Динамические системы, вып. 25 (2008), 3–16

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
Межведомственный научный сборник

УДК 517.9+530.1

Бифуркации вращающихся структур в параболическом уравнении с преобразованием поворота пространственной переменной

Е. П. Белан*, О. Б. Лыкова**

* Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского
Симферополь 95007. *E-mail: belan@crimea.edu*
** Институт математики НАН Украины
Киев 01601,*E-mail: lykova@imath.ua*

Аннотация. Рассматривается задача о бифуркации Андронова-Хопфа из пространственно однородного стационарного решения периодического по времени решения типа вращающейся структуры параболической краевой задачи Неймана на круговом кольце и преобразованием поворота угловой переменной. Развит и обоснован метод построения приближенных периодических по времени решений. При общих предположениях доказана теорема существования вращающейся структуры, построена асимптотическая форма и получены условия её экспоненциальной орбитальной устойчивости.

Ключевые слова: параболические уравнения, бифуркация, вращающаяся структура, одночастотный метод, центральные многообразия, орбитальная устойчивость.

Введение

Бурный рост исследований в нелинейной оптике, наблюдаемый в последнее время (см., например, [16, 17] и указанную в них литературу), связан с широким использованием оптических систем в информационных технологиях. Среди нелинейных оптических систем выделяются системы, состоящие из тонкого слоя нелинейной среды керровского типа и различным образом организованного контура двумерной обратной связи [1]. Обратная связь позволяет воздействовать на динамику системы посредством управляемого преобразования пространственных переменных, выполняемых призмами, линзами, динамическими голограммами и другими устройствами. Экспериментально показано [1], что использование даже простейших типов преобразований (поворот, поворот и сжатие, отражение) позволяет реализовать широкий спектр самоорганизации светового поля. Наблюдалась также и стохастизация светового поля — оптическая турбулентность.

Математической моделью указанных оптических систем являются квазилинейные параболические уравнения с преобразованиями пространственных переменных. Обоснование наблюдаемых автоволновых явлений для преобразования поворота в случае тонкого кругового кольца, круга проведено в [13, 14, 15]. Методы построения бифуркационных периодических решений для произвольной области и общего гладкого невырожденного преобразования развивались в [18, 22]. Обоснованию метода центральных многообразий и его применению для исследования бифуркаций вращающихся структур посвящены работы [3, 4]. В [6] показано, что в указанных задачах применим метод [9], основанный на построении приближенных периодических решений. Параболические уравнения с преобразованным аргументом и малой диффузией, представляющие интерес в связи с исследованием оптической турбулентности, изучались в работах [10, 20, 11, 12, 5, 7]. В рассматриваемом здесь впервые случае кругового кольца и преобразования поворота развивается метод построения приближенных периодических решений, в котором одночастотный метод Боголюбова-Митропольского [8] используется в сочетании с формализмом построения центральных многообразий систем, инвариантных относительно группы вращений окружности [21].

1. Постановка задачи

Обозначим $S = S_a$ кольцо, ограниченное двумя окружностями с центром в начале координат и радиусами $a < 1$ и 1. На S рассмотрим уравнение [1]

$$\partial u/\partial t + u = D\Delta u + K(1 + \gamma \cos Qu), \quad \partial u/\partial \nu\big|_{\partial S} = 0. \tag{1}$$

Здесь u фаза световой волны, Δ – двумерный оператор Лапласа, $D > 0$ – эффективный коэффициент диффузии частиц нелинейной среды, $0 < \gamma \le 1$ – видность (контрастность) интерференционной картины, $K > 0$ – коэффициент, пропорциональный интенсивности светового потока, $Qu(t, r, \theta) = u(t, r, \theta + h)$ ((r, θ) – полярные координаты на S), h – угол поворота в двумерной обратной связи, ν – внутренняя нормаль к границе S.

Обозначим $H = L_2(S)$ гильбертово пространство измеримых на S функций. Норму в пространстве H будем обозначать $\|\cdot\|$. Обозначим $H^l(S)$, $l \in \mathbb{Z}_+$, пространство Соболева измеримых на S функций. Норма в пространстве $H^l(S)$ вводится стандартно. Обозначим $H^l = H^l(S) \cap \{\partial u/\partial \nu\big|_{\partial S} = 0\}$, $l \in \mathbb{Z}_+$. В пространстве H^l норму обозначим $\|\cdot\|_l$.

Пусть $T > 0$. Следуя [2, см. I. 5.], приходим к следующему предложению.

Теорема 1. *Задача* (1) *с начальным условием* $u\big|_{t=0} = g$, $g \in H$ *имеет единственное решение* $u(t, r, \theta)$, *принадлежащее* $L_\infty([0, T], H) \cap L_2([0, T], H^1)$.

В качестве фазового пространства задачи (1), т.е. пространства начальных условий, примем пространство H^1. Задача (1) инвариантна относительно группы вращений окружности, т.е. S^1-эквивариантна.

В данной работе рассматриваются вопросы о существовании, асимптотической форме и устойчивости периодического решения задачи (1), бифурцирующего из пространственно однородного состояния $u_0 = u_0(K)$ равновесия, т.е. из решения уравнения

$$u_0 = K(1 + \gamma \cos u_0). \tag{2}$$

Согласно [11], [12, см.12.] с ростом K количество сосуществующих корней этого уравнения неограниченно растет, причем при $K \to \infty$ их состав постоянно обновляется: рождаются новые состояния равновесия и исчезают старые. В этой связи фиксируем какую-либо аналитическую ветвь решений

$$u_0 = u_0(K), \quad 1 + K\gamma \sin u_0(K) \neq 0 \tag{3}$$

уравнения (2), которая определена только на конечном промежутке изменения параметра K. Линеаризованную на состоянии равновесия $u = u_0(K)$ задачу (1) представим в виде

$$\dot{u} = L(K)u, \tag{4}$$

где линейный оператор $L : H \to H$ с областью определения H^2 удовлетворяет равенству

$$Lv = D\Delta v - v - l(K)Qv.$$

Здесь, $L = L(K)$, $l(K) = K\gamma \sin u_0(K)$.

