpha\gamma_1}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta}$$

получаем $F'_x(x_{0F}, y_{0F}) = F'_y(x_{0F}, y_{0F}) = 0$ и

$$\begin{aligned} \Delta_F(x_{0F}, y_{0F}) &= 4(\alpha^2 x_{0F} - \alpha_1^2)(\beta^2 x_{0F} - \beta_1^2) - 4(\beta\alpha x_{0F} - \beta_1\alpha_1)^2 = \\ &= -4(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)^2 x_{0F} = 4(\gamma_1\beta - \gamma\beta_1)(\alpha_1\beta - \alpha\beta_1). \end{aligned}$$

Таким образом, если

$$x_{0F} = \frac{\gamma_1\beta - \gamma\beta_1}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta} > 0,$$

то $\Delta_F(x_{0F}, y_{0F}) < 0$ и кривая $F(x, y) = 0$ имеет один узел (точка (x_{0F}, y_{0F})).

Если же

$$x_{0F} = \frac{\gamma_1\beta - \gamma\beta_1}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta} < 0,$$

то $\Delta_F(x_{0F}, y_{0F}) > 0$ и кривая $F(x, y) = 0$ имеет одну изолированную точку (x_{0F}, y_{0F}) .

Так как $x_{0F} < 0$, то эта точка не лежит в первом квадранте.

Пусть теперь

$$H(x, y) = y(\alpha x + \beta y + \gamma)^2 - (\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2)^2 = 0 \tag{3.2}$$

- еще одна неявно заданная функция. Аналогично предыдущему получаем

$$x_{0H} = \frac{\gamma_2\beta - \gamma\beta_2}{\alpha\beta_2 - \alpha_2\beta}, \quad y_{0H} = \frac{\alpha_2\gamma - \alpha\gamma_2}{\alpha\beta_2 - \alpha_2\beta}$$

– координаты узла или изолированной точки (эту точку обозначим через K_H). Отсюда можно получить такое выражение для дискриминанта:

$$\Delta_H(x_{0H}, y_{0H}) = -4(\alpha\beta_2 - \alpha_2\beta)^2 y_{0H} = 4(\alpha_2\beta - \alpha\beta_2)(\alpha_2\gamma - \alpha\gamma_2).$$

Исследуем уравнение (3.1). Очевидно, что для этого уравнения должно быть $x \geq 0$. Тогда (3.1) переписывается в следующем виде:

$$\sqrt{x}|\alpha x + \beta y + \gamma| - |\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1| = 0.$$

Последнее уравнение эквивалентно двум уравнениям

$$\pm\sqrt{x}(\alpha x + \beta y + \gamma) - (\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1) = 0.$$

В свою очередь эти уравнения могут быть записаны так:

$$y = \frac{\alpha x\sqrt{x} - \alpha_1 x + \gamma\sqrt{x} - \gamma_1}{\beta_1 - \beta\sqrt{x}}, \quad (3.3)$$

$$y = -\frac{\alpha x\sqrt{x} + \alpha_1 x + \gamma\sqrt{x} + \gamma_1}{\beta_1 + \beta\sqrt{x}}. \quad (3.4)$$

Элементарное исследование функций (3.3) и (3.4) приводит к следующему выводу: вид кривой (3.1) зависит от знака дискриминанта.

1. Пусть $\Delta_F(x_{0F}, y_{0F}) < 0$. Тогда кривая (3.1) представляет собой объединение двух кривых Cur_{F1} и Cur_{F2} , а также имеет: одну вертикальную асимптоту \mathbb{A}_{S_F} , описываемую уравнением $x = \beta_1^2/\beta^2$; две точки локальных максимумов и одну точку локального минимума; один узел K_F и одну точку T_F соприкосновения с осью Y . График этой кривой представлен на Рис.2.