Перейдем теперь к выбору бифуркационного значения параметра K. С этой целью исследуем спектр оператора $L : H \to H$. Рассмотрим в этой связи спектральную задачу

$$\Delta u = \lambda u, \quad \partial u/\partial \nu\big|_{\partial S} = 0. \tag{5}$$

Эта задача имеет двукратные собственные значения $-\beta_{n,s}^2$, $n = 0, 1, \ldots$, $s = 1, 2, \ldots$, где $\beta_{n,s}$ упорядоченные по возрастанию корни уравнения

$$Y_n'(a\beta)J_n'(\beta) - J_n'(a\beta)Y_n'(\beta) = 0, \tag{6}$$

а J_n и Y_n — функции Бесселя порядка n первого и второго рода соответственно. Собственному значению $-\beta_{n,s}^2$ отвечают собственные функции $\exp(\pm in\theta)J_{n,s}(r)$, где

$$J_{n,s}(r) = Y_n'(a\beta)J_n(\beta_{n,s}r) - J_n'(a\beta)Y_n(\beta_{n,s}r). \tag{7}$$

Очевидно, $\exp(\pm in\theta)J_{n,s}(r)$ — собственные функции оператора L:

$$L\exp(in\theta)J_{n,s}(r) = (-D\beta_{n,s}^2 - 1 - l(K)\exp(inh))\exp(in\theta)J_{n,s}(r). \tag{8}$$

Выберем бифуркационное значение K согласно следующему условию.

Условие 1. Существуют целое $m > 0$, вещественные $\widehat{K} > 0$, $\omega_0 \neq 0$ такие, что имеет место равенство

$$-D\beta_{m,1}^2 - 1 - l(\widehat{K})\exp(imh) = i\omega_0. \tag{9}$$

Перейдем теперь от параметра K к параметру μ согласно равенству $K = \widehat{K}+\mu$. Положим $u_0(\widehat{K}+\mu) = w(\mu)$, $L(\widehat{K}+\mu) = \mathfrak{L}(\mu)$, $l(\widehat{K}+\mu) = \Lambda(\mu)$, $l(\widehat{K}) = \widehat{\Lambda}$,

$$\lambda_{n,s}(\mu) = -D\beta_{n,s}^2 - 1 - \Lambda(\mu)\exp inh. \tag{10}$$

Обозначим $\lambda(\mu) = \lambda_{m,1}(\mu)$. Далее предполагается, что выполняется

Условие 2. $\delta'(0) = \mathrm{Re}\lambda'(0) \neq 0$.

Преобразование $u = w(\mu) + v$ приводит уравнение (1) к виду

$$\dot{v} = \mathfrak{L}(\mu)v + \mathfrak{R}(Qv, K), \tag{11}$$

где

$$\mathfrak{R}(v,\mu) = (\widehat{K}+\mu)\gamma[\cos(w(\mu)+v) - \cos w(\mu) + v\sin w(\mu)]. \tag{12}$$

Обозначим $L_2([a,1],r)$ – гильбертово пространство измеримых на $[a,1]$ комплекснозначных функций со скалярным произведением

$$< f, g >= \int_a^1 rf(r)\overline{g}(r)\,dr.$$

Пусть $n \geq 0$ – целое. Линейный оператор $\mathfrak{A}_n : L_2([a,1],r) \to L_2([a,1],r)$ с областью определения $\mathfrak{D}(\mathfrak{A}_n) = \{f \in L_2([a,1],r) : \mathfrak{A}_n f \in L_2([a,1],r), \quad f'(a) = f'(1) = 0\}$ определим равенством

$$\mathfrak{A}_n f = D[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{df}{dr}) - \frac{n^2}{r^2}f] - (1+\widehat{\Lambda}\exp inh)f.$$

Тогда

$$\mathfrak{A}_n J_{n,s} = \lambda_{n,s}(0)J_{n,s}. \tag{13}$$

Согласно условию 1

$$\mathfrak{A}_m J = i\omega_0 J, \tag{14}$$

где $J = bJ_{m,1}$, а постоянная $b > 0$ такова, что $< J, J >= 1$.

2. Приближенные вращающиеся структуры

В соответствии с одночастотным методом Боголюбова-Митропольского [8] и формализмом построения центральных многообразий S^1-эквивариантных уравнений [21, 5] построим решения уравнения (11) в виде

$$v = (z\exp(im\theta) + \overline{z}\exp(-im\theta))J + \sigma(z\exp(im\theta), \overline{z}\exp(-im\theta), r, \mu), \tag{15}$$

где z удовлетворяет уравнению

$$\dot{z} = \lambda(\mu)z + c_1 z^2\overline{z}. \tag{16}$$

Подставим (15), (16) в (11) и в полученном равенстве выполним замену $z\exp(im\theta) \to z$, $\overline{z}\exp(-im\theta) \to \overline{z}$. Затем представим $\sigma = \sigma(z, \overline{z}, r, \mu)$ в виде $\sigma = \sigma_2 + \sigma_3$, где

$$\sigma_2 = \frac{1}{2!}\sigma_{20}z^2 + \sigma_{11}z\overline{z} + \frac{1}{2!}\sigma_{02}\overline{z}^2,$$
$$\sigma_3 = \frac{1}{3!}\sigma_{30}z^3 + \frac{1}{2!}\sigma_{21}z^2\overline{z} + \frac{1}{2!}\sigma_{12}z\overline{z}^2 + \frac{1}{3!}\sigma_{03}\overline{z}^3.$$

В результате относительно коэффициентов квадратичной формы σ_2, положив $\mu = 0$, получаем уравнения

$$(2i\omega_0 - \mathfrak{A}_{2m})\sigma_{20} = -\widehat{K}\gamma\cos\widehat{w}\exp(i2mh)\,J^2,$$
$$\mathfrak{A}_0\sigma_{11} = \widehat{K}\gamma\cos\widehat{w}\,J^2.$$

Так как $is\omega_0 \overline{\in} \sigma(\mathfrak{A}_{sm})$, $s = 0, 2, 3\ldots$, то эти уравнения однозначно разрешимы:

$$\sigma_{20} = -\widehat{K}\gamma\cos\widehat{w}\exp(i2mh)\,(2i\omega_0 - \mathfrak{A}_{2m})^{-1}J^2, \tag{17}$$
$$\sigma_{11} = \widehat{K}\gamma\cos\widehat{w}\,\mathfrak{A}_0^{-1}J^2, \tag{18}$$

Очевидно, $\sigma_{02} = \overline{\sigma}_{20}$. Рассуждая, как и выше, относително коэффициентов формы σ_3 выводим линейные неоднородные уравнения. Легко видеть, что уравнение относительно σ_{30} однозначно разрешимо. Рассмотрим теперь уравнение

$$(i\omega_0 - \mathfrak{A}_m)\sigma_{21} + 2c_1 J = (-\cos\widehat{w}(\sigma_{11} + \sigma_{20})J + \sin\widehat{w}\,J^3)\widehat{K}\gamma\exp(imh). \tag{19}$$

Соответствующее (19) однородное уравнение имеет, очевидно, единственное линейно независимое решение J. Для разрешимости уравнения (19) необходимо и достаточно, чтобы его свободный член p удовлетворял условию $< J, p >= 0$. Отсюда, принимая во внимание (17), (18), получаем

$$c_1 = \frac{\exp(imh)}{2} < J, \widehat{\Lambda}J^3 + (\widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}\widehat{w})^2(2J\mathfrak{A}_0^{-1}J^2 + \exp(2imh)(J(2i\omega_0 - \mathfrak{A}_{2m})^{-1}J^2)) > . \tag{20}$$

Затем из (19) находим решение σ_{21}, удовлетворяющее условию $< J, \sigma_{21} >= 0$. Полагаем далее, что выполняется

Условие 3. $\mathrm{Re}c_1 < 0$.

Рассмотрим уравнение (16). Очевидно, что при $\operatorname{sign}\delta'(0)\mu > 0$ существует единственное с точностью до сдвигов по t периодическое решение уравнения (16) вида

$$z = \Big(\mu\delta'(0)(-\mathrm{Re}c_1)^{-1}\Big)^{1/2}\exp(i\widetilde{\omega}(\mu)t) + O(\mu), \tag{21}$$

где

$$\widetilde{\omega}(\mu) = \omega_0 + \mathrm{Im}\Big(\Lambda'(0)\exp(imh) + \mathrm{Im}c_1\delta'(0)(\mathrm{Re}c_1)^{-1}\Big)\mu + O(\mu^2). \tag{22}$$

В силу (15), (17), (18) (21), (22) уравнение (11) при $\operatorname{sign}\delta'(0)\mu > 0$ имеет приближенное по невязке порядка $\mu^{3/2}$ (в метрике H) периодическое по t решение $\widehat{v} = \widehat{v}(\eta, r, \mu)$, $\eta = \widehat{\omega}(\mu)t + m\theta$, при этом

$$\begin{aligned}
&\widehat{v} = 2\mu_1^{1/2}\cos\eta J - \mu_1\widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}(\widehat{w})\times \\
&\times\left[\mathfrak{A}_0^{-1}J^2 + \operatorname{Re}\exp\left(2i(\eta+mh)\right)(2i\omega_0 - \mathfrak{A}_{2m})^{-1}J^2\right], \qquad (23)\\
&\widehat{\omega}(\mu) = \omega_0 + \Lambda'(0)\operatorname{Im}\exp\left(imh\right)\mu + \operatorname{Im}c_1\mu_1, \qquad (24)
\end{aligned}$$

где $\mu_1 = \mu\delta'(0)(-\operatorname{Re}c_1)^{-1}$.

Следовательно, если $sign\,\delta'(0) > 0$, то решение уравнения (11) типа вращающейся структуры следует искать в виде

$$v = \sum_{s=1}^{\infty}\mu^{s/2}v_s(\eta, r), \quad \eta = \omega(\mu)t + m\theta, \quad \omega(\mu) = \sum_{s=1}^{\infty}\mu^s\omega_s. \qquad (25)$$

Очевидно, коэффициенты разложений функций $v(\mu) \in H^2$, $\omega(\mu) \in \mathbb{R}$ должны быть определены из уравнения

$$\omega\frac{\partial v}{\partial\eta} - D[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial v}{\partial r}) - \frac{m^2}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2}] + v + \Lambda(\mu)Q_m v = \mathfrak{R}(Q_m v, \mu), \qquad (26)$$

где $Q_m v(\eta, r, \mu) = v(\eta + mh, r, \mu)$

3. Существование вращающейся структуры.