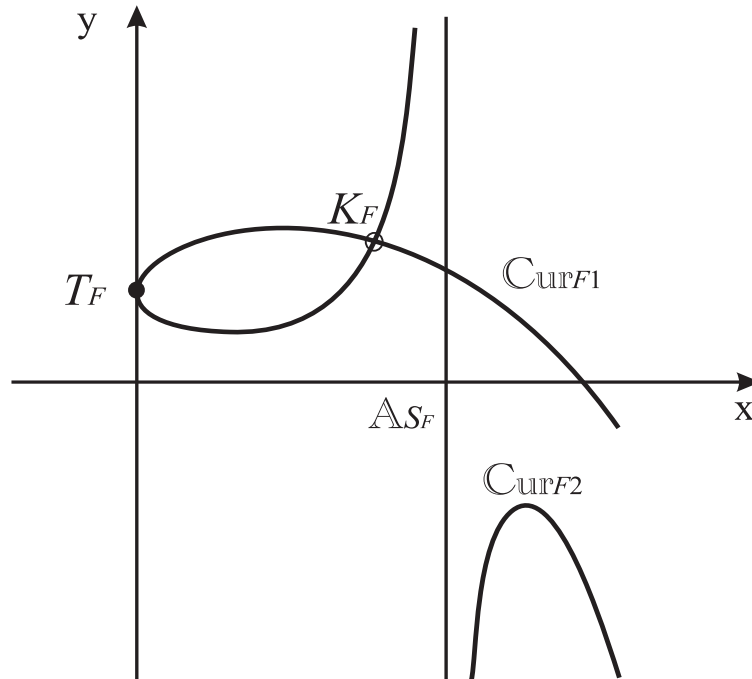


Рис.2. График кривой $F(x, y) = 0$ для $\Delta_F(x_{0F}, y_{0F}) < 0$.

Легко проверяется, что любая прямая $y = a$ пересекает (в общем случае) кубическую кривую $F(x, a) = 0$ в одной или трех точках.

2. Пусть $\Delta_F(x_{0F}, y_{0F}) > 0$. Тогда кривая (3.1) представляет собой объединение двух кривых Cur_{F1} и Cur_{F2} , а также имеет: одну вертикальную асимптоту \mathbb{A}_{SF} , описываемую уравнением $x = \beta_1^2/\beta^2$; одну точку локального максимума; одну изолированную особую точку K_F и одну точку T_F соприкосновения с осью Y . График этой кривой представлен на Рис. 3 (точка K_F на графике не показана).

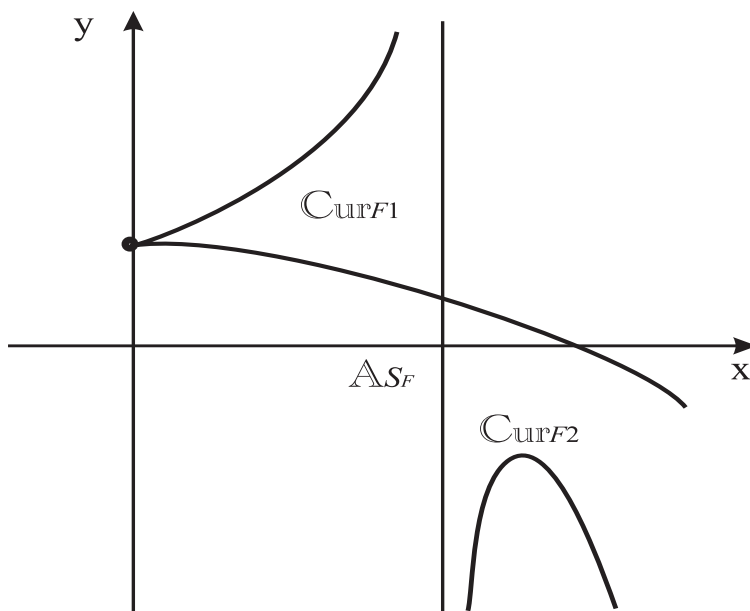


Рис.3. График кривой $F(x, y) = 0$ для $\Delta_F(x_{0F}, y_{0F}) > 0$.

Для кривой (3.2) аналогичные графики предствлены на Рис.4 и Рис.5.