Описанный выше формализм построения периодического решения уравнения (11) обосновывает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 1–3. *Тогда существует* $\mu_0 > 0$ *такое, что для* $0 < sign\,\delta'(0)\mu < \mu_0$ *уравнение* (11) *имеет периодическое по* t *решение* $v^* = v^*(\eta, r, \mu)$, $\eta = \omega(\mu)t + m\theta$, *при этом имеют место равенства*

$$v^*(\eta, r, \mu) = \widehat{v}(\eta, r, \mu) + O(\mu^{3/2}), \quad \omega(\mu) = \widehat{\omega}(\mu) + O(\mu^2),$$

где $\widehat{v}(\mu)$, $\widehat{\omega}(\mu)$ *определены равенствами* (23) *и* (24) *соответственно.*

Доказательство. Доказательство теоремы следует развитому в [9] подходу. Для определенности будем предполагать, что $\delta'(0) > 0$. Положим в уравнении (11) $v = v(\eta, r, \mu)$, $\eta = \omega(\mu)t + m\theta$. В результате относительно v получим в пространстве H^2 уравнение (26), которое согласно вышеизложенному имеет при $\omega(\mu) = \widehat{\omega}(\mu)$ приближенное по невязке порядка $\mu^{3/2}$ решение $\widehat{v}(\eta, r, \mu)$. Преобразование $v = \widehat{v} + \xi$ приводит уравнение (26) к виду

$$\mathfrak{B}(\mu)\xi = F(\xi, \eta, r, \mu, \delta), \qquad (27)$$

где оператор $\mathfrak{B}(\mu) : H \to H$ с областью определения H^2 задается равенством

$$\mathfrak{B}(\mu)\xi = \widehat{\omega}\frac{\partial \xi}{\partial \eta} - D[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial \xi}{\partial r}) - \frac{m^2}{r^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial \eta^2}] + \xi + \Lambda(\mu)Q_m\xi + \\ + (\mu_1^{1/2}g_1 + \mu_1 g_2 + \mu_1^{3/2}g_3)Q_m\xi, \tag{28}$$

где

$$g_1 = \widehat{\Lambda}\,\mathrm{ctg}\,\widehat{w}(\exp{(i\eta_1)}J + \text{к.с.}), \quad \eta_1 = \eta + mh, \tag{29}$$

$$g_2 = -\frac{1}{2}\widehat{\Lambda}(\exp{(i\eta_1)}J + \text{к.с.})^2 - (\widehat{\Lambda}\,\mathrm{ctg}\,\widehat{w})^2\Big[\mathfrak{A}_0^{-1}J^2 + \\ + \mathrm{Re}\exp{(i2\eta_1)}(2i\omega_0 - \mathfrak{A}_{2m})^{-1}J^2\Big], \tag{30}$$

а функция $g_3 = g_3(\eta, r, \mu) \in H^2(S)$ является аналитической функцией аргумента $\mu^{1/2}$ при $0 < \mu < \mu_0$. Функция F в уравнении (27) представима в виде

$$F(\xi, \eta, r, \mu, \delta) = \delta(\frac{\partial \xi}{\partial \eta} + \frac{\partial \widehat{v}}{\partial \eta}) + f_0(\eta, r, \mu) + f_2(\xi, \eta, r, \mu), \tag{31}$$

где $\delta = \widehat{\omega} - \omega$. Очевидно, имеет место неравенство

$$\|f_0\| < d\mu^{3/2}. \tag{32}$$

Здесь и далее буквой d будем обозначать постоянные, которые не зависят от μ и точные значения которых несущественны. Функция $f_2(\cdot, \eta, r, \mu) : H^2 \to H$, $f_2(0, \eta, r, \mu) = 0$, $\partial_\xi f_2(0, \eta, r, \mu) = 0$, удовлетворяет условию

$$\|f_2(\xi_1, \eta, r, \mu) - f_2(\xi_2, \eta, r, \mu)\| < d\max(\|\xi_1\|_2, \|\xi_2\|_2)\|\xi_1 - \xi_2\|. \tag{33}$$

Разрешимость (27) приводит к спектральной задаче

$$\mathfrak{B}(\mu)\xi = \lambda\xi, \quad \xi \in H^1. \tag{34}$$

Из равенства (23) и определения $\mathfrak{B}(\mu)$ следует приближенное с точностью порядка μ равенство

$$\mathfrak{B}(\mu)\xi^0 = 0, \tag{35}$$

где

$$\xi^0 = -\mathrm{Im}\big(\exp{(i\eta)}J - \mu_1^{1/2}\widehat{\Lambda}\,\mathrm{ctg}\,\widehat{w}\exp{(2i(\eta + mh))}(2i\omega_0 - \mathfrak{A}_{2m})^{-1}J^2\big). \tag{36}$$

Рассмотрим соответствующую (34) невозмущенную задачу

$$\mathfrak{B}(0)\xi = \omega_0\frac{\partial \xi}{\partial \eta} - D[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial \xi}{\partial r}) - \frac{m^2}{r^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial \eta^2}] + \xi + \widehat{\Lambda}Q_m\xi = \lambda\xi, \quad \xi \in H.$$

В силу условия 1 нуль — двукратное собственное значение оператора $\mathfrak{B}(0)$, при этом $\mathrm{Ker}\,\mathfrak{B}(0) = \mathrm{Span}\{\exp(i\eta)J, \exp(-i\eta)J\}$. Остальные же собственные значения оператора $\mathfrak{B}(0)$ отделены от нуля. В этой связи ограничимся анализом задачи (34) для малых λ. Положим

$$\xi = (\beta_1 \exp(i\eta) + \beta_2 \exp(-i\eta))J + \mu_1^{1/2}\xi_1 + \mu_1\xi_2 + \ldots, \tag{37}$$

$$\lambda = \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_1^2 + \ldots, \tag{38}$$

подставим эти равенства в (34) и затем приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $\mu_1^{1/2}$. В результате относительно $\xi_1, \xi_2, \ldots$ получим рекуррентную последовательность линейных неоднородных уравнений. При этом

$$\mathfrak{B}(0)\xi_1 = (\beta_1 \exp(i\eta) + \beta_2 \exp(-i\eta))Jg_1.$$

Отсюда в силу (29) получаем

$$\xi_1 = \widehat{\Lambda}\,\mathrm{ctg}\,\widehat{w}(\beta_1 \exp(2i(\eta + mh)(2i\omega_0 + \mathfrak{A}_{2m})^{-1}J^2 + \\ + \beta_2 \exp(-2i(\eta + mh))(-2i\omega_0 + \mathfrak{A}_{2m}^*)^{-1}J^2 + (\beta_1 + \beta_2)\mathfrak{A}_0^{-1}J^2)). \tag{39}$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$\mathfrak{B}(0)\xi_2 = (\beta_1 \exp(i\eta_1) + \beta_2 exp(-i\eta_1))Jg_2 - (Q_m\xi_1)g_1 - i\mathrm{Im}\ c_1(\beta_1 \exp(i\eta) - \\ - \beta_2 \exp(-i\eta))J - (\beta_1 \exp(i\eta_1) + \beta_2 \exp(-i\eta_1))J\Big(\mathrm{Re}\lambda'(0)(\mathrm{Re}c_1)^{-1}\Big)^{-1} + \\ + \lambda_1(\beta_1 \exp(i\eta) + \beta_2 \exp(-i\eta))J,$$

где g_2 удовлетворяет равенству (30). Несложные, но громоздкие вычисления, приводят к заключению, что это уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда $(\beta_1, \beta_2)^T$ – собственный вектор матрицы

$$M = \begin{pmatrix} c_1 & c_1 \\ \bar{c}_1 & \bar{c}_1 \end{pmatrix},$$

а λ_1 – соответствующее собственное значение. Собственным векторам $(1, -1)^T$, $(c_1, \bar{c}_1)^T$ этой матрицы отвечают собственные значения 0 и $2\mathrm{Re}c_1$ соответственно. Соответствующий анализ сопряженной (34) спектральной задачи

$$\mathfrak{B}^*(\mu)\zeta = \lambda\zeta, \quad \zeta \in H,$$

для малых λ приводит к матрице M^*. Отсюда, в частности, следует, что с точностью порядка $\mu^{1/2}$ справедливо равенство

$$\mathfrak{B}^*(\mu)\zeta_0 = 0,$$

где

$$\zeta_0 = \mathrm{Im}\ (c_1 \exp(-i\eta_1)J).$$

Далее определим оператор $\widehat{\mathfrak{B}}(\mu)$ согласно формуле

$$\widehat{\mathfrak{B}}(\mu)\xi = \mathfrak{B}(\mu)(\xi - \frac{\langle \xi^0, \xi \rangle}{\|\xi^0\|^2}\xi^0). \tag{40}$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в пространстве H. Рассмотрим теперь спектральную задачу

$$\widehat{\mathfrak{B}}(\mu)\xi = \lambda\xi, \quad \xi \in H.$$

По определению $\widehat{\mathfrak{B}}(\mu)\xi^0 = 0$. Согласно равенству (35) спектральные свойства оператора $\widehat{\mathfrak{B}}(\mu)$ при μ малых аналогичны таковым для оператора $\mathfrak{B}(\mu)$. Следовательно, существует функция $\xi^1 \in H^2$ такая, что

$$\widehat{\mathfrak{B}}(\mu)\xi^1 = (-2\mu_1 \mathrm{Re} c_1 + O(\mu^2))\xi^1.$$

При этом с точностью порядка μ справедливо равенство

$$\xi^1 = \mathrm{Re}\big(c_1(\exp{(i\eta_1)}J + \mu_1^{1/2}\widehat{\Lambda}\,\mathrm{ctg}\,\widehat{w}(\mathfrak{A}_0^{-1}J^2) + \exp{(2i(\eta_1 + mh)}(2i\omega_1 - \mathfrak{A}_{2m})^{-1}J^2\big).$$

Очевидно, существует функция $\zeta^0 \in H^2$, удовлетворяющая равенству

$$\zeta^0 = \mathrm{Re} c_1^{-1} \mathrm{Im}\ (c_1 \exp{(-i\eta_1)}J) + O(\mu)$$

и такая, что

$$\widehat{\mathfrak{B}}^*(\mu)\zeta^0 = 0, \quad \langle \zeta^0, \xi^0 \rangle = 1.$$

Обозначим $M_1 = \mathrm{Span}\{\xi^1\}$. Пусть H разложено по спектральному множеству $\{0, -2\mu \mathrm{Re} c_1 + O(\mu^2)\}$ оператора $\widehat{\mathfrak{B}}(\mu)$, т.е.