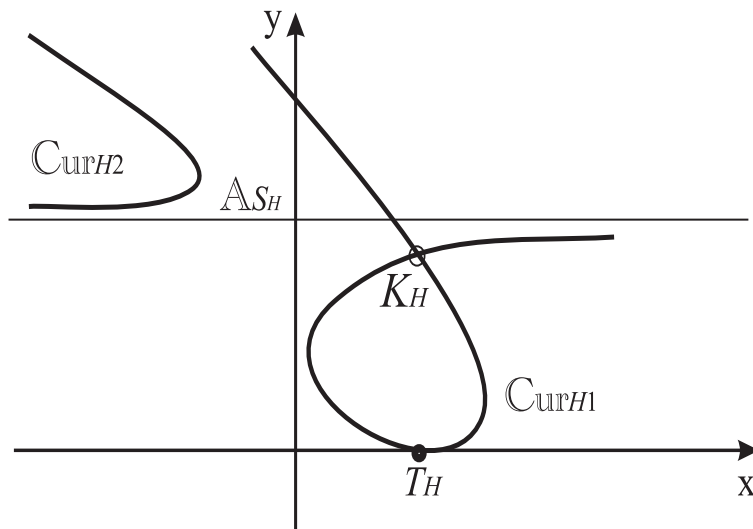


Рис.4. График кривой $H(x, y) = 0$ для $\Delta_H(x_{0H}, y_{0H}) < 0$.

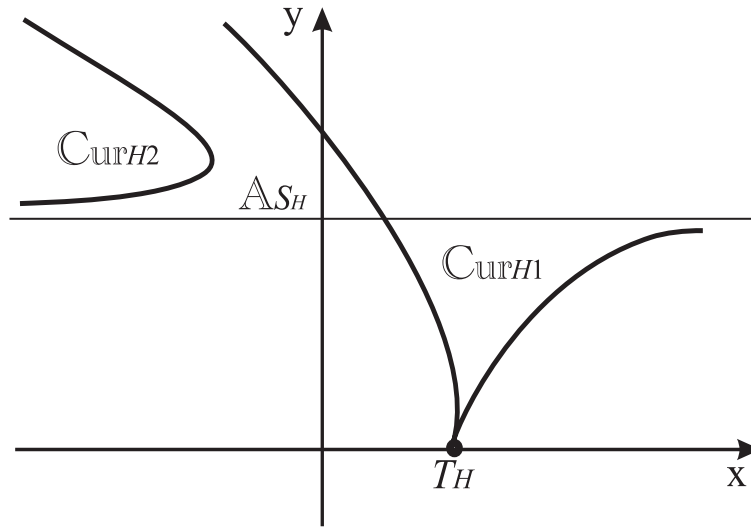


Рис.5. График кривой $H(x, y) = 0$ для $\Delta_H(x_{0H}, y_{0H}) > 0$.

Рассмотрим теперь объединение графиков кривых (3.1) и (3.2) в первом ортанте плоскости XOY . Важнейшей характеристикой такого объединения будет число точек пересечения кривых $F(x, y) = 0$ и $H(x, y) = 0$.

Определение 3. Пусть $p \leq 7$ - нечетное число точек пересечения кривых $F(x, y) = 0$ и $H(x, y) = 0$. Объединение графиков этих кривых в первом ортанте плоскости XOY будем называть p -конфигурацией.

Найдем такие p -конфигурации, которые образуют замкнутую ограниченную область в первом ортанте, содержащую внутри себя единственную точку пересечения кривых $F(x, y) = 0$ и $H(x, y) = 0$ (область $\bar{\Sigma}$; см. Рис.1).

Рассмотрим p -конфигурации для различных сочетаний знаков дискриминантов $\Delta_F(x_{0F}, y_{0F})$ и $\Delta_H(x_{0H}, y_{0H})$ (цифрами отмечены точки пересечения кривых).

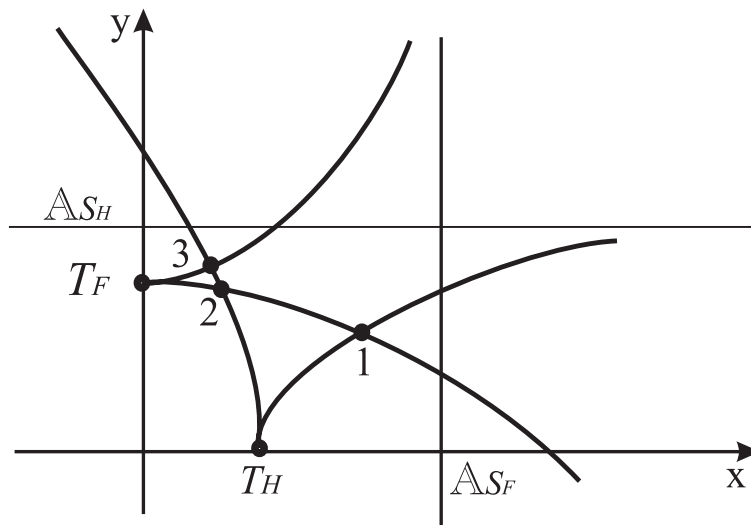


Рис.6. 3-конфигурация для $\Delta_F(x_{0F}, y_{0F}) > 0$ и $\Delta_H(x_{0H}, y_{0H}) > 0$.

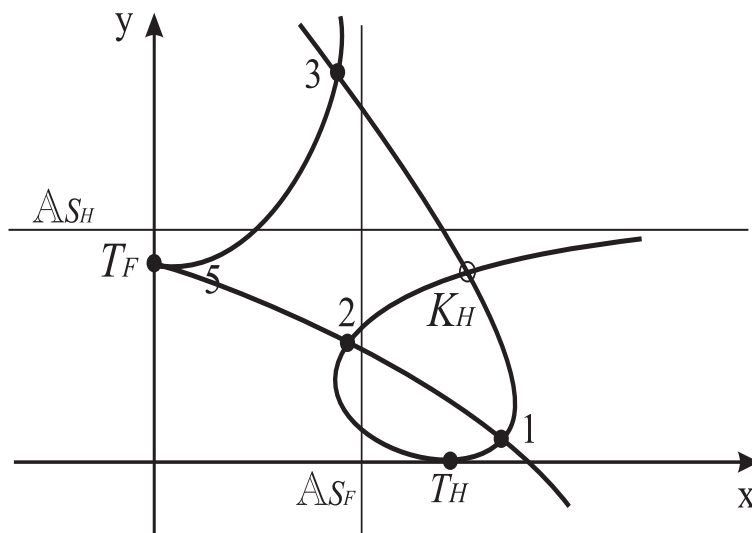


Рис.7. 3-конфигурация для $\Delta_F(x_{0F}, y_{0F}) > 0$ и $\Delta_H(x_{0H}, y_{0H}) < 0$.

Элементарное рассмотрение пар неравенств

$$\Delta_F(x_{0F}, y_{0F}) > 0, \Delta_H(x_{0H}, y_{0H}) < 0$$

или

$$\Delta_F(x_{0F}, y_{0F}) < 0, \Delta_H(x_{0H}, y_{0H}) > 0$$

или

$$\Delta_F(x_{0F}, y_{0F}) > 0, \Delta_H(x_{0H}, y_{0H}) > 0$$

показывает, что в любом из этих случаев получаются только 1-конфигурации или 3-конфигурации. Поэтому для того, чтобы получить ситуацию, изображенную на Рис.1, необходимо исследовать систему неравенств