$$H = \mathrm{Ker}(\widehat{\mathfrak{B}}) \oplus M_1 \oplus M_2.$$

Уравнение

$$\widehat{\mathfrak{B}}(\mu)\xi = g, \quad g \in H, \tag{41}$$

разрешимо тогда и только тогда, когда $\langle \zeta^0, g \rangle = 0$. При этом существует единственное решение $\mathfrak{K}g \in H^2$ этого уравнения такое, что $\langle \mathfrak{K}g, \zeta^0 \rangle = 0$. Имеют место следующие оценки

$$\|\mathfrak{K}g\|_2 < d\|g\|, \quad g \in M_2, \tag{42}$$

$$\|\mathfrak{K}g\|_2 < \frac{d}{\mu}\|g\|_H, \quad g \in M_1. \tag{43}$$

Пусть $\widehat{P}$ – проектор в пространстве H на $\mathrm{Ker}(\widehat{\mathfrak{B}}) \oplus M_1$. Анализ построения функции $\hat{v}$ приводит к неравенству

$$\|\widehat{P} f_0(\cdot, \mu)\| < d\mu^{5/2}. \tag{44}$$

Рассмотрим теперь уравнение (27). Заменим в нём $\mathfrak{B}$ на $\widehat{\mathfrak{B}}$. Эту замену учтем и в правой части, обозначив ее $\widehat{F}$. Отметим, что согласно проведенному выше анализу

$$\|\mathfrak{B}(\mu)\xi^0\| < d\mu, \quad \|\widehat{P}\mathfrak{B}(\mu)\xi^0\| < d\mu^{3/2}. \tag{45}$$

Рассмотрим в пространстве H^2 уравнение

$$\xi - \mathfrak{K}(\widehat{F}(\xi,\mu,\delta) - \langle\zeta^0, \widehat{F}(\xi,\mu,\delta)\rangle\xi^0) = 0. \tag{46}$$

Теперь видим, что примененный к этому уравнению метод последовательных приближений с нулевой начальной точкой приводит к сходящейся в H^2 последовательности равномерно по μ, δ в области $0 \le \mu \le \mu_0$, $|\delta| \le d\mu^{3/2}$. Предел этой последовательности $\xi^*(\mu,\delta)$ является решением уравнения (46) и удовлетворяет оценке

$$\|\xi^*(\mu,\delta)\|_2 < d\mu^{3/2}. \tag{47}$$

Функция $\xi^*(\mu,\delta)$ непрерывно дифференцируема в области $0 \le \mu \le \mu_0$, $|\delta| \le d\mu^{3/2}$. Согласно (33) существует единственное решение уравнения (46), удовлетворяющее и неравенству (47) и условию $\langle\zeta^0, \xi^*\rangle = 0$. По построению $\xi^*(\mu,\delta)$ удовлетворяет уравнению

$$\mathfrak{B}(\mu)\xi = F(\xi,\eta,r,\mu,\delta) - G(\mu,\delta)\xi^0,$$

где

$$G(\mu,\delta) = \langle\zeta^0, \widehat{F}(\xi^*,\eta,r,\mu,\delta)\rangle.$$

Итак, вопрос о разрешимости уравнения (26) сводится к вопросу о разрешимости относительно δ уравнения

$$G(\mu,\delta) = 0.$$

Это уравнение в силу (24), (31), (32), (36), (44), (45), (47) представимо в виде

$$G(\mu,\delta) = \mu_1^{1/2}(\delta + \mu^{3/2}q(\mu^{1/2},\delta)) = 0, \tag{48}$$

где $q(\mu^{1/2},\delta)$ — непрерывно дифференцируемая функция в области $0 < \mu < \mu_0$, $|\delta| < d\mu_0^{3/2}$. Отсюда в силу теоремы о неявной функции следует существование непрерывно дифференцируемого относительно $\mu^{1/2}$ при $0 < \mu < \mu_0$ решения $\delta(\mu)$ уравнения (48) такого, что

$$|\delta(\mu)| < d\mu^{3/2}.$$

Следовательно, $\xi^*(\mu,\delta(\mu))$ — решение уравнения (27) при $\omega(\mu) = \widehat{\omega}(\mu) + \delta(\mu)$ и $0 < \mu < \mu_0$. □

4. Устойчивость вращающейся структуры

Вопрос об устойчивости построенного выше решения уравнения (11) рассмотрим при следующем условии.

Условие 4. Пусть: 1) существует одна и только одна пара простых собственных значений $\lambda(0)$, $\overline{\lambda}(0)$ оператора $\mathfrak{L}(0)$ такая, что $\lambda(0) = i\omega_0$, $\omega_0 \neq 0$; 2) $\sigma(\mathfrak{L}(0))/\{\lambda(0), \overline{\lambda}(0)\} \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\lambda < 0\}$.

Ниже для исследования устойчивости решения v^* используется метод, основанный на анализе линеаризованного в окрестности v^* уравнения (11) [19, теорема 8.2.3].

Теорема 3. *Пусть выполнены Условия 1., 3., 4.. Тогда периодическое по t решение v^* уравнения* (11) *является экспоненциально орбитально устойчивым.*

Доказательство. Исследуем на устойчивость в пространстве H^1 уравнение

$$\dot{\xi} + \mathfrak{L}(\mu)\xi = \frac{\partial}{\partial u}\mathfrak{R}(Qv^*, \mu)Q\xi, \tag{49}$$

полученного линеаризацией уравнения (11) в окрестности решения v^*. С этой целью перейдем от этого уравнения к его галеркинской аппроксимации. Введем в пространстве H ортопроектор $\tilde{P} : H \to H$

$$\tilde{P}\xi = \sum_{-k_0}^{k_0} \sum_{s=1}^{s_0} P_{k,s}\xi, \quad P_{k,s}\xi = \xi_{k,s} \exp{(ik\theta)} J_{k,s}, \quad \xi_{k,s} = \langle \exp{(ik\theta)} J_{k,s}, \xi \rangle,$$