$$\Delta_F(x_{0F}, y_{0F}) < 0, \Delta_H(x_{0H}, y_{0H}) < 0.$$

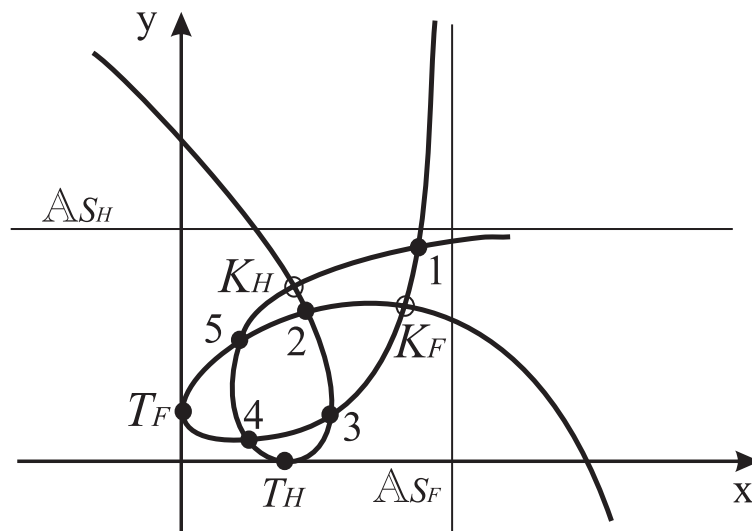
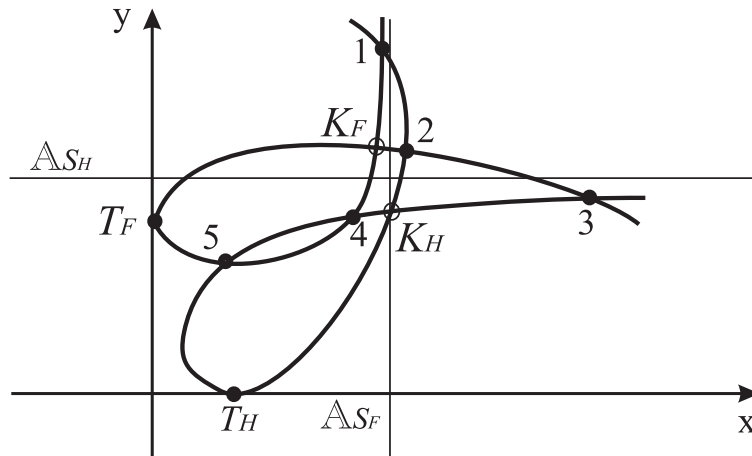
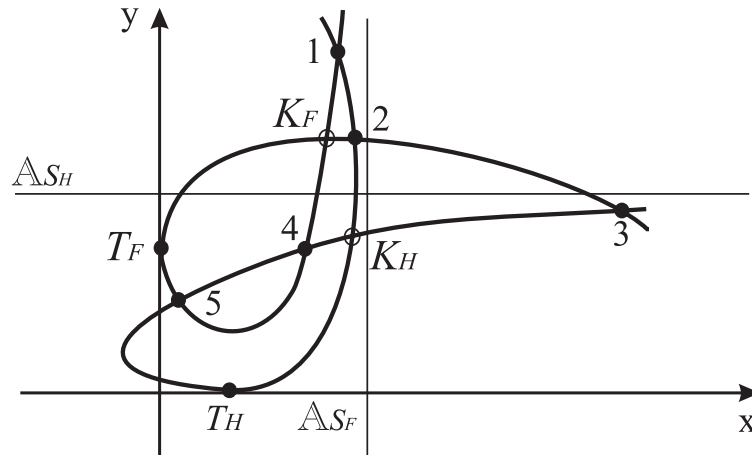
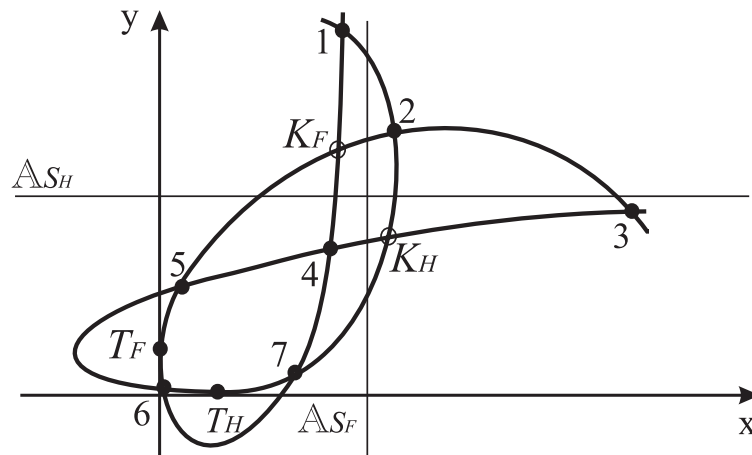


Рис.8. 5-конфигурация для $\Delta_F(x_{0F}, y_{0F}) < 0$ и $\Delta_H(x_{0H}, y_{0H}) < 0$.

Рис.9. 5-конфигурация для $\Delta_F(x_{0F}, y_{0F}) < 0$ и $\Delta_H(x_{0H}, y_{0H}) < 0$.Рис.10. 5-конфигурация для $\Delta_F(x_{0F}, y_{0F}) < 0$ и $\Delta_H(x_{0H}, y_{0H}) < 0$.Рис.11. 7-конфигурация для $\Delta_F(x_{0F}, y_{0F}) < 0$ и $\Delta_H(x_{0H}, y_{0H}) < 0$.

На рис. 8 область устойчивости представляет фигуру $1K_H543K_F1$; на рис. 9 область устойчивости представляет фигуру $2K_FT_FT_HK_H2$; на рис. 10 нет области устойчивости; на рис.11 область устойчивости – это фигура $2K_F5T_F6T_H7K_H2$.

Заметим, что для системы (5.2) система (2.2) будет состоять из одного уравнения

$$z(c_{11}z^2 + 2c_{12}z + c_{22}) = b_{11}z^2 + 2b_{12}z + b_{22}, \quad z = x_1/x_2. \quad (5.3)$$

Система (5.2) будет \mathbb{R} -системой тогда и только тогда, когда дискриминант уравнения (5.3) удовлетворяет условию: $D > 0$ [5].

Пусть $D > 0$ и $z_1^* < z_2^* < z_3^*$ – вещественные корни уравнения (5.3). Тогда система (5.2) всегда может быть приведена к виду (1.5) и согласно Теореме 1 конус с образующими $x_1 = z_1^*x_2$ и $x_1 = z_3^*x_2$ будет конусом асимптотической устойчивости Ω [5, 6].

Пусть опять $D > 0$. Тогда существует невырожденная матрица $S \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ такая, что после замены переменных $\mathbf{x} = S\mathbf{y}$ система (5.1) примет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{pmatrix} = S^{-1}AS \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1(d_{11}y_1 + 2d_{12}y_2) \\ y_2(2f_{12}y_1 + f_{22}y_2) \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

а система (5.2), – форму

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(d_{11}y_1 + 2d_{12}y_2) \\ y_2(2f_{12}y_1 + f_{22}y_2) \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

(Элементы s_{ij} матрицы S связаны с z_1, z_2, z_3 так: $s_{11}/s_{21} = z_1, s_{12}/s_{22} = z_3$.)

Для системы (5.5) система (2.2) такова

$$v(2f_{12}v + f_{22}) = d_{11}v^2 + 2d_{12}v, \quad v = y_1/y_2.$$

Ее корни: $v_1^* = 0, v_2^* = (2f_{12} - d_{11})/(2d_{12} - f_{22}), v_3^* = \pm\infty$. (В силу общности системы (5.1) $2f_{12} - d_{11} \neq 0, 2d_{12} - f_{22} \neq 0$. Корень $v_3^* = \pm\infty$ учитывает возможность перехода конуса асимптотической устойчивости через начало координат при применении преобразования S .)

Итак, при преобразовании S $z_1^* \rightarrow v_1^*, z_2^* \rightarrow v_2^*$ (если $v_2^* > 0$) и $z_3^* \rightarrow \infty$. (Если $v_2^* < 0$, то $z_1^* \rightarrow -\infty, z_2^* \rightarrow v_2^*$ и $z_3^* \rightarrow 0$.) Следовательно, конус асимптотической устойчивости Ω совпадет с соответствующим ортантом; именно этот ортант (обозначим его снова через Ω) и будет конусом асимптотической устойчивости для системы (5.5).

Переходим теперь к системе (5.4). Известно [5, 6], что любой из ортантов (например, Ω) инвариантен относительно системы (5.5). Поэтому, для инвариантности системы (5.4) необходимо, чтобы $A\Omega \subset \Omega$. Последнее означает, что $A = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2)$ – диагональная матрица. С учетом последнего замечания получим, что система (5.4) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 y_1 \\ \alpha_2 y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1(d_{11}y_1 + 2d_{12}y_2) \\ y_2(2f_{12}y_1 + f_{22}y_2) \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

(Другими словами это – система Лотки-Вольтеры [8, 9].)

Отметим, что условие общности системы (5.6) равносильно условию

$$\det \begin{pmatrix} d_{11} & 2d_{12} \\ 2f_{12} & f_{22} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Таким образом, если $\mathbf{y}_0 = (y_{10}, y_{20})^T \in \Omega$, то $\forall t \geq 0 \mathbf{y}(t) \in \Omega$. Поэтому из Теоремы 1 и [4] следует, что если $\mathbf{y}_0 \in \Omega$, то все решения системы (5.6) ограничены.