где выбор k_0, s_0 осуществим ниже. Положим в уравнении (49) $\xi = \tilde{P}\xi + (I - \tilde{P})\xi$, где I – единичный оператор. В полученной относительно $\tilde{P}\xi$, $(I - \tilde{P})\xi$ системе уравнений положим $(I - \tilde{P})\xi = 0$. В результате получим линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\dot{\xi}_{k,s} = \lambda_{k,s}\xi_{k,s} + P_{k,s}\frac{\partial}{\partial u}\mathfrak{R}(Qv^*, \mu) \sum_{l=-k_0}^{k_0} \sum_{p=0}^{s_0} QP_{l,p}\, \xi, \tag{50}$$

где $k = 0, 1, \dots, k_0$, $s = 0, 1, \dots, s_0$, $\lambda_{k,s} = \lambda_{k,s}(\mu)$, $\xi_{-k,s} = \overline{\xi}_{k,s}$, $k = 0, 1, \dots, k_0$. Согласно условию 4 критическими переменными в этой системе являются только переменные $\xi_{m,1}$, $\overline{\xi}_{m,1}$. Принимая во внимание (24) и равенство

$$\frac{\partial \mathfrak{R}(u, 0)}{\partial u} = \widehat{\Lambda}\,\mathrm{ctg}(\widehat{w})u - \frac{1}{2}\widehat{\Lambda}u^2 + o(u^2),$$

убеждаемся, что с точностью до слагаемых, которые не влияют на характер устойчивости системы (50), критическая переменная $\xi_{m,1}$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{m,1} = \lambda(\mu)\xi_{m,1} + \mu_1^{1/2}\widehat{\Lambda}\,\mathrm{ctg}(\widehat{w})\Big(\sum_{s=1}^{s_0} \exp{(i(\omega t + mh))} < J, JJ_{0,s} > \xi_{0,s} + \\ + \exp{(-i(\omega t - mh))} < J, JJ_{2m,s} > \xi_{2m,s}\Big) + \\ + \mu_1\big((\widehat{\Lambda}\,\mathrm{ctg}(\widehat{w}))^2 \exp{(imh)} < J, J\mathfrak{A}_0^{-1}J^2 + \widehat{\Lambda}J^3 > \xi_{m,1} + \end{aligned} \tag{51}$$

$$+\exp(i(2\omega t+mh)) < J, J(2i\omega_0-\mathfrak{A}_{2m})^{-1}J^2+\frac{1}{2}\widehat{\Lambda}J^3 > \overline{\xi}_{m,1}\big).$$

Рассмотрим теперь уравнения относительно некритических переменных $\xi_{0,s}$, $\xi_{2m,s}$, $s=0,1,\ldots$. Легко видеть, что с точностью порядка μ

$$\dot{\xi}_{0,s}=\lambda_{0,s}\xi_{0,s}+\mu_1^{1/2}\widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}(\widehat{w})(\exp(i\omega t)\overline{\xi}_{m,1}+\exp(-i\omega t)\xi_{m,1}) < J_{0,s}, J^2 >, \tag{52}$$

$$\dot{\xi}_{2m,s}=\lambda_{2m,s}\xi_{2m,s}+\mu_1^{1/2}\widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}(\widehat{w})\exp(i(\omega t+2mh))\xi_{m,1} < J_{2m,s}, J^2 > . \tag{53}$$

Преобразование

$$\xi_{m,1}=\eta+\mu_1^{1/2}\widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}(\widehat{w})\Big(\sum_{s=1}^{s_0}\exp(i(\omega t+mh)) < J^2, J_{0,s} > (\lambda_{0,s}(0))^{-1}\xi_{0,s}+$$
$$+\exp(-i(\omega t-mh)) < J^2, J_{2m,s} > (2i\omega_0+\lambda_{2m,s}(0))^{-1}\xi_{2m,s}\Big)$$

в силу (52), (53) и равенств

$$< J^2, (\mathfrak{A}_0)^{-1}J^2)) >=\sum_{s=1}^{s_0} < J, JJ_{0,s} >< J_{0,s}, J^2 > (\lambda_{0,s}(0))^{-1}+r_1(s_0),$$

$$< J^2, (2i\omega_0-\mathfrak{A}_{2m})^{-1}J^2) >=\sum_{s=1}^{s_0} < J^2, J_{2m,s} >< J_{2m,s}, J^2 > (2i\omega_0-\lambda_{2m,s}(0))^{-1}+r_2(s_0).$$

приводит с точностью порядка $\mu^{3/2}$ уравнение (51) к виду

$$\begin{aligned}&\dot{\eta}=\lambda(\mu)\eta+\mu_1\big(\exp(imh) < J, \widehat{\Lambda}J^3+\\&+(\widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}(\widehat{w}))^2\exp(2imh)J(2i\omega_0-\mathfrak{A}_{2m})^{-1}J^2+\mathfrak{A}_0^{-1}J^2 > +r_1(s_0))\eta+\\&+\frac{1}{2}(\exp(i(2\omega t+mh)) < J, \widehat{\Lambda}J^3) > +\\&+ < J^*, (\widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}(\widehat{w}))^2\exp(2imh)J\mathfrak{A}_0^{-1}J^2)+2J\mathfrak{A}_0^{-1}J^2) > +r_2(s_0))\overline{\eta}\big).\end{aligned} \tag{54}$$

Уравнение (54), рассматриваемое совместно с соответствующим ему комплексно сопряженным уравнением, с точностью порядка $\mu^{3/2}$ определяет систему (50) на её двумерном критическом инвариантном многообразии. Выполним теперь в уравнении (54) преобразование

$$\eta\to\eta\exp(i\omega(\mu)t),\ \overline{\eta}\to\overline{\eta}\exp(-i\omega(\mu)t).$$