2. Построим область устойчивости для следующей однородной системы третьего порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -(-2x_1 + x_2 + x_3)^2, \\ \dot{x}_2 = -(2x_1 - 3x_2 + x_3)^2, \\ \dot{x}_3 = -(x_1 + x_2 - 3x_3)^2. \end{cases}$$

Введем новые переменные $x_1/x_3 = z_1$, $x_2/x_3 = z_2$ и построим систему (2.1):

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = ((-1 + z_1)z_2^2 + (2z_1^2 - 2z_1 - 2)z_2 + z_1^3 - 10z_1^2 + 13z_1 - 1)x_3(t), \\ \dot{z}_2(t) = (z_2^3 - (15 - 2z_1)z_2^2 + (z_1^2 + 6z_1 + 15)z_2 - 4z_1^2 - 4z_1 - 1)x_3(t), \\ \dot{x}_3 = -(z_1 + z_2 - 3)^2 x_3^2(t). \end{cases}$$

Рассмотрим систему уравнений (2.2):

$$\begin{cases} G_1(z_1, z_2) = (-1 + z_1)z_2^2 + (2z_1^2 - 2z_1 - 2)z_2 + z_1^3 - 10z_1^2 + 13z_1 - 1 = 0, \\ G_2(z_1, z_2) = z_2^3 - (15 - 2z_1)z_2^2 + (z_1^2 + 6z_1 + 15)z_2 - 4z_1^2 - 4z_1 - 1 = 0. \end{cases}$$

(Здесь применена упрощенная индексация.)

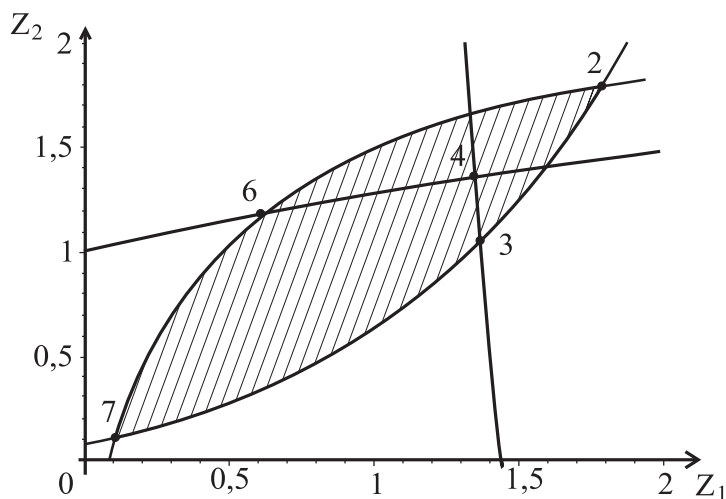
Исключая с помощью результата из последней системы переменную z_2 получим для z_1 следующее уравнение: $1156z_1^7 - 11629z_1^6 + 45659z_1^5 - 91185z_1^4 + 99120z_1^3 - 56960z_1^2 + 14848z_1 - 1024 = 0$. Корни последнего уравнения таковы: $z_{11}^* = 3, 6872$; $z_{12}^* = 1.7974$; $z_{13}^* = 1.3666$; $z_{14}^* = 1.3496$; $z_{15}^* = 1.1379$; $z_{16}^* = 0.6180$; $z_{17}^* = 0.1031$.

В свою очередь, неизвестная z_2 определяется из соотношения

$$z_2 = \frac{11z_1^4 - 163z_1^3 + 368z_1^2 - 238z_1 + 16}{-45z_1^3 + 83z_1^2 + 6z_1 - 48}.$$