В результате получим систему линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, которая отличается от системы с постоянными коэффициентами членами порядка $\mu^{3/2}$, $\mu(\|r_1(s_0)\|+\|r_2(s_0)\|)$. При соответствующем выборе s_0 устойчивость матрицы коэффициентов указанной системы и, следовательно, устойчивость уравнения (49) определяется матрицей

$$\begin{pmatrix}-\mathrm{Re}\lambda'(0)(1+i\chi) & -\mathrm{Re}\lambda'(0)(1+i\chi)\\ -\mathrm{Re}\lambda'(0)(1-i\chi) & -\mathrm{Re}\lambda'(0)(1-i\chi)\end{pmatrix},$$

где $\chi=\mathrm{Im}\ c_1/\mathrm{Re}c_1$. Согласно условию 4 отсюда следует, что v^* является экспоненциально орбитально устойчивым решением уравнения (11). □

Заключение

В данной работе метод исследования бифурцирующих из стационарного пространственно однородного решения периодических решений для параболических задач с малой диффузией [9, 12] применен при общих условиях бифуркации Андронова-Хопфа для параболической задачи на кольце и преобразованием поворота пространственной переменной. С этой целью используется одночастотный метод Боголюбова-Митропольского в сочетании с формализмом построения центральных многообразий для задач, инвариантных относительно группы вращений окружности. Указанный подход применялся ранее в работе авторов [6] для параболической задаче Неймана на круге и преобразованием поворота-сжатие пространственных переменных.

Основными результатами данной работы являются теорема 2 о существовании и асимптотической форме вращающейся структуры, бифурцирующей из стационарного решения, и теорема 3 об экспоненциальной орбитальной устойчивости этой структуры.

Список цитируемых источников

1. *Ахманов С.А., Воронцов М. А., Иванов В.Ю.* Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических аналогов нейронных сетей //В Новые принципы оптической обработки информации — М.: Наука. — 1990. — С. 263-325.
2. *Бабин А.В., Вишик М.И.* Аттракторы эволюционных уравнений. М. — 1989.. — 294 с.
3. *Белан Е. П.* О взаимодействии бегущих волн в параболическом функционально-дифференцильном уравнении// Дифференциальные уравнения.— 2004. — Т. 40. N.5, — С. 645–654.
4. *Белан Е. П., Лыкова О. Б.* Вращающиеся структуры в параболическом функционально-дифференциальном уравнении// Дифференциальные уравнения.— 2004. — Т. 40. N.10, — С. 1348–1357.
5. *Белан Е. П.* О динамике бегущих волн в параболическом уравнении с преобразованием сдвига пространственной переменной// Ж. мат. физ., анал., геом. — 2005. — Т. 1, № 1. — С. 3–34.
6. *Белан Е. П., Лыкова О.Б.* Бифуркации вращающихся структур в параболическом функционально-дифференциальном уравнении//Нелiнiйнi коливання. — 2006. — Т. 9, № 2. — С. 155–169.
7. *Белан Е. П.* Оптическая буферность стационарных структур//Кибернетика и системный анализ. —2008.—Т. 44, № 5. — С. 61-75.
8. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. — 504 с.
9. *Васильева А. Б., Кащенко С. А., Колесов Ю. С., Розов Н. Х.* Бифуркация автоколебаний нелинейных параболических уравнений с малой диффузией // Мат. сб., — 1986.— **130(172)**, в. 4(8), — С. 488 – 499.
10. *Кащенко С. А.*Асимптотика пространственно-неоднородных структур в когерентных нелинейно-оптических системах// ЖВММФ. — 1991. — Т. 31, №. 3. — С. 467 – 473.

11. *Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Оптическая буферность и механизмы ее возникновения// Теор. и мат. физика. — 2004, — Т. 140, N 1, — С. 14 – 28.
12. *Мищенко Е. Ф., Садовничий В. А., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. М.: Физматлит, 2005. — 430 с.
13. *Разгулин А. В.* Об автоколебаниях в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом // ЖВММФ.— 1993. — Т. 33. N. 1. — С. 69 – 80.
14. *Разгулин А. В.* Устойчивость бифуркационных автоколебаниях в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом // ЖВММФ.— 1993. — Т. 33. N. 10. — С. 1499 – 1508.
15. *Разгулин А. В.* Ротационные волны в оптической системе с двумерной обратной связью // Математическое моделирование. — 1993. — Т. 5, №4. — С. 105-119.
16. *Разгулин А. В.* Задача управления преобразованием аргументов в функционально-дифференциальных уравнениях математической физики. М.: Изд. отдел ф-та ВМиК МГУ, МАКС Пресс, 2006. — 150 с.
17. *Разгулин А. В.* Нелинейные модели оптической синергетики. М.: Изд. отдел ф-та ВМиК МГУ, МАКС Пресс, 2008. — 201 с.
18. *Скубачевский А. Л.* О бифуркации Хопфа для квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения //Дифференциальные уравнения. — 1998. — Т. 34. N.10.— С. 1394 – 1401.
19. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М.: Мир, 1985. – 376 с.
20. *Grigorieva E. V. , Haken H., Kashchenko S. A. , Pelster A.* Travelling wave dynamics in a nonlinear interferometer with spatial field transformer in feedback// Physika D. — 1999. — V. 125. — P. 123 – 141.
21. *Ruelle D.* Bifurcations in the presence of a symmetry group// Arch.Rational Mech. Anal. — 1973, V. 51, N 2. — P. 136 – 152.
22. *Skubachevskii A. L.* Bifurcation of periodic solution for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics //Nonlinear Analysis. Theory. Methods & Applications. — 1998. — V. 12 No. 2. — P. 261 – 278.

Получена 30.09.2008