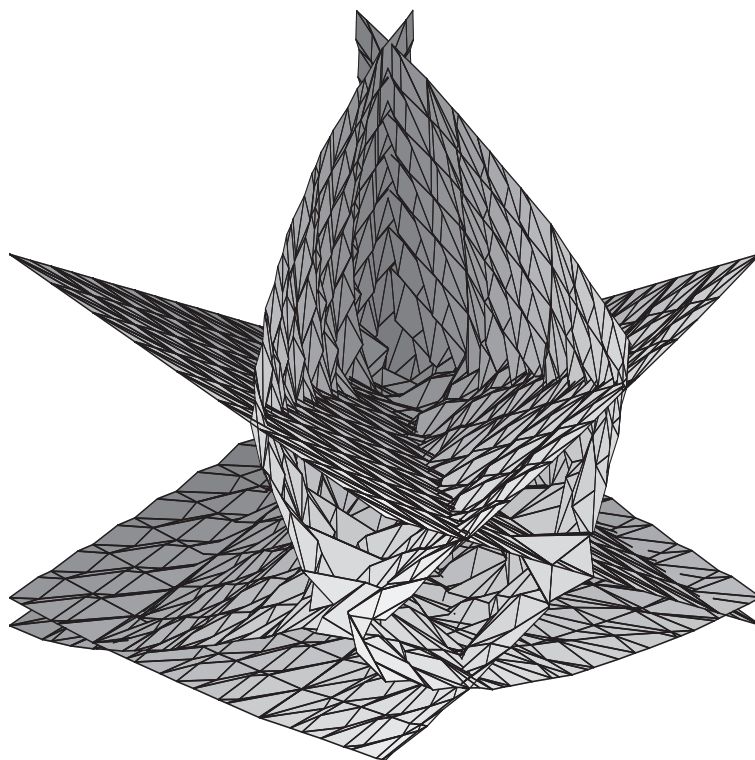
Тогда по корням z_{1i}^* можно найти корни z_{2i}^* : $z_{21}^* = 1.7310$; $z_{22}^* = 1.7974$; $z_{23}^* = 1.0423$; $z_{24}^* = 1.3491$; $z_{25}^* = 9.9979$; $z_{26}^* = 1.1805$; $z_{27}^* = 0.1032$.

Рассматриваемая система имеет нетривиальный конус асимптотической устойчивости Ω с направляющей, заданной в неявной форме уравнениями $G_1(z_1, z_2) = 0$ и $G_2(z_1, z_2) = 0$. Замкнутая ограниченная область $\bar{\Sigma}$, по которой определяется этот конус, имеет вид

Рис. 12. Область асимптотической устойчивости $\bar{\Sigma}$

На рис. 12 цифрами 2, 3, 4, 6 и 7 изображены точки z_2^* , z_3^* , z_4^* , z_6^* и z_7^* . (Точки z_1^* и z_5^* не попали в график.)

Вектор начальных данных, обеспечивающий асимптотическую устойчивость тривиального решения, должен иметь вид: $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{z}x_3, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$, где $\mathbf{z} \in \bar{\Sigma}$, $x_3 \geq 0$.

Рис. 13. Конус асимптотической устойчивости Ω (сечение этого конуса показано на Рис.12)

Список цитируемых источников

1. *Wang H.* Feedback Stabilization of Bilinear Control Systems // SIAM Journal on Control and Optimization. – 1998. – Vol.36. – №5. – P. 1669 – 1684.
2. *Sachkov Y. L.* On Invariant Orthants of Bilinear Systems // Journal of Dynamics and Control Systems. – 1998. – Vol. 4. – №1. – P. 137 – 147.
3. *Belozyorov V. Ye.* Design of Linear Feedback for Bilinear Control Systems // International Journal of Applied Mathematics and Computer Science. – 2002. – Vol. 12. – №4. – P. 493 – 511.
4. *Belozyorov V. Ye.* On Stability Cones for Quadratic Systems of Differential Equations // Journal of Dynamics and Control Systems. – 2005. – Vol.11. – №3. – P. 29 – 53.
5. *Белозеров В.Е., Волкова С.А.* Геометрический подход к проблеме стабилизации систем управления. – Днепропетровск: Издательство Днепропетровского государственного университета. – 2006. – 440 с.
6. *Belozyorov V. Ye.* Invariant Approach to an Existence Problem of Nontrivial Asymptotic Stability Cone // Canadian Applied Mathematics Quarterly. – 2007. – Vol. 15. – №2. – P.125 – 168.
7. *Lundstrom N.* Bifurcation and Strange Attractors in a Climate Related System // Differential Equations and Control Processes (Electronic Journal). – 2005. – №1. – P. 1 – 53.
8. *Takeuchi Y.* Global Dynamical Properties of Lotka – Volterra Systems . – Singapore: World Scientific. – 1996. – 302 p.
9. *Чернышенко С. В.* Нелинейные методы анализа динамики лесных биогеоценозов. – Днепропетровск: Издательство Днепропетровского государственного университета. – 2005. – 512 с.
10. *Khalil H.* Nonlinear Systems. Second Edition. – New-Jersey: Prentice Hall, Upper Saddle River. – 1996. – 736 p.
11. *Ленг С.* Алгебра. – М.: Мир. – 1968. – 564 с.

Получена 30.01.2